ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 92-106.

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

А.Б. ХАСАНОВ, Ф.Р. ТУРСУНОВ

Аннотация. Работа посвящена изучению продолжения и оценки устойчивости решения задачи Коши для уравнения Лапласа в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. При решении прикладных задач следует найти не только приближённое решение, а также производную приближённого решения. В работе при помощи функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и её производные. Если функции Карлемана построена, то используя формулу Грина, можно найти регуляризованное решение в явном виде. Показано, что эффективное построение функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задачи Коши. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения и её производной, а также формула регуляризации для случая, когда при указанных условиях вместо начальных данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданной погрешностью в равномерной метрике. Получены оценки устойчивости решения задачи Коши в классическом смысле.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

Mathematics Subject Classification: 47A52; 65N20; 45M10

1. Введение

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ точки двумерного Евклидового пространства R^2, G — ограниченная односвязная область в R^2 с границей ∂G, состоящей из компактной части $T = \{y_1 \in R : \ a_1 \le y_1 \le b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S : y_2 = h(y_1)$, лежащей в полуплоскости $y_2 > 0$. $\overline{G} = G \cup \partial G$, $\quad \partial G = S \cup T$, d/dn – оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Решение задачи Коши будем строить в области G, когда данные Коши заданы на части границы S.

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0. \tag{1.1}$$

Постановка задачи. Требуется найти гармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.

$$U(y)|_S = f(y), \quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S = g(y). \tag{1.2}$$

Здесь $f(y)$и $g(y)$ — заданные функции класса $C(S)$ и $C^1(S)$ соответственно.

A.B. Khasanov, F.R. Tursunov, Of Cauchy problem for Laplace equation.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ФНИ РУз в рамках научного проекта ОТ -Ф4-04(05).

Поступила 4 февраля 2018 г.

Рассматриваемая задача (1.1)–(1.2) относится к некорректным задачам математической физики. В работе Тихонова А.Н. [4], выяснено истинную природу некорректных задач математической физики. Он указал практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения, т.е. задача становится устойчивой.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши-Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г.М. Голузин и В.И. Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Они нашли формулу восстановления решения по ее значениям на граничном множестве положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А. Айзенберга [1]. Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального уравнения со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [6], [7]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я. Ярмухамедов [8], [9] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области является гиперповерхностью либо конической поверхностью.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $x\in G$, $i=1,2$. В данной работе строится семейство функций $U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)=U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i}=\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $i=1,2$, зависящих от параметра σ, и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma=\sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta\to 0$ сходится в каждой точке $x\in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i}$ с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [6].

Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным уклонением в равномерной метрике, то предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2>0$.

Конструкция функции Карлемана. Пусть $\sigma>0$, $y'=(y_1,0)$, $x'=(x_1,0)$, $r=\mid y-x\mid$, $\alpha=\mid y'-x'\mid$, $\alpha^2=s$, $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2$, $u\geqslant 0$. Определим при $\alpha>0$ функцию $\Phi_\sigma(x,y)$ следующим равенствам:

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_2}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2. \tag{1.3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}udu}{u^2+r^2}-\right.\\ \left.-\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right].\end{aligned} \tag{1.4}$$

Обозначим

$$\varphi_\sigma(x,y,u)=\cos\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}-\frac{(y_2-x_2)\sin\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\quad \tau=2\sigma y_2.$$

Тогда $\Phi_\sigma(x,y)$ принимает вид:

$$2\pi e^{\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^\infty\frac{\varphi_\sigma(x,y,u)}{u^2+r^2}ue^{-\sigma u^2}du.$$

В работе [9] доказано, что функция, определенная равенствами (1.3) при $\sigma>0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=F(r)+G_\sigma(x,y),\tag{1.5}$$

где $F(r)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$, $G_\sigma(x,y)$ – функция гармоническая по y в R^2 включая $y=x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma>0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [6]. Поэтому для функции $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина:

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x,y)-U(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y.\tag{1.6}$$

2. Формула продолжения и регуляризация по М.М. Лаврентьеву

Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[g(y)\Phi_\sigma(x,y)-f(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y.\tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ на S удовлетворяет условию (1.2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство*

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|\le M,\quad y\in T,\tag{2.2}$$

здесь $M>0$. Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\psi_2(\sigma)Me^{-\sigma x_2^2},\tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le\varphi_i(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2},\quad i=1,2,\tag{2.4}$$

где

$$\psi_2(\sigma)=\left(\frac12+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}\right),\tag{2.5}$$

$$\varphi_1(\sigma,x_2)=\left(\frac12+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right),\tag{2.6}$$

$$\varphi_2(\sigma,x_2)=\left(\frac{\sqrt{\pi\sigma}x_2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right).\tag{2.7}$$

Доказательство. Оценка (2.3) доказана в работе [9]. Докажем неравенство (2.4). Дифференцируя равенства (1.6) и (2.1) по x_1 получим:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}=\int_S\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]dS_y+\tag{2.8}$$

$$+\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]dS_y,$$

$$\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1}=\int_S\left[g(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}-f(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]dS_y.$$

Обозначим через $I_{1\sigma}(x)$ разность производных

$$I_{1\sigma}(x)=\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1}=\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]dS_y.$$

Отсюда и из неравентсва (2.2) следует

$$|I_{1\sigma}(x)|=\left|\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]dS_y\right|\le MN_\sigma(x),$$

где

$$N_\sigma(x)=\int_T\left[\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right|\right]dS_y.$$

Чтобы показать, справедливость оценки (2.4) при $i=1$ будем доказать следующее неравенство

$$N_\sigma(x)\le\varphi_1(\sigma,x_2)e^{-\sigma x_2^2},\quad \sigma>0. \tag{2.9}$$

Для этого, дифференцируем равенство (1.4) по x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}&=2\sigma(y_1-x_1)\Phi_\sigma(x,y)+\\
&+\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)}\left\{\int_0^\infty\frac{2\sigma y_2(y_1-x_1)ue^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}(u^2+r^2)}\,du+\right.\\
&+\int_0^\infty\frac{2(y_1-x_1)ue^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)^2}du+\\
&+\int_0^\infty\frac{2\sigma y_2(y_1-x_1)(y_2-x_2)ue^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+\alpha^2)(u^2+r^2)}du-\\
&-\int_0^\infty\frac{2(y_1-x_1)(y_2-x_2)ue^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}(u^2+r^2)^2}du-\\
&\left.-\int_0^\infty\frac{(y_1-x_1)(y_2-x_2)ue^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{(u^2+\alpha^2)^3}(u^2+r^2)^2}du\right\}.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Отсюда, полагая $y_2=0$ получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}&=\frac{(y_1-x_1)}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\times\\
&\times\left\{\int_0^\infty\frac{\sigma ue^{-\sigma u^2}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}du+\int_0^\infty\frac{ue^{-\sigma u^2}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}du\right\}.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Теперь оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
\int_T\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right|dS_y&\le\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{|y_1-x_1|}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_0^\infty\frac{\sigma ue^{-\sigma u^2}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}du\right\}dy_1+\\
&+\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{|y_1-x_1|}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_0^\infty\frac{ue^{-\sigma u^2}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}du\right\}dy_1.
\end{aligned}$$

Произведем оценку первого интеграла:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{|y_1-x_1|}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_0^{\infty}\frac{\sigma u e^{-\sigma u^2}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}du\right\}dy_1 \le$$
$$\le \frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\,|y_1-x_1|\,e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}dudy_1 \le$$
$$\le \frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)}dudy_1=\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2}.$$

При этом было использовано неравенство

$$\frac{u\,|y_1-x_1|}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}<1. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12), оценим второй интеграл и переходя к полярным координатам получим:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{|y_1-x_1|}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_0^{\infty}\frac{u e^{-\sigma u^2}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}du\right\}dy_1 \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\,|y_1-x_1|\,e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dudy_1 \le$$
$$\le \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}dudy_1=$$
$$=\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{te^{-\sigma t^2}}{t^2+x_2^2}dt=e^{-\sigma x_2^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{te^{-\sigma t^2}}{t^2+x_2^2}dt\le\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2x_2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sigma t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\sigma x_2^2}}{4\sqrt{\sigma}x_2}.$$

Отсюда получим неравенство:

$$\int_T\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right|dS_y\le e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2}\right). \tag{2.13}$$

Далее вычислим производную:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\cos\gamma\right]+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\sin\gamma\right]=$$
$$=\frac{\sigma(y_1-x_1)}{\pi}e^{-\sigma(x_2^2-y_2^2+(y_1-x_1)^2)}\frac{(y_1-x_1)\cos\tau(y_1-x_1)-(y_2-x_2)\sin\tau(y_1-x_1)}{r^2}\cos\gamma-$$
$$-\frac{e^{-\sigma(-y_2^2+x_2^2+(y_1-x_1)^2)}}{2\pi}\left\{\frac{-\cos\tau(y_1-x_1)+\tau(y_1-x_1)\sin\tau(y_1-x_1)}{r^2}+\right.$$
$$+\frac{\tau(y_2-x_2)\cos\tau(y_1-x_1)}{r^2}+$$
$$\left.+\frac{2(y_1-x_1)^2\cos\tau(y_1-x_1)-2(y_1-x_1)(y_2-x_2)\sin\tau(y_1-x_1)}{r^4}\right\}\cos\gamma- \tag{2.14}$$
$$-\frac{2\sigma\,|y_1-x_1|}{2\pi}e^{-\sigma(-y_2^2+x_2^2+(y_1-x_1)^2)}\frac{(y_2-x_2)\cos\tau(y_1-x_1)+|y_1-x_1|\sin\tau\,|y_1-x_1|}{r^2}\sin\gamma-$$
$$-\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(-y_2^2+x_2^2+(y_1-x_1)^2)}\times$$
$$\times\left\{\frac{[-\tau(y_2-x_2)\sin\tau(y_1-x_1)-\sin\tau(y_1-x_1)-\tau\,|y_1-x_1|\cos\tau\,|y_1-x_1|]}{r^2}+\right.$$

$$+\frac{2(y_1-x_1)\left[(y_2-x_2)\cos\tau(y_1-x_1)+2\left|y_1-x_1\right|^2\sin\tau\left|y_1-x_1\right|\right]}{r^4}\Bigg\}\sin\gamma,$$

где $\tau=2\sigma y_2$, причем $\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}$ и $\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}$ определяются из следующих формул (см.[9]):

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}=-\frac{e^{\sigma(y_2^2-x_2^2-(y_1-x_1)^2)}}{2\pi}\frac{(y_1-x_1)\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)+(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^2},\tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}=-\frac{e^{\sigma(y_2^2-x_2^2-|y_1-x_1|^2)}}{2\pi}\frac{(y_2-x_2)\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)+|y_1-x_1|\sin 2\sigma y_2\left|y_1-x_1\right|}{r^2}.\tag{2.16}$$

Отсюда находим:

$$\begin{gathered}\int\limits_T\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\Big|_{y_2=0}\right|dS_y=\int\limits_T\left|\left\{\frac{\sigma(y_1-x_1)}{\pi}\frac{e^{-\sigma x_2^2-\sigma(y_1-x_1)^2}(y_1-x_1)}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\cos\gamma\right.\right.+\\+\frac{e^{-\sigma x_2^2-\sigma(y_1-x_1)^2}}{2\pi}\left\{\frac{1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}-\frac{2(y_1-x_1)^2}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}\right\}\cos\gamma+\\\left.\left.+\frac{1}{\pi}e^{-\sigma x_2^2-\sigma|y_1-x_1|^2}\left[\frac{\sigma\left|y_1-x_1\right|x_2}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}+\frac{(y_1-x_1)x_2}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}\right]\sin\gamma\right\}\right|dS_y.\end{gathered}\tag{2.17}$$

Учитывая, что $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G, оценим (2.17).

С учетом $\frac{(y_1-x_1)}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\leq\frac{1}{2x_2}$, сначала оценим первый интеграл:

$$\frac{1}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\sigma\left|y_1-x_1\right|x_2}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1\leq\frac{\sigma x_2}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y_1-x_1|}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1\leq$$

$$\leq\frac{\sigma x_2}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\frac{1}{2x_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1=\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\sigma x_2^2}.$$

Аналогично оценивается второй интеграл:

$$\frac{1}{\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{|y_1-x_1|\,x_2}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1\leq\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi x_2^2}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1=\frac{1}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}e^{-\sigma x_2^2}.$$

С учетом полученных оценок имеем:

$$\int_T\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|dS_y\leq e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right).\tag{2.18}$$

Учитывая (2.13) и (2.18) получим доказательство неравенства (2.9).

Неравенство (2.4) доказано при $i=1$.

Теперь докажем неравенство (2.4) при $i=2$. Из (1.6) и (2.1) находим производную по x_2:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}=\int_S\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right]dS_y+\\+\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right]dS_y,\end{gathered}$$

$$\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_2}=\int_S\left[g(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}-f(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right]dS_y.$$

Обозначим через $I_{2\sigma}(x)$ разность производных:

$$I_{2\sigma}(x)=\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_2}=\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right]dS_y.$$

Отсюда из (2.2) следует

$$|I_{2\sigma}(x)|=\left|\int_T\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}-U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right]dS_y\right|\le MP_\sigma(x),$$

где

$$P_\sigma(x)=\int_T\left[\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right]dS_y.$$

Докажем неравенство

$$P_\sigma(x)\le\varphi_2(\sigma,x_2)e^{-\sigma x_2^2},\ \sigma>0. \tag{2.19}$$

Из (1.4) имеем:

$$\begin{gathered}\int_T\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|dS_y=\int_T\left|\left\{-2\sigma x_2\Phi_\sigma(x,y)+\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)}\times\right.\right.\\ \times\left\{\int_0^\infty\frac{2(y_2-x_2)ue^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)^2}\,du+\right.\\ +\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}-\\ \left.\left.\left.-\int_0^\infty\frac{2(y_2-x_2)^2e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right\}\right\}\right|dS_y.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Полагая $y_2=0$, в (2.20) находим:

$$\begin{gathered}\int\limits_T\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|dS_y\Bigg|_{y_2=0}=\int\limits_T\left|\left\{-\frac{x_2}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\times\right.\right.\\ \left.\left.\times\left\{\int\limits_0^\infty\frac{\sigma ue^{-\sigma u^2}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}du+\int\limits_0^\infty\frac{ue^{-\sigma u^2}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}du\right\}\right\}\right|dS_y.\end{gathered}$$

Переходя к полярным координатам в первом интеграле и оценивая получим:

$$\begin{gathered}\frac{x_2}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_{a_1}^{b_1}\int_0^\infty\frac{\sigma|u|e^{-\sigma u^2}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}dudy_1\le\\ \le\frac{\sigma x_2}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|u|e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2}dudy_1=\\ =\frac{\sigma x_2}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{t^2|\cos\varphi|e^{-\sigma t^2}}{t^2+x_2^2}dt\le\sigma x_2e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-\sigma t^2}}{t^2+x_2^2}dt\le\\ \le\sigma x_2e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{+\infty}e^{-\sigma t^2}dt=\frac{\sqrt{\sigma\pi}x_2}{2}e^{-\sigma x_2^2}.\end{gathered}$$

Аналогично оценим второй интеграл:

$$\frac{x_2}{\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2)}\int_{a_1}^{b_1}\int_0^{+\infty}\frac{\sigma|u|e^{-\sigma u^2}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dudy_1\le$$

$$\le \frac{x_2}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|u|\,e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{(u^2+(y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dudy_1 =$$
$$=\frac{x_2}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,|\cos\varphi|\,e^{-\sigma t^2}}{(t^2+x_2^2)^2}dt \le e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2x_2e^{-\sigma t^2}}{(t^2+x_2^2)^2}dt \le$$
$$\le e^{-\sigma x_2^2}\int_0^{+\infty}\frac{x_2e^{-\sigma t^2}}{t^2+x_2^2}dt \le \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{x_2}\int_0^{+\infty}e^{-\sigma t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma}}e^{-\sigma x_2^2}.$$

Учитывая эти оценки, получим:

$$\int_T\left|\left.\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|_{y_2=0}\right|dS_y \le e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{\sqrt{\pi\sigma}x_2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma}}\right). \tag{2.21}$$

Далее вычислим интеграл:

$$\int\limits_T\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y = \int\limits_T\Bigg\{-\frac{e^{\sigma(y_2^2-x_2^2-(y_1-x_1)^2}}{\pi}\times\left[-\frac{1}{2}\frac{\sin 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma x_2(y_1-x_1)\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^2}-\frac{(y_1-x_1)(y_2-x_2)\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^4}-$$
$$\left.-\frac{\sigma x_2(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^2}+\frac{(y_2-x_2)^2\sin 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^4}\right]\cos\gamma-$$
$$-\frac{e^{\sigma(y_2^2-x_2^2-(y_1-x_1)^2}}{\pi}\times\left[\frac{1}{2}\frac{\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)}{r^2}+\right.$$
$$+\frac{\sigma x_2(y_2-x_2)\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)+\sigma x_2\,|y_1-x_1|\sin 2\sigma y_2\,|y_1-x_1|}{r^2}+$$
$$\left.+\frac{(y_2-x_2)^2\cos 2\sigma y_2(y_1-x_1)-|y_1-x_1(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2\,|y_1-x_1||}{r^4}\right]\sin\gamma\Bigg\}dS_y$$

Отсюда при $y_2=0$ имеем:

$$\int\limits_T\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|_{y_2=0}\Bigg|dS_y =$$
$$=\int\limits_T\Bigg|\Bigg\{\frac{e^{-\sigma x_2^2-\sigma(y_1-x_1)^2}}{\pi}\frac{x_2(y_1-x_1)}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\left[\sigma+\frac{1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\right]\cos\gamma+$$
$$+\frac{e^{-\sigma x_2^2-\sigma|y_1-x_1|^2}}{\pi}\left[\frac{-\sigma x_2^2}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}+\frac{1}{2(y_1-x_1)^2+x_2^2}+\right. \tag{2.22}$$
$$\left.+\frac{x_2^2}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}\right]\sin\gamma\Bigg\}\Bigg|dS_y\le\frac{\sigma x_2^2e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+$$
$$+\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1+\frac{x_2^2e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dy_1.$$

Здесь учитывали, что $\cos\gamma,\sin\gamma$ является координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G. Теперь оценывая эти интегралы, имеем:

$$\frac{\sigma x_2^2e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy\le\frac{\sigma e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1=\frac{\sqrt{\sigma}e^{-\sigma x_2^2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1\leq\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi}\frac{1}{x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1=\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}},$$

$$\frac{x_2^2e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{((y_1-x_1)^2+x_2^2)^2}dy_1\leq\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{\pi}\frac{1}{x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}dy_1=\frac{e^{-\sigma x_2^2}}{x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}.$$

С учетом полученных оценок, имеем:

$$\int_T\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|dS_y\leq e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right). \tag{2.23}$$

Из (2.21) и (2.23) следеут доказательство неравенства (2.19).

Теорема 2.1 доказана. □

Следствие 2.1. *При каждом $x\in G$ справедливо равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x),\ \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2.$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon=\Big\{(x_1,x_2)\in G,\quad a>x_2\geq\varepsilon,\quad a=\max_T h(x_1),\ 0<\varepsilon<a,\ \Big\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2.2. *Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$и $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$*

$$U_\sigma(x)\rightrightarrows U(x),\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\rightrightarrows\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2$$

сходится равномерно при $\sigma\to\infty$.

Следует отметить, что множества $\Pi_\varepsilon=G\backslash\overline{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

3. Оценка устойчивости решения задачи Коши

Рассмотрим множество

$$E=\left\{U\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G}):\ |U(y)|+|gradU|\leq M, M>0, y\in T\right\}.$$

Положим

$$a=\max_T h(y_1),\quad b=\max_T\sqrt{1+\left(\frac{dh}{dy_1}\right)^2},$$

где кривая S задана уравнением $y_2=h(y_1)$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $U(y)\in E$, удовлетворяет уравнению Лапласа* (1.1), *и на части S границы области G выполняется неравенство*

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|<\delta,\quad y\in S. \tag{3.1}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)|\leq 2\psi(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \tag{3.2}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right|\leq 2\mu_i(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2},\ i=1,2,\ 0<\delta\leq Me^{-\sigma a^2}, \tag{3.3}$$

где

$$\psi(\sigma,x_2)=\max_S(\psi^2(\sigma,x_2),\psi_2(\sigma)),\quad \psi^2(\sigma,x_2)=\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}+ab+\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}},$$

$$\mu_1(\sigma, x_2) = \max_S(\nu_1(\sigma, x_2), \varphi_1(\sigma, x_2)),$$

$$\nu_1(\sigma, x_2) = \left(\frac{b + 3ab\sqrt{\pi\sigma}}{4} + \frac{2\sigma ab + 4b\sqrt{\sigma} + a^2 b\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{ab\sqrt{\pi\sigma}}{(a - x_2)^2} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2}\right),$$

$$\mu_2(\sigma, x_2) = \max_S(\nu_2(\sigma, x_2), \varphi_2(\sigma, x_2)),$$

$$\nu_2(\sigma, x_2) = \left(\frac{bx_2\sqrt{\sigma\pi} + 2\sigma abx_2}{2} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + 3ab\sqrt{\sigma\pi} + \right.$$
$$\left. + \frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{4b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2}\right),$$

$\varphi_1(\sigma, x_2))$ и $\varphi_2(\sigma, x_2))$ определяется по формулами (2.6) *и* (2.7).

Доказательство. Из интегральной формулы Грина имеем:

$$U(x) = \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x, y) - U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y + $$
$$+ \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x, y) - U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y. \tag{3.4}$$

Из условия (1.2) и неравенства (3.1) имеем

$$|U(x)| \leq \left|\int_S \left[g(y)\Phi_\sigma(x, y) - f(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y\right| + $$
$$+ \left|\int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x, y) - U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y\right| \leq$$
$$\leq \delta\,|U_\sigma(x)| + M\left(\int_T |\Phi_\sigma(x, y)|\,dS_y + \int_T \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right| dS_y\right) \leq \delta\,|U_\sigma(x)| + M\psi_2(\sigma)e^{-\sigma x_2^2}.$$

Здесь использована оценка

$$M\left(\int_T |\Phi_\sigma(x, y)|\,dS_y + \int_T \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right| dS_y\right) \leq M\psi_2(\sigma)e^{-\sigma x_2^2},$$

которая доказана в работе [9], где $\psi_2(\sigma)$ определяется по формуле (2.5). Учитывая (1.4) и переходя к полярным координатам имеем:

$$\int_S |\Phi_\sigma(x, y)|\,dS_y = \int_S \left|\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)}\left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2 + \alpha^2}udu}{u^2 + r^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma u^2}(y_2 - x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\right]\right| dS_y \leq$$

$$\leq \frac{b}{2\pi}e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{ue^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{u^2+r^2}dudy_1+$$

$$+\frac{b}{2\pi}e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{u\left|y_2-x_2\right|\left|\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}\right|e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}dudy_1\leq$$

$$\leq \frac{b}{4\pi}e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}}{\sqrt{u^2+(y_1-x_1)^2}}dudy_1+$$

$$+\frac{ab\sigma}{\pi}e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma(u^2+(y_1-x_1)^2)}dudy_1\leq e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\left(\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}+ab\right).$$

Так как $|sinx|\leq\frac{2|x|}{1+|x|}, x\geq 0$, тогда $\left|\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}\right|\leq\frac{4|\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}|}{1+|2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}|}$.

Учитывая формулы

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}=\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\cos\gamma+\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\sin\gamma$$

и (2.15) , (2.16), повторяя рассуждение доказательства теоремы 2.1, получим:

$$\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right|dS_y\leq\left(\frac{b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right)e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2},$$

$$\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right|dS_y\leq\left(\frac{b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right)e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}.$$

Сложив полученные оценки, имеем:

$$\int_S\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|dS_y\leq\left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right)e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}.$$

Из интегральной формулы (3.4) и условия (2.2) получим:

$$\begin{gathered}|U(x)|\leq\delta\int\limits_S\left\{|\Phi_\sigma(x,y)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|\right\}dS_y+\\ +M\int\limits_T\left\{|\Phi_\sigma(x,y)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|\right\}dS_y\leq\\ \leq\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\left(\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}+ab+\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{\sqrt{\sigma}ab}{2\sqrt{\pi}}\right)+\\ +Me^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}\right)=\psi(\sigma)(Me^{-\sigma x_2^2}+\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}),\end{gathered}\tag{3.5}$$

Наилучшая оценка для функции $|U(x)|$ получается в случае, когда

$$Me^{-\sigma x_2^2}=\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}$$

или

$$\sigma=\frac{1}{a^2}\ln\frac{M}{\delta}.\tag{3.6}$$

Подставляя выражение для σ из равенства (3.6) в (3.5), получим доказательство неравенства (3.2) (см.[6]).

Далее докажем неравенство (3.3) при $i = 1$. Для этого находим производную из интегральной формулы (3.4) по переменной x_1:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y + \\ + \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y = \tag{3.7}$$

$$= \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1} + \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y,$$

здесь

$$\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1} = \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y. \tag{3.8}$$

Далее оценивая, получим:

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}\right| \le \left|\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1}\right| + M\int_T \left[\left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right|\right] dS_y \le$$

$$\le \left|\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_1}\right| + M\varphi_1(\sigma, x_2)e^{-\sigma x_2^2}.$$

Это оценка следует из теоремы 2.1 , где $\varphi_1(\sigma, x_2)$ определяется по формуле (2.6). В равенстве (3.8) с учетом (2.10) на части S границы области G имеем:

$$\int_S \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right| dS_y \le \\ \le e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\frac{b + 3ab\sqrt{\pi\sigma}}{4} + \frac{2\sigma ab + a^2 b\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + \frac{ab\sqrt{\pi\sigma}}{(a - x_2)^2}\right). \tag{3.9}$$

$$\int\limits_S \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right| dS_y \le \frac{2b}{\pi}e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\sigma\left|y_1 - x_1\right|^2}{r^2 e^{\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1 + \\ + \frac{b}{\pi}e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{2\sigma\left|y_1 - x_1\right|\left|y_2 - x_2\right|}{r^2 e^{\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1 + \int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{r^2}dy_1\right) + \\ + \frac{2b\sigma a}{\pi}e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\left|y_1 - x_1\right|}{r^2 e^{\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1 + \int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\left|y_2 - x_2\right|}{r^2 e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1\right) + \\ + \frac{2b}{\pi}e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\left|y_1 - x_1\right|^2}{r^4 e^{\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1 + \int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\left|y_1 - x_1\right|\left|y_2 - x_2\right|}{r^4 e^{\sigma(y_1 - x_1)^2}}dy_1\right) \le \\ \le e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\frac{4b\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2}\right). \tag{3.10}$$

Учитывая условия теоремы 2.1 и 3.1, а также (3.9), (3.10), для интегральной формулы (3.7), получим:

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}\right| \leq \delta \int\limits_S \left[\left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right] dS_y +$$

$$+M \int\limits_T \left[\left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right] dS_y \leq$$

$$\leq \delta \left\{ e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} \left(\frac{b + 3ab\sqrt{\pi\sigma}}{4} + \frac{2\sigma ab + a^2 b\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + \frac{ab\sqrt{\pi\sigma}}{(a-x_2)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4b\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)^2}\right)\right\} +$$

$$+M\left\{ e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right)\right\} \leq \mu_1(\sigma, x_2)(\delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} + M e^{-\sigma x_2^2}).$$

Здесь выбирая $\sigma = \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}$, получим доказательство неравенства (3.3), при $i = 1$:

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}\right| \leq 2\mu_1(\sigma, x_2) M^{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_2^2}{a^2}}.$$

Теперь докажем неравенство (3.3) при $i = 2$. Для этого находим производную в интегральной формуле (3.4) по переменной x_2 и оценивая, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x)}{\partial x_2} &= \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y + \\ &+ \int_T \left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right] dS_y \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}\right| \leq \int_S \left|\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2} - U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right]\right| dS_y +$$

$$+M \int_T \left[\left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right|\right] dS_y \leq \left|\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_2}\right| + M\varphi_2(\sigma, x_2)e^{-\sigma x_2^2},$$

здесь

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}\right| = \int_S \left|\left[\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right| + \left|U(y)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right] dS_y.$$

Оценки второго интеграла следует из теоремы 2.1, где $\varphi_2(\sigma, x_2)$ определяется по формуле (2.7). Учитывая (2.20) на части S границы области G, получим:

$$\int_S \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right| dS_y \leq b e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}\left(\frac{x_2\sqrt{\sigma\pi} + 2\sigma a x_2}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a-x_2)} + 3a\sqrt{\sigma\pi}\right). \tag{3.12}$$

Точно также получим:

$$\begin{aligned} \int_S \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right| dS_y &\leq \frac{2bx_2}{\pi} e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma\,|y_1 - x_1|}{r^2 e^{\sigma(y_1-x_1)^2}} dy_1 + \\ + \frac{2b}{\pi} e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} &\left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{|y_1 - x_1|\,|y_2 - x_2|}{r^4 e^{\sigma(y_1-x_1)^2}} dy_1 + x_2 \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sigma\,|y_2 - x_2|}{r^2 e^{\sigma(y_1-x_1)^2}} dy_1\right) + \\ + \frac{b}{\pi} e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} &\left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{r^2} dy_1 + 2\int_{a_1}^{b_1} \frac{|y_2 - x_2|^2}{r^4 e^{\sigma(y_1-x_1)^2}} dy_1\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Для (3.13) имеет место оценка

$$\int_S \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right| dS_y \leq e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\left(\frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a-x_2)}+\frac{4b}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)^2}\right). \tag{3.14}$$

Доказательство неравенства (3.3), при $i=2$ вытекает из оценки интегральной формулы (3.11), с учетом условий теоремы 2.1 и 3.1, а также (3.12), (3.14).

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}\right| \leq \delta\int\limits_S\left[\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right]dS_y+$$

$$+M\int\limits_T\left[\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]\right|\right]dS_y \leq\delta\left\{e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}\left(\frac{bx_2\sqrt{\sigma\pi}+2\sigma abx_2}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a-x_2)}+3ab\sqrt{\sigma\pi}+\frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a-x_2)}+\frac{4b}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)^2}\right)\right\}+$$

$$+M\left\{e^{-\sigma x_2^2}\left(\frac{\sqrt{\pi\sigma}x_2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma}}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right)\right\}\leq\mu_2(\sigma,x_2)(\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}+Me^{-\sigma x_2^2}).$$

Здесь выбирая $\sigma=\frac{1}{a^2}\ln\frac{M}{\delta}$, получим доказательство неравенства (3.3), т.е.

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}\right|\leq 2\mu_2(\sigma,x_2)M^{1-\frac{x_2^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_2^2}{a^2}}.$$

Теорема 3.1 доказана. □

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S\left[g_\delta(y)\Phi_\sigma(x,y)-f_\delta(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y. \tag{3.15}$$

Теорема 3.2. *Пусть функция $U(y)\in E$ на S удовлетворяет условие (1.2) и вместо функций $f(y)$, $g(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ с заданным уклонением $\delta>0$:*

$$\max_S|f(y)-f_\delta(y)|<\delta,\quad \max_S|g(y)-g_\delta(y)|<\delta. \tag{3.16}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\leq 2\psi(\sigma)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \tag{3.17}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right|\leq 2\mu_i(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, 0<\delta\leq Me^{-\sigma a^2}. \tag{3.18}$$

$i=1,2.$

Доказательство. Из (3.4),(3.7), (3.11) и (3.15) получим:

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\leq|I_\sigma(x)|+\delta\int_S\left\{|\Phi_\sigma(x,y)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right|\right\}dS_y,$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right|\leq|I_{i\sigma}(x)|+\delta\int_S\left\{\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial x_i}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right)\right|\right\}dS_y,$$

$i=1,2$. Из теоремы 2.1 и 3.1, учитывая

$$|U(x)|\leq\psi(\sigma)(Me^{-\sigma x_2^2}+\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}),$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_1}\right|\leq\mu_1(\sigma,x_2)(Me^{-\sigma x_2^2}+\delta e^{\sigma a^2-\sigma x_2^2}),$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_2}\right|\leq\mu_2(\sigma,x_2)(Me^{-\sigma x_2^2}+\delta e^{\sigma a^2\sigma x_2^2}),$$

и выбирая $\sigma=\frac{1}{a^2}\ln\frac{M}{\delta}$, получим доказательство теоремы 3.2. □

Следствие 3.1. *При каждом $x \in G$ справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x), \lim_{\delta\to 0} \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Следствие 3.2. *Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$и $\left\{\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right\}$*

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x), \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

сходится равномерно при $\delta \to 0$.

Авторы выражают благодарность профессору БашГУ А.М. Ахтямову за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск.* М.:«Наука». 1990. 247 с.
2. T. Carleman *Les Functions quasi analytiques.* Paris. 1926. 116 p.
3. Голузин Г.М., Крылов. В.И. *Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций* // Мат. сборник. 1933. **40**. С. 144–149.
4. Тихонов А.Н. *Об устойчивости обратных задач* // ДАН СССР.1943. **39**:5. С. 195–198.
5. Тарханов Н.Н. *Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа* // Красноярск. 1980. С. 147–160.
6. Лаврентьев М.М. *О Задача Коши для уравнения Лапласа.* // Изв. АН СССР Сер. матем. 1956. **20**:6. С. 819–842.
7. Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Изд. СО АН СССР Новосибирск. 1962.
8. Ярмухамедов Ш. *О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы.* // Сибирский математический журнал. 2002. **43**:1. С. 228–239.
9. Ярмухамедов Ш. *Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши* // Математические заметки. 2008. **83**:5. С. 763–778.
10. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск. Сибирские научное издательство. 2009. 457 с.

Акназар Бекдурдиевич Хасанов,
Самаркандский государственный университет,,
Университетский бульвар , 15,
140104, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: ahasanov2002@mail.ru

Фарход Рузикулович Турсунов,
Самаркандский государственный университет,,
Университетский бульвар , 15,
140104, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru