ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 41-49.

УДК 514, 519.2

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКРИВЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Д.С. КЛИМЕНТОВ

Аннотация. В предлагаемой заметке выводится стохастический аналог уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци и приводится стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны ограниченного искривления. В 1956 году И.Я. Бакельман вывел уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци для поверхностей ограниченного искривления, т.е. для поверхностей, задаваемых функциями с непрерывными первыми производными и суммируемыми с квадратом обобщёнными вторыми производными в смысле Соболева. В 1988 г. Ю.Е. Боровский доказал, что уравнения, выведенные И.Я. Бакельманом, однозначно определяют поверхность ограниченного искривления.

Целью настоящей работы является изложение результатов И.Я. Бакельмана и Ю.Е. Боровского на языке теории случайных процессов в случае поверхности ограниченного искривления положительной кривизны.

С помощью двух основных форм поверхности строятся два случайных процесса и выводится система уравнений, связывающих между собой характеристики (переходные функции) этих процессов. Полученная система является стохастическим аналогом системы уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци и является необходимым и достаточным условием для однозначного определения поверхности (с точностью до движения). Отметим, что генераторами случайных процессов являются операторы второго порядка, порожденные основными формами поверхности. Например, если метрика поверхности задается выражением $I = ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, то генератор соответствующего процесса имеет вид $A = g^{ij}\partial_i\partial_j$. Далее, устанавливается взаимосвязь между переходными функциями случайного процесса и коэффициентами генератора. Полученные выражения подставляются в обобщенные уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци, что и приводит к искомому результату.

Ключевые слова: поверхность ограниченного искривления, кривизна, случайный процесс, переходная функция случайного процесса, уравнение Колмогорова.

Mathematics Subject Classification: 60G99, 53A05

D.S. Klimentov, Stochastic analogue of fundamental theorem of surface theory for surfaces with bounded distortion and positive curvature.

©Климентов Д.С. 2019.

Работа выполнена при финансовой поддержке Южного Федерального Университета. Автор является сотрудником Южного Федерального Университета.

Поступила 25 декабря 2018 г.

В предлагаемой заметке выводится стохастический аналог уравнений Гаусса – Петерсона–Кодацци и приводится стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны ограниченного искривления. Настоящая работа является продолжением работ [1] и [2]. Стоит отметить, что данная тематика возникла как попытка построить аналитическую геометрию на двумерных многообразиях ограниченной кривизны. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы кривизна двумерной поверхности F в трехмерном евклидовом пространстве была положительной и поверхность F была односвязной, конформно эквивалентной кругу. Требование положительности кривизны связано со спецификой построения диффузионного процесса по квадратичной форме. Первую и вторую квадратичные формы поверхности F будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$ и $II = b_{ij}dx^i dx^j$ соответственно, где x^1, x^2 — локальные координаты на нашей поверхности.

Хорошо известна *основная теорема теории поверхностей* [3, с. 306]:

Уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци представляют собой необходимое и достаточное условие того, чтобы две аналитически заданные квадратичные формы, из которых одна является положительно определённой (первая форма поверхности), служили первой и второй формами для некоторой поверхности, которую они определяют с точностью до движения; ее глобальный вариант см. в [4, с. 76].

В 1956 г. И.Я. Бакельман в работе [5] вывел уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци для поверхностей ограниченного искривления, т.е. для поверхностей, задаваемых функциями с непрерывными первыми производными и суммируемыми с квадратом обобщёнными вторыми производными в смысле Соболева. В 1988 г. Ю.Е. Боровский в работе [6] доказал, что уравнения, выведенные И.Я. Бакельманом, однозначно определяют поверхность ограниченного искривления.

Структура статьи следующая: в первой части приводятся некоторые определения из теории случайных процессов; во второй – необходимые сведения из теории двумерных многообразий ограниченной кривизны (пространств Александрова); в третьей части формулируется и доказывается стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ограниченного искривления положительной кривизны.

1. Сведения из теории случайных процессов

Предполагается, что читатель знаком с определениями случайного, марковского и строго марковского процессов, диффузионного процесса. Здесь принимаются обозначения из [7]. Более подробные сведения по излагаемым в этом пункте вопросам можно найти в [7], [8].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Рассмотрим многообразие (фазовое пространство) $(E, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$— σ-поле борелевских множеств на E. Подробное определение случайного процесса на многообразии можно посмотреть в [8].

Введём некоторые необходимые в дальнейшем обозначения.

Определение 1. [7, с. 74] *Функция* $P(t, x, \Gamma)$ $(t > 0, x \in E, \Gamma \in \mathfrak{B})$ *называется переходной функцией, если выполнены следующие условия:*

1. *При фиксированных* t *и* x *функция* $P(t, x, \Gamma)$ *является мерой на* σ*-алгебре* $\mathfrak{B}$.
2. *При фиксированных* t *и* Γ $P(t, x, \Gamma)$ *есть* $\mathfrak{B}$*-измеримая функция точки* x.
3. $P(t, x, \Gamma) \leq 1$.
4. $P(0, x, E \setminus x) = 0$.
5. $P(s + t, x, \Gamma) = \int_E P(s, x, dy)P(t, y, \Gamma)$

Пусть μ — некоторая мера в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$.

Определение 2. [7, с. 75] *Функция $p(t,x,y)$ $(t>0, x,y \in E)$ называется переходной плотностью, если выполнены условия:*

1. $p(t,x,y) \geq 0$.
2. *При фиксированном t $p(t,x,y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$-измеримой функцией от (x,y).*
3. $\int_E p(t,x,y)\mu(dy) \leq 1$.
4. $p(s+t,x,z) = \int_E p(s,x,y)p(t,y,z)\mu(dy)$.

Легко проверить [7, с. 75], что если $p(t,x,y)$ — переходная плотность, то формула

$$P(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma p(t,x,y)dy, t>0, P(t,x,\Gamma) = \chi_\Gamma, t=0$$

определяет переходную функцию.

Со всякой переходной функцией связана сжимающая полугруппа T_t следующим образом [7, с. 80]

$$T_t f(x) = \int_E P(t,x,dy)f(y),$$

где $f \in B$, B — совокупность всех ограниченных измеримых функций с естественными линейными операциями и нормой $||f|| = \sup_{x\in E}|f(x)|$.

Определение 3. [7, с. 214]. *Инфинитезимальным оператором полугруппы T_t (переходной функции $P(t,x,\Gamma)$) будем называть оператор A, действующий по правилу*

$$Af(x) = \lim_{t\to+0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t},$$

причем область определения оператора A состоит из тех функций f, для которых предел в правой части существует.

Если на фазовом пространстве введена структура гладкого многообразия, то инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется генератором (случайного процесса) и в локальных координатах (x^i) имеет вид:

$$Af(x) = a^{ij}\partial_i\partial_j f(x) + b^i\partial_i f(x) - Cf(x),$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, a^{ij} — положительно определённая матрица.

Переходная плотность связана с генератором случайного процесса обратным уравнением Колмогорова [7, с. 238]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ap,$$

где оператор A — генератор случайного процесса, введённый выше.

В книге [7] в главах 1 и 2 показано, что со всяким марковским процессом однозначно связаны сжимающая полугруппа, переходная функция и инфинитезимальный оператор.

2. Сведения из дифференциальной геометрии

Подробное изложение теории двумерных многообразий ограниченной кривизны можно найти в книге [9] общепринятых обозначений, из которой мы будем придерживаться в этом параграфе.

Определение 4. [5, с. 74]. *Двумерную поверхность F в трёхмерном евклидовом пространстве будем называть гладкой поверхностью ограниченного искривления, если она в некоторой окрестности любой своей точки допускает параметризацию*

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2),$$

где $\vec{r}(x^1, x^2)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих переменных, меняющихся в некоторой области D на плоскости (x^1, x^2), имеющая все вторые обобщённые производные, локально суммируемые с квадратом в D, причём всюду в D $|\vec{r}_{x^1} \times \vec{r}_{x^2}| \neq 0$. Иными словами, функция $\vec{r}(x^1, x^2) \in C^1 \cap W_2^2$ внутри указанной области.

Пусть R — метрическое пространство с метрикой ρ. Если дано непрерывное отображение сегмента $0 \le t \le 1$ $(a \le t \le b)$ в пространство R, то мы говорим, что задана кривая в параметризации $X(t)$. Различным значениям t могут отвечать одинаковые точки $X(t)$. Сегмент $0 \le t \le 1$ распадается на связные компоненты k_t, каждой из которых отвечает одна и та же точка $X(t)$. Параметризации $X(t)$ и $Y(s)$ называются эквивалентными, если существует строго монотонное взаимно однозначное отображение ϕ, при котором $X(k_t) = Y(\phi(k_t))$.

Определение 5. [9, с. 6] *Кривая есть класс эквивалентных параметризаций.*

Длина кривой $X(t)$, $0 \le t \le 1$ в R может быть определена как

$$\sup \Sigma_{i=1}^{n} \rho\left(X(t_{i-1}), X(t_i)\right),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — произвольное разбиение промежутка $[0, 1]$.

Определение 6. [9, с. 7] *Метрика ρ называется внутренней, если для любых двух точек $X, Y \in R$ расстояние $\rho(X, Y)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X, Y.*

Определение 7. [9, с. 7] *Кратчайшей, соединяющей точки $X, Y \in R$, называется кривая, имеющая наименьшую длину среди всех кривых с теми же концами. Геодезической называется кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом участке.*

Определение 8. [9, с. 8] *Треугольником $T = ABC$ в пространстве R назовем фигуру, состоящую из трех заданных различных точек A, B, C (вершин треугольника) и трех попарно соединяющих их кратчайших (сторон треугольника).*

Допустим, что в пространстве R выделена открытая в R область G, которая оказалась гомеоморфной открытому кругу на плоскости. Пусть треугольник T лежит в этой области, и его стороны образуют простой замкнутый контур (т.е. они ограничивают в G область). Мы будем причислять ее к T и говорить, что T есть треугольник, гомеоморфный кругу.

Определение 9. [9, с.8] *Будем говорить, что треугольник T — гранично выпуклый, если никакие две точки его контура нельзя соединить идущей вне T кривой, более короткой, чем соединяющий эти точки участок контура.*

Определение 10. [9, с.9] *Простым треугольником (в области G) будем называть гомеоморфный кругу гранично выпуклый треугольник. Два простых треугольника называются неналегающими, если они не имеют общих внутренних точек.*

Пусть L и M — две кривые в R, исходящие из одной точки O. Пусть X и Y — переменные точки соответственно на L и на M. Построим на плоскости треугольник T_0 со сторонами $\rho(O, X)$, $\rho(O, Y)$ и $\rho(X, Y)$. Такой треугольник существует, поскольку указанные расстояния удовлетворяют неравенству треугольника. Пусть $\gamma(X, Y)$ — угол, лежащий против стороны $\rho(X, Y)$.

Определение 11. [9, с.8] *Верхним углом (углом) между кривыми L и M в точке O называется*

$$\overline{\lim_{X,Y \to O}} \gamma(X, Y) \left(\lim_{X,Y \to O} \gamma(X, Y) \right).$$

Верхним углом треугольника $T = ABC$ в вершине A будем считать верхний угол между кратчайшими AB и AC.

Определение 12. [9, с. 9] *Верхним избытком (избытком) треугольника называется величина*

$$\bar{\nu}(T) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi \left(\nu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi\right),$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}(\alpha, \beta, \gamma)$ *— верхние углы (углы) треугольника* T.

Определение 13. [9, с.8] *Метрическое пространство* R *называется двумерным многообразием ограниченной кривизны, если выполнены следующие аксиомы*

1. R *есть метрическое пространство с внутренней метрикой;*
2. *Каждая точка в* R *имеет окрестность, гомеоморфную кругу на плоскости;*
3. *Для всякой области* $G \subset R$ *с компактным замыканием существует такое число* $\nu(G)$, *что для всякой конечной совокупности попарно неналегающих простых треугольников* $T_i \subset G$
$$\Sigma_i \left|\bar{\nu}(T_i)\right| \leq \nu(G) < +\infty.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. [10, с.91] *Двумерное многообразие с внутренней метрикой имеет ограниченную кривизну тогда и только тогда, когда во всякой области* G *с компактным замыканием индуцированная в ней метрика* ρ_G *допускает равномерное приближение римановыми метриками, в которых абсолютные кривизны ограничены в совокупности.*

В работе [5, с. 83] была доказана

Теорема 2. *Всякая гладкая поверхность ограниченного искривления в смысле своей внутренней метрики есть многообразие ограниченной кривизны.*

Приведем теперь некоторые определения и результаты из работы [5].

Определение 14. [5, с.71] *Средней поверхностью* F_h *для поверхности ограниченного искривления* F *с параметризацией* $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ *называют поверхность с параметризацией*

$$\vec{r}_h(x^1, x^2) = \iint_{D - D_\delta} \vec{r}(\xi, \eta)\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta,$$

где

$$\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta = \begin{cases} \frac{1}{H_h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}, r < h \\ 0, r \geq h \end{cases},$$

$H_h = \iint_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} d\xi d\eta$, $r = \sqrt{(x^1 - \xi)^2 + (x^2 - \eta)^2}$.

Введём следующие обозначения [5, с. 102]:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} g_{12} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - g_{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right);$$

$\psi(x^1, x^2) = \frac{\Gamma_1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \cdot g_{22h}$, где индекс h внизу означает принадлежность к средней поверхности.

Пусть теперь $U_{1,\delta}$ — множество точек отрезка $[a + \delta, b - \delta]$, обладающих следующими свойствами: для $u \in U_{1,\delta}$ можно выбрать подпоследовательность F_{h_k} так, что

1. При любых $c + \delta \leq \lambda < \mu \leq d - \delta$
$$\lim_{h_k \to 0} \int_\lambda^\mu \psi_{h_k}(u, v)dv = \int_\lambda^\mu \psi(u, v)dv;$$
2. Кривая L_u[1] имеет конечный поворот в пространстве, который как функция множеств кривой L_u абсолютно непрерывен;

---

[1]Определение поворота координатной линии L_u [5, с. 99] достаточно громоздко, поэтому здесь оно не приводится.

3. Кривые L_{u,h_k} сходятся к L_u равномерно вместе со своими касательными и имеют ограниченные в совокупности повороты, которые равностепенно абсолютно непрерывны.

Теорема 3. [5, с.110] *На всякой гладкой поверхности ограниченного искривления в прямоугольнике $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$ для почти всех $x_1^1, x_2^1 \in U_{1,\delta}$ и для почти всех $x_1^2, x_2^2 \in V_{1,\delta}$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\oint_L b_{11}dx^1 + b_{12}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{12} - \Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22} dx^1 dx^2\\ \oint_L b_{12}dx^1 + b_{22}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{22}^1 b_{11} + \Gamma_{22}^2 b_{12} - \Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{21}^2 b_{22} dx^1 dx^2\end{aligned}, \tag{1}$$

где L — граница прямоугольника $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$, Γ_{ij}^k — обобщенные символы Христоффеля второго рода [5, с.85].

Теорема 4. [5, с.110] *Пусть Q — некоторое множество на поверхности ограниченного искривления F. Имеет место формула*

$$\omega(Q) = \iint_Q \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\sigma, \tag{2}$$

где $\omega(Q)$— кривизна Q, $d\sigma$ — элемент площади.

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхность ограниченного искривления положительной кривизны. Определение этого понятия для двумерного многообразия ограниченной кривизны достаточно громоздко и потому здесь не приводится. Подробную конструкцию понятия кривизны можно посмотреть в [9], глава 5. В гладком случае аналогом кривизны является гауссова кривизна и ее положительность эквивалентна положительной определённости второй основной формы поверхности.

Из положительности кривизны поверхности ограниченного искривления следует положительная определенность второй основной формы почти всюду [5], §§11, 12.

Случайный процесс Y_t, порождённый второй формой поверхности, может быть построен с помощью соответствующей формы Дирихле[1] [11, с. 19]. Эквивалентность задания процесса с помощью формы Дирихле или генератора показана там же.

3. Формулировка основного результата

Пусть на поверхности ограниченного искривления положительной отграниченной от нуля кривизны F заданы два случайных процесса X_t с генератором $A_X = g^{ij}\partial_i\partial_j$ и Y_t с генератором $A_Y = b^{ij}\partial_i\partial_j$. Переходную функцию процесса X_t обозначим $P^1(t,x,\Gamma)$, процесса Y_t — $P^2(t,x,\Gamma)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. *На всякой гладкой поверхности ограниченного искривления в прямоугольнике $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$ для почти всех $x_1^1, x_2^1 \in U_{1,\delta}$ и для почти всех $x_1^2, x_2^2 \in V_{1,\delta}$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\oint_L b_{11}dx^1 + b_{12}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{12} - \Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22} dx^1 dx^2\\ \oint_L b_{12}dx^1 + b_{22}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1x_2^1}^{x_1^2x_2^2}} \Gamma_{22}^1 b_{11} + \Gamma_{22}^2 b_{12} - \Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{21}^2 b_{22} dx^1 dx^2\end{aligned}, \tag{3}$$

где L — граница прямоугольника $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$,

$$b_{ij} = \Sigma_{k,l=1}^2 \frac{1}{|I|^2} \int P_{t0}^1(t,x,dy) \frac{y_i y_k}{1+\delta_{ik}} \int P_{t0}^1(t,x,dy) \frac{y_j y_l}{1+\delta_{jl}} \times$$

[1] Построение случайного процесса с помощью формы Дирихле весьма громоздко [11] глава 1 и здесь не приводится

$$\times \int P_{t0}^2(t,x,dy)\frac{y_k y_l}{1+\delta_{kl}},$$

$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$, $\Gamma_{ij}^l = g^{kl}\Gamma_{ij,k}$,

$$|I| = \int P_{t0}^1(t,x,dy)\,\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P_{t0}^1(t,x,dy)\,\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P_{t0}^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2,$$

и производные понимаются в смысле Соболева, индекс $t0$ означает производную по переменной t при $t=0$, $g_{ij} = \frac{1}{|I|}\int P_{t0}^1(t,x,dy)\frac{y_iy_j}{1+\delta_{ij}}$

Теорема 6. *Пусть Q — некоторое множество на поверхности ограниченного искривления F. Имеет место формула*

$$\omega(Q) = \iint_Q \frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}d\sigma, \tag{4}$$

где $\omega(Q)$— кривизна Q, $d\sigma$ — элемент площади,

$$b_{ij} = \Sigma_{k,l=1}^2\frac{1}{|I|^2}\int P_{t0}^1(t,x,dy)\frac{y_iy_k}{1+\delta_{ik}}\int P_{t0}^1(t,x,dy)\frac{y_jy_l}{1+\delta_{jl}}\times$$

$$\times \int P_{t0}^2(t,x,dy)\frac{y_k y_l}{1+\delta_{kl}},$$

$g_{ij} = \frac{1}{|I|}\int P_{t0}^1(t,x,dy)\frac{y_iy_j}{1+\delta_{ij}}$,
$|I| = \int P_{t0}^1(t,x,dy)\,\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P_{t0}^1(t,x,dy)\,\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P_{t0}^1(t,x,dy)\,y_1y_2\right]^2.$

Теорема 7. *Для того чтобы два случайных процесса X_t и Y_t однозначно определяли поверхность ограниченного искривления (с точностью до положения в пространстве), необходимо и достаточно выполнение уравнений (3), (4).*

4. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. *Контравариантные коэффициенты первой формы связаны с переходными функциями процесса X_t следующими формулами*

$$g^{11} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1(t,x,dy)\right)_{t=0}\frac{y_1^2}{2},$$

$$g^{12} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1(t,x,dy)\right)_{t=0}y_1y_2,$$

$$g^{22} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1(t,x,dy)\right)_{t=0}\frac{y_2^2}{2}.$$

Доказательство. В книге [7, с.80] выводится формула $T_tf = \int P(t,\vec{x},dy)f(y)$. По определению, инфинитезимальный оператор диффузии X_t задаётся равенством

$$A_Xf = \lim_{t\to+0}\frac{T_tf-f}{t}. \tag{5}$$

Рассмотрим подробнее равенство (5). Зафиксируем функцию f из области определения генератора. Для дважды непрерывно дифференцируемых функций f левая часть определена и непрерывна, следовательно, предел в правой части существует и равен:

$$A_Xf = \frac{d}{dt}[T_tf]_{t=0}.$$

Здесь мы воспользовались равенством $T_0 f = f$. В нашем случае генератор процесса X_t имеет вид $A_X f = g^{ij}\partial_i\partial_j f$. Выбирая в качестве функции f функцию $f = \frac{y^i y^j}{1+\delta^{ij}}$ и подставляя в последнее равенство для генератора, получим утверждение леммы:

$$g^{ij}\partial_i\partial_j f\left(x\right) = \int \frac{d}{dt}\left(P^1\left(t,x,dy\right)\right)_{t=0} f\left(y\right).$$

Отметим, что мы занесли производную под интеграл, воспользовавшись теоремой Лебега о мажорируемой сходимости [12, с.302].

□

В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначения, производную по времени в момент времени $t = 0$ будем обозначать нижним индексом $t0$

Лемма 2. *Ковариантные коэффициенты первой формы поверхности имеют вид*

$$g_{11} = \frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2},$$

$$g_{22} = \frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2},$$

$$g_{12} = -\frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)y_1 y_2,$$

где $|I| = \int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2}\cdot\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)y_1 y_2\right]^2.$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из соотношения

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j,$$

где δ_i^j— символ Кронекера. □

Лемма 3. *Контравариантные коэффициенты второй формы поверхности связаны с переходными функциями процесса Y_t соотношениями*

$$b^{11} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2},$$

$$b^{12} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right)y_1 y_2,$$

$$b^{22} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2}.$$

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 1 за единственным исключением: значения генератора A_Y на дважды непрерывно дифференцируемых функциях, вообще говоря, суммируемы с квадратом, что никак не влияет на дальнейшие рассуждения. □

Лемма 4. *Ковариантные коэффициенты второй формы поверхности имеют вид*

$$b_{ij} = \Sigma_{k,l=1}^2\frac{1}{|I|^2}\int P^1_{t0}(t,x,dy)\frac{y_i y_k}{1+\delta_{ik}}\int P^1_{t0}(t,x,dy)\frac{y_j y_l}{1+\delta_{jl}}\times$$

$$\times\int P^2_{t0}(t,x,dy)\frac{y_k y_l}{1+\delta_{kl}}.$$

Доказательство. Доказательство элементарным образом следует из известной формулы $b_{ij} = g_{ik}g_{jl}b^{kl}$ и лемм 1–3.

□

Лемма 5. *Коэффициенты Христоффеля вычисляются по формулам*

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

$$\Gamma^l_{ij} = g^{kl}\Gamma_{ij,k},$$

где производные понимаются в смысле Соболева, $g_{ij} = \frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}(t,x,dy)\frac{y_i y_j}{1+\delta_{ij}}$.

Доказательство. В работе [5, с. 86] было доказано существование символов Христоффеля для поверхности ограниченного искривления и вычисления их по указанным формулам. Результат леммы очевидным образом следует из лемм 1 –2. □

Доказательство основного результата очевидным образом следует из доказанных лемм и результатов работы [5], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климентов Д.С. *Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны* // Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. № 6, С. 24–27.
2. Климентов Д.С. *Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны* // Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. № 1. С. 15–18.
3. Рашевский П.К. *Курс дифференциальной геометрии.* ГОНТИ. 1939.
4. S. Sasaki *A global formulation of the foundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space.* // Nagoya Math J. 1958. V. 13, P. 69–82.
5. Бакельман И.Я. *Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей* // УМН. 11:2(68) (1956). С. 67–124.
6. Боровский Ю.Е. *Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения* // Сибирский математический. журнал. 1988. Т. 24. № 2. С. 10–16.
7. Дынкин Е.Б. *Марковские процессы.* М.: Физматлит. 1963.
8. Ватанабе С, Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* М.: «Наука». 1986.
9. Александров А.Д., Залгаллер В.А. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны.* Труды математического института имени В.А. Стеклова. Изд. Академии наук СССР. Москва. Ленинград. 1962.
10. Решетняк Ю.Г. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Геометрия – 4.* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 70. ВИНИТИ. М. 1989. С. 7–189.
11. M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda *Dirishlet Forms and Symmetric Markov Processes.* Walter de Gruyter. Berlin. New York. 1994.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: «Наука». 1976.

Дмитрий Сергеевич Климентов
Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета,
ул. Мильчакова, 8а,
344000, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: dklimentov75@gmail.com