ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 14-28.

УДК 517.9

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И СИММЕТРИЙНЫЕ РЕДУКЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ТРЕХМЕРНОГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Р.К. ГАЗИЗОВ, А.А. КАСАТКИН, С.Ю. ЛУКАЩУК

Аннотация. Работа посвящена изучению симметрийных свойств нелинейного трехмерного уравнения аномальной диффузии с дробной производной Римана-Лиувилля по времени. Для исследования применены методы современного группового анализа дифференциальных уравнений. Решена задача групповой классификации по коэффициенту диффузии, рассматриваемому как функция зависимой переменной. Показано, что для произвольной функции уравнение допускает семимерную алгебру Ли инфинитезимальных операторов, соответствующих группам переносов, вращений и растяжений. В отличие от симметрий уравнения с с производной целого порядка, не допускается преобразование переноса по времени. Кроме того, различаются коэффициенты группы растяжений. В случае степенной формы коэффициента допускаемая алгебра расширяется до восьмимерной дополнительным оператором группы растяжений. При двух конкретных значениях показателя степени алгебра расширяется до девятимерной либо одиннадцатимерной, при этом дополнительные допускаемые операторы соответствуют различным проективным преобразованиям. Для полученных алгебр Ли симметрий размерности от семи до девяти построены оптимальные системы подалгебр и выписаны анзацы соответствующих инвариантных решений различных рангов. Приведены общие формы записи инвариантных решений, удобные для симметрийной редукции при наличии дробной производной Римана-Лиувилля. Проведена симметрийная редукция на подалгебрах, позволяющих находить инвариантные решения ранга один. Приведены соответствующие обыкновенные дробно-дифференциальные редуцированные уравнения.

Ключевые слова: производные дробного порядка, симметрийная редукция, оптимальная система подалгебр, дробно-дифференциальное нелинейное уравнение диффузии.

Mathematics Subject Classification: 35R11, 35B06, 76M60

1. Введение

Многие современные математические модели для описания эффектов памяти или нелокальных взаимодействий в рассматриваемой среде применяют аппарат дробного интегро-дифференцирования [1–3]. В частности, производные дробного порядка могут при определенных условиях оказаться применимы для моделей фильтрации в почве или сложных коллекторах нефтегазовых месторождений. Многие из рассматриваемых моделей, как классических, так и дробно-дифференциальных, содержат существенные нелинейности в

R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, Group classification and symmetry reduction of three-dimensional nonlinear anomalous diffusion equation.

Работа поддержана проектом №1.3103.2017/4.6 государственного задания Минобрнауки РФ.
Поступила 18 ноября 2019 г.

уравнениях [4, 5]. Для уравнений с дробными производными практически все существующие методы решения нелинейных уравнений являются численными или приближенными аналитическими. Одним из наиболее развитых направлений исследования нелинейных уравнений является исследование их симметрийных свойств [6, 7]. Данные методы могут быть адаптированы и для исследования уравнений с производными дробного порядка (см., например, обзорную работу [8]).

В данной работе рассматривается трехмерное уравнение аномальной диффузии с производной дробного порядка по времени вида

$$ {}_0D_t^\alpha u = (k(u)u_x)_x + (k(u)u_y)_y + (k(u)u_z)_z, \quad \alpha \in (0,1)\cup(1,2). \tag{1}$$

В частности, такое уравнение может быть получено при рассмотрении фильтрации в пористой среде с модифицированным законом Дарси [9].

Производная дробного порядка типа Римана-Лиувилля определяется соотношением

$$ {}_aD_t^\alpha u(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_a^t \frac{y(w,\mathbf{x})}{(t-w)^{\alpha+1-m}}dt, \quad m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Для уравнения (1) решается задача групповой классификации по функции $k(u)$. В предельном случае $\alpha = 1$, в силу ${}_0D_t^1 u = u_t$, это уравнение превращается в классическое нелинейное уравнение теплопроводности, результаты групповой классификации которого хорошо известны [10] (см. также [11]). Результаты групповой классификации одномерного случая уравнения (1) с симметрийными редукциями приведены в [12]. В данной работе рассматриваются только нелинейные уравнения, $k'(u) \neq 0$. Симметрийные свойства и законы сохранения уравнения (1) рассматривались в работе [13], однако значительная часть полученных там результатов неверна, и задача групповой классификации (1) остается актуальной.

Для полученных алгебр Ли симметрий размерности от семи до девяти в работе построены оптимальные системы подалгебр и определены подстановки для построения инвариантных решений. Рассмотрены случаи симметрийной редукции для инвариантных решений ранга 1.

2. Групповая классификация нелинейного изотропного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии

Задача групповой классификации для уравнения (1) решается с точностью до преобразований эквивалентности [6, 7], которые находятся аналогично симметриям [14] и имеют вид

$$\bar t = \delta^2 t, \quad \bar x = \gamma x + \beta_1, \quad \bar y = \gamma y + \beta_2, \quad \bar z = \gamma z + \beta_3, \quad \bar u = \rho u, \quad \bar k = \gamma^2\delta^{-2\alpha}k, \tag{3}$$

где β_1, β_2, β_3, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Отметим одну важную особенность: в отличие от классического уравнения теплопроводности, преобразования эквивалентности дробного аналога не содержат преобразования переноса по переменной u.

Симметрии уравнения (1) задаются инфинитезимальными операторами

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3\frac{\partial}{\partial z} + \eta\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

и ищутся в линейно-автономном виде [8, 15]:

$$\begin{gathered} \tau = C_1 t + C_2 t^2, \quad \xi^1 = \theta^1(x,y,z), \quad \xi^2 = \theta^2(x,y,z), \quad \xi^3 = \theta^3(x,y,z), \\ \eta = \eta_{(0)} + \eta_{(1)}u, \quad \eta_{(0)} = \psi(t,x,y,z), \quad \eta_{(1)} = \varphi(x,y,z) + (\alpha-1)C_2 t, \end{gathered} \tag{5}$$

при этом применяется формула продолжения на производные дробного порядка.

Определяющее уравнение для функций θ^i $(i=1,2,3)$, φ и ψ принимает вид

$$\begin{aligned}{}_0D_t^\alpha(\psi)+[\varphi-\alpha C_1-(1+\alpha)C_2t]\,[(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})k+(u_x^2+u_y^2+u_z^2)k']-\\ -(\zeta_{11}+\zeta_{22}+\zeta_{33})k-2(\zeta_1u_x+\zeta_2u_y+\zeta_3u_z)k'-\\ -[\psi+(\varphi+(\alpha-1)C_2t)u][(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})k'+(u_x^2+u_y^2+u_z^2)k'']=0,\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
&\zeta_1=\psi_x+\varphi_xu+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-\theta^1_x)u_x-\theta^2_xu_y-\theta^3_xu_z,\\
&\zeta_2=\psi_y+\varphi_yu-\theta^1_yu_x+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-\theta^2_y)u_y-\theta^3_yu_z,\\
&\zeta_3=\psi_z+\varphi_zu-\theta^1_zu_x-\theta^2_zu_y+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-\theta^3_z)u_z,\\
&\zeta_{11}=\psi_{xx}+\varphi_{xx}u+(2\varphi_x-\theta^1_{xx})u_x-\theta^2_{xx}u_y-\theta^3_{xx}u_z+\\
&\qquad\qquad+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-2\theta^1_x)u_{xx}-2\theta^2_xu_{xy}-2\theta^3_xu_{xz},\\
&\zeta_{22}=\psi_{yy}+\varphi_{yy}u-\theta^1_{yy}u_x+(2\varphi_y-\theta^2_{yy})u_y-\theta^3_{yy}u_z-\\
&\qquad\qquad-2\theta^1_yu_{xy}+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-2\theta^2_y)u_{yy}-2\theta^3_yu_{yz},\\
&\zeta_{33}=\psi_{zz}+\varphi_{zz}u-\theta^1_{zz}u_x-\theta^2_{zz}u_y+(2\varphi_z-\theta^2_{zz})u_z-\\
&\qquad\qquad-2\theta^1_zu_{xz}-2\theta^2_zu_{yz}+(\varphi+(\alpha-1)C_2t-2\theta^3_z)u_{zz}.
\end{aligned}$$

Расщепление (6) по u_{xx}, u_{yy} и u_{zz} приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\psi+(\alpha-1)C_2tu+\varphi u+[\alpha(C_1+2C_2t)-2\theta^1_x]K(u)=0,\\
&\psi+(\alpha-1)C_2tu+\varphi u+[\alpha(C_1+2C_2t)-2\theta^2_y]K(u)=0,\\
&\psi+(\alpha-1)C_2tu+\varphi u+[\alpha(C_1+2C_2t)-2\theta^3_z]K(u)=0,
\end{aligned} \quad (7)$$

где $K(u)=k(u)/k'(u)$. Дифференцирование этих уравнений по u приводит к классифицирующему соотношению $K''=0$, которое оказывается идентично классифицирующему соотношению для классического уравнения теплопроводности [6]. В результате, с точностью до преобразований эквивалентности (3), выделяются следующие случаи $k(u)\neq const$:

I. $k(u)$ — произвольная функция,

II. $k(u)=e^u$,

III. $k(u)=(u+B)^\sigma$, $\sigma\neq0$.

Для случая I из (7) находим

$$C_2=0,\quad \varphi=0,\quad \psi=0,\quad \theta^1_x=\theta^2_y=\theta^3_z=\frac{\alpha}{2}C_1. \quad (8)$$

Для случая II имеем

$$C_2=0,\quad \varphi=0,\quad \theta^1_x=\theta^2_y=\theta^3_z=\frac{\alpha}{2}(\alpha C_1+\psi). \quad (9)$$

Из рассмотрения случая III получаем уравнения

$$\sigma\psi=B(\sigma\varphi-2\alpha C_2t),\qquad \theta^1_x=\theta^2_y=\theta^3_z=\frac{\alpha}{2}(\alpha C_1+\psi), \quad (10)$$

при этом $C_2\neq0$ только при $\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$.

Расщепление (6) по смешанным производным u_{xy}, u_{xz} и u_{yz} приводит к уравнениям

$$\theta^2_x+\theta^1_y=0,\quad \theta^3_x+\theta^1_z=0,\quad \theta^3_y+\theta^2_z=0. \quad (11)$$

Расщепление по u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_xu_y, u_xu_z, u_yu_z приводит к дифференциальным следствиям уже полученных уравнений.

Расщепление по u_x, u_y, u_z дает

$$\begin{aligned}
&K(u)(2\varphi_x-\theta^1_{xx}-\theta^1_{yy}-\theta^1_{zz})+2(\psi_x+\varphi_xu)=0,\\
&K(u)(2\varphi_y-\theta^2_{xx}-\theta^2_{yy}-\theta^2_{zz})+2(\psi_y+\varphi_yu)=0,\\
&K(u)(2\varphi_z-\theta^3_{xx}-\theta^3_{yy}-\theta^3_{zz})+2(\psi_z+\varphi_zu)=0.
\end{aligned} \quad (12)$$

Оставшееся после расщепления уравнение имеет вид

$${}_0D_t^\alpha\psi=(\psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{zz})k+(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz})uk. \quad (13)$$

Для завершения групповой классификации находится решение системы полученных уравнений (8)–(13). При этом непосредственными вычислениями доказывается, что случай II не приводит к расширению допускаемой уравнением (1) группы точечных преобразований, а в случае III группа расширяется только при $B = 0$, причем выделяется еще один частный случай $k(u) = u^{-\frac{4}{5}}$. Полученные результаты формулируются в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Нелинейное* ($k'(u) \neq 0$) *уравнение* (1) *в случае произвольной функции* $k(u)$ *обладает семимерной алгеброй Ли точечных симметрий с базисом*

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_5 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \;\; X_6 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \\ X_7 = \frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}. \end{gathered} \tag{14}$$

Для степенной зависимости $k(u) = u^\sigma$ ($\sigma \neq 0$) *алгебра расширяется до восьмимерной оператором*

$$X_8 = u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sigma}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}. \tag{15}$$

При этом в частном случае $\sigma = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ *происходит дополнительное расширение алгебры до девятимерной с оператором*

$$X_9 = t^2\frac{\partial}{\partial t} - (1-\alpha)tu\frac{\partial}{\partial u}, \tag{16}$$

а в случае $\sigma = -\frac{4}{5}$ *— до одиннадцатимерной с операторами*

$$\begin{aligned} X_9 &= (y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y} - 2xz\frac{\partial}{\partial z} + 5xu\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{10} &= (x^2 + z^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} - 2xy\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z} + 5yu\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{11} &= (x^2 + y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial z} - 2xz\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial y} + 5zu\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{17}$$

Других случаев расширения алгебры Ли симметрий рассматриваемое нелинейное уравнение не имеет.

Сравнение результатов проведенной классификации с результатами классификации классического трехмерного нелинейного уравнения теплопроводности [6] показывает, что они очень близки. Наличие производной дробного порядка лишь изменяет коэффициенты в операторах растяжения X_7, X_8. Однако размерность допускаемой алгебры Ли симметрий у дробно-дифференциального уравнения оказывается на единицу меньше, поскольку не допускается преобразование переноса по времени. При этом выделяется случай, когда допускается оператор проективной группы (16), который не допускается классическим уравнением теплопроводности.

3. Оптимальная система подалгебр алгебры Ли симметрий

Для систематического исследования инвариантных решений уравнения диффузии (1) необходимо построить для допускаемой алгебры Ли операторов оптимальную систему подалгебр. Это позволяет исключить из рассмотрения эквивалентные случаи, т.е. сводящиеся друг к другу с помощью допускаемых уравнением преобразований. Каждая симметрия уравнения порождает внутренний автоморфизм алгебры Ли допускаемых операторов.

Оптимальная система является набором представителей из каждого класса сводящихся друг к другу автоморфизмами подалгебр.

Рассмотрим построение оптимальной системы подалгебр для алгебры Ли L_9 с базисом $X_1, \dots, X_9$. Воспользуемся двухшаговым алгоритмом, предложенным в работе [16] (см. также [7]), который основан на использовании структуры алгебры. Для трехмерного нелинейного уравнения диффузии целого порядка со степенным коэффициентом в работе [17] построена оптимальная система для близкой алгебры, но напрямую использовать результат не удается.

Коммутаторы для алгебры L_9 приведены в табл. 1.

Таблица 1: Таблица коммутаторов

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1	0	0	0	0	$-X_3$	X_2	X_1	0	0
X_2	0	0	0	X_3	0	$-X_1$	X_2	0	0
X_3	0	0	0	$-X_2$	X_1	0	X_3	0	0
X_4	0	$-X_3$	X_2	0	$-X_6$	X_5	0	0	0
X_5	X_3	0	$-X_1$	X_6	0	$-X_4$	0	0	0
X_6	$-X_2$	X_1	0	$-X_5$	X_4	0	0	0	0
X_7	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	0	0	$\dfrac{2}{\alpha}X_9$
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dfrac{2}{\alpha-1}X_9$
X_9	0	0	0	0	0	0	$-\dfrac{2}{\alpha}X_9$	$\dfrac{2}{1-\alpha}X_9$	0

Легко видеть, что алгебра L_7 с базисом $X_1, \dots, X_7$ представима в виде полупрямой суммы подалгебры L_4 и абелева идеала J_3:

$$L_7 = L_4 \dot{\oplus} J_3, \quad L_4 = \{X_4, X_5, X_6, X_7\}, \quad J_3 = \{X_1, X_2, X_3\}.$$

В случае степенного вида коэффициента $k(u) = u^\beta$, алгебра допускаемых операторов расширяется до L_8:

$$L_8 = L_7 \oplus \{X_8\},$$

причем одномерная подалгебра $\{X_8\}$ является центром L_8. И, наконец, при $\sigma = 2\alpha/(1-\alpha)$, к допускаемой алгебре добавляется оператор X_9, порождающий ее одномерный идеал:

$$L_9 = L_8 \dot{\oplus} \{X_9\}.$$

Каждый из операторов $X_i \in L$ порождает внутренний автоморфизм A_i исследуемой алгебры L. Его можно построить как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{X}}{da} = [X_i, \bar{X}], \quad \bar{X}\big|_{a=0} = X_i, \tag{18}$$

при этом неизвестными являются преобразования коэффициентов оператора $\bar{k}_i(a)$ в исходном базисе: $\bar{X} = \sum_{j=1}^{9} \bar{k}_j(a) X_j, \quad \bar{k}_j(0) = k_j$.

Внутренние автоморфизмы удобно записать сразу для самой широкой алгебры Ли L_9 (для краткости приведем только изменяющиеся коэффициенты):

$A_1 : \bar{k}_1 = k_1 + a_1 k_7, \quad \bar{k}_2 = k_2 + a_1 k_6, \quad \bar{k}_3 = k_3 - a_1 k_5,$

$A_2 : \bar{k}_1 = k_1 - a_1 k_6, \quad \bar{k}_2 = k_2 + a_2 k_7, \quad \bar{k}_3 = k_3 + a_2 k_4,$

$A_3 : \bar{k}_1 = k_1 + a_3 k_5, \quad \bar{k}_2 = k_2 - a_3 k_4, \quad \bar{k}_3 = k_3 + a_3 k_7,$

$A_4 : \bar{k}_{23} = O_1 k_{23}, \quad \bar{k}_{56} = O_1 k_{56},$

$A_5 : \bar{k}_{13} = O_2 k_{13}, \quad \bar{k}_{46} = O_2 k_{46},$

$A_6 : \bar{k}_{12} = O_3 k_{12}, \quad \bar{k}_{45} = O_3 k_{45}$

$A_7 : \bar{k}_1 = a_7 k_1, \quad \bar{k}_2 = a_7 k_2, \quad \bar{k}_3 = a_7 k_3, \quad k_9 = \left(\dfrac{1}{a_7^2}\right)^{1/\alpha}, \ a_7 \neq 0,$

$A_8 : \bar{k}_9 = a_8 k_9, \quad a_8 > 0,$

$A_9 : \bar{k}_9 = k_9 + \left(\dfrac{2}{1-\alpha} k_8 - \dfrac{2}{\alpha} k_7\right) a_9.$

В $A_4 - A_6$ приняты обозначения вектора коэффициентов и матрицы вращения:

$k_{ij} = (k_i, k_j)^T, \quad O_i = \begin{pmatrix} cos(a_i) & sin(a_i) \\ -sin(a_i) & cos(a_i) \end{pmatrix}.$

При построении оптимальной системы подалгебр для целей симметрийной редукции, к группе внутренних автоморфизмов добавляются дискретные автоморфизмы, порожденные отражением осей координат $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$ (в результате снимается исходное ограничение $a_7 > 0$ в A_7), однако замена $t \to -t$ изменяет область интегрирования и потому не допускается.

Оптимальная система подалгебр строится с использованием классических алгоритмов [7, 16], детально проиллюстрированных в [17] (координаты базиса записываются в виде матрицы и максимально упрощаются внутренними автоморфизмами, линейными преобразованиями строк и проверкой условий подалгебры).

Оптимальная система $\Theta(L_4)$ известна [18] (и легко строится):

$$\begin{aligned} &\Theta_1(L_4): \quad 1.1:\ X_4, \quad 1.2:\ X_7, \quad 1.3: X_4 + \gamma X_7, \quad \gamma > 0,\\ &\Theta_2(L_4): \quad \text{нет двумерных подалгебр},\\ &\Theta_3(L_4): \quad 3.1:\ X_4, X_5, X_6,\\ &\Theta_4(L_4): \quad 4.1:\ X_4, X_5, X_6, X_7. \end{aligned} \tag{19}$$

Для уменьшения произвола в выборе представителей обычно накладывают требование нормализованности: вместе с подалгеброй $K \in \Theta(L)$ в оптимальную систему должен входить ее нормализатор $\mathrm{Nor}_L K$ – наибольшая подалгебра в L, для которой K является идеалом.

Во многих случаях удобно использовать для построения инвариантных решений цилиндрическую и сферическую систему координат. Здесь и далее

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \varphi : r\cos\varphi = y, r\sin\varphi = z.$$

В табл. 2 приведена построенная оптимальная система подалгебр $\Theta(L_7)$, для каждой подалгебры указана общая форма инвариантного решения уравнения (1), полученная из инвариантов подалгебры (в случае, когда инварианты содержат u).

Таблица 2: Оптимальная система $\Theta(L_7)$

№	Подалгебра	Проекция в L_4	$\mathrm{Nor}_{L_7} K$	Форма инвариантного решения
1.1	4	-	3.7	$v(t, x, y^2 + z^2)$
1.2	7	-	4.1	$v(tx^{-2/\alpha}, ty^{-2/\alpha}, tz^{-2/\alpha})$
1.3	$4 + \gamma 7$	-	2.1	$v\left(\gamma\varphi - \ln(r), tx^{-2/\alpha}, \frac{r}{x}\right)$
1.4	1	0	5.1	$v(t, y, z)$
1.5	$1 + 4$	1.1	2.1	$v(x - \varphi, y^2 + z^2, t)$
2.1	$4, 7$	-	2.1	$v\left(tx^{-2/\alpha}, \frac{r}{x}\right)$
2.2	$2, 3$	0	5.1	$v(t, x)$
2.3	$1, 4$	1.1	3.7	$v(t, r)$
2.4	$1, 7$	1.2	3.7	$v(ty^{-2/\alpha}, z/y)$
2.5	$1, 4 + \gamma 7$	1.3	3.7	$v(tr^{-2/\alpha}, \gamma\varphi - \ln r)$

3.1	$4, 5, 6$	-	4.1	$v(t, R)$
3.2	$1, 2, 3$	0	7.1	$v(t)$
3.3	$1 + 4, 2, 3$	1.1	4.2	$v(t)$
3.4	$2, 3, 4$	1.1	5.1	$v(t, x)$
3.5	$2, 3, 7$	1.2	4.5	$v(tx^{-2/\alpha})$
3.6	$2, 3, 4 + \gamma 7$	1.3	4.5	$v(tx^{-2/\alpha})$
3.7	$1, 4, 7$	2.1	3.7	$v(tr^{-2/\alpha})$
4.1	$4, 5, 6, 7$	-	4.1	$v\left(tR^{-2/\alpha}\right)$
4.2	$1, 2, 3, 4$	1.1	5.1	$v(t)$
4.3	$1, 2, 3, 7$	1.2	7.1	c
4.4	$1, 2, 3, 4 + \gamma 7$	1.3	5.1	c
4.5	$2, 3, 4, 7$	2.1	4.5	$v(tx^{-2/\alpha})$
5.1	$1, 2, 3, 4, 7$	2.1	5.1	c
6.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6$	3.1	7.1	$v(t)$
7.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$	4.1	7.1	c

Используется сокращенная форма записи: $\{X_1, X_2, X_3, X_4 + \gamma X_7\}$ обозначается как $1, 2, 3, 4 + \gamma 7$. Также вводятся произвольные постоянные $\gamma > 0, \lambda \neq 0, \mu \in R$.

Оптимальная система $\Theta_k(L_8)$ включает подалгебры двух типов: все элементы $\Theta_{k-1}(L_7)$, дополненные оператором X_8, а также подалгебры, построенные из $\Theta_k(L_7)$ добавлением слагаемых с X_8 к каждому оператору (с последующим упрощением и проверкой условий подалгебры). В табл. 3 приведены дополнительные элементы $\Theta(L_8)$ по сравнению с $\Theta(L_7)$.

Таблица 3: Оптимальная система $\Theta(L_8)$ как расширение $\Theta(L_7)$

№	Подалгебра	Проекция в L_7	$\mathrm{Nor}_{L_8} K$	Форма инвариантного решения
1.6	8	0	8.1	$t^{-\alpha/\sigma} v(x, y, z)$
1.7	$4 + \gamma 8$	1.1	4.12	$e^{\gamma\varphi} v(te^{\sigma\gamma\varphi/\alpha}, x, y^2 + z^2)$
1.8	$7 + \lambda 8$	1.2	5.2	$x^\lambda v\left(tx^{(\sigma\lambda-2)/\alpha}, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$
1.9	$4 + \gamma 7 + \mu 8$	1.3	3.8	$x^{\frac{\mu}{\gamma}} v\left(te^{\frac{\sigma\mu-2\gamma}{\alpha}\varphi}, \frac{r}{x}, \gamma\varphi - \ln x\right)$
1.10	$1 + 8$	1.4	5.3	$t^{-\alpha/\sigma} v(te^{\sigma x/\alpha}, y, z)$
1.11	$1 + 4 + \gamma 8$	1.5	3.10	$e^{\gamma\varphi} v(te^{\sigma\gamma\varphi/\alpha}, x - \varphi, y^2 + z^2)$
2.6	$4, 8$	1.1	4.12	$t^{-\alpha/\sigma} v\left(x, y^2 + z^2\right)$
2.7	$7, 8$	1.2	5.2	$t^{-\alpha/\sigma} x^{2/\sigma} v\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$
2.8	$4 + \gamma 7, 8$	1.3	3.8	$t^{-\alpha/\sigma} x^{2/\sigma} v\left(\gamma\varphi - \ln(r), \frac{r}{x}\right)$
2.9	$1, 8$	1.4	6.2	$t^{-\alpha/\sigma} v(y, z)$
2.10	$1 + 4, 8$	1.5	3.10	$t^{-\alpha/\sigma} v(r, x - \varphi)$
2.11	$4, 7 + \lambda 8$	2.1	3.8	$x^\lambda\, v\left(tx^{\frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}}, \frac{r}{x}\right)$
2.12	$4 + \gamma 8, 7 + \mu 8$	2.1	3.8	$x^\mu e^{\gamma\varphi}\, v\left(tx^{\frac{\mu\sigma-2}{\alpha}} e^{\frac{\gamma\sigma\phi}{\alpha}}, \frac{r}{x}\right)$
2.13	$2 + 8, 3$	2.2	4.7	$e^y\, v\left(te^{\frac{\sigma}{\alpha}y}, x\right)$
2.14	$1, 4 + \gamma 8$	2.3	4.12	$e^{\gamma\varphi}\, v\left(te^{\frac{\gamma\sigma}{\alpha}\varphi}, r\right)$
2.15	$1 + 8, 4 + \gamma 8$	2.3	3.10	$e^{x+\gamma\varphi}\, v\left(te^{\frac{\sigma}{\alpha}(x+\gamma\varphi)}, r\right)$
2.16	$1, 7 + \lambda 8$	2.4	4.12	$y^\lambda\, v\left(ty^{\frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}}, z/y\right)$
2.17	$1, 4 + \gamma 7 + \lambda 8$	2.5	4.12	$r^{\lambda/\gamma}\, v\left(tr^{\frac{\lambda\sigma-2\gamma}{\alpha\gamma}}, \gamma\varphi - \ln r\right)$
3.8	$4, 7, 8$	2.1	3.8	$x^{2/\sigma} t^{-\alpha/\sigma} v\left(\frac{r}{x}\right)$
3.9	$2, 3, 8$	2.2	6.2	$t^{-\alpha/\sigma} v(x)$

3.10	$1, 4, 8$	2.3	4.12	$t^{-\alpha/\sigma}v(r)$
3.11	$1, 7, 8$	2.4	4.12	$t^{-\alpha/\sigma}y^{2/\sigma}v(z/y)$
3.12	$1, 4+\gamma 7, 8$	2.5	4.12	$t^{-\alpha/\sigma}r^{2/\sigma}v(\gamma\varphi - \ln r)$
3.13	$1+8, 2, 3$	3.2	5.3	$e^{x}v\left(te^{\frac{\sigma x}{\alpha}}\right)$
3.14	$1+4+\gamma 8, 2, 3$	3.3	5.3	$e^{\gamma x}v\left(te^{\frac{\gamma\sigma x}{\alpha}}\right)$
3.15	$2, 3, 4+\gamma 8$	3.4	6.2	$t^{-\alpha/\sigma}v(x)$
3.16	$2, 3, 7+\lambda 8$	3.5	5.6	$x^{\lambda}v\left(tx^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}}\right)$
3.17	$2, 3, 4+\gamma 7+\lambda 8$	3.6	5.6	$x^{\lambda/\gamma}\, v\left(tx^{\frac{\sigma\lambda-2\gamma}{\alpha\gamma}}\right)$
3.18	$1, 4, 7+\lambda 8$	3.7	4.12	$r^{\lambda}\, v\left(tr^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}}\right)$
3.19	$1, 4+\gamma 8, 7+\mu 8$	3.7	4.12	$e^{\gamma\phi}r^{\mu}v\left(tr^{\frac{\sigma\mu-2}{\alpha}}e^{\frac{\gamma\sigma\varphi}{\alpha}}\right)$
4.6	$4, 5, 6, 8$	3.1	5.2	$t^{-\alpha/\sigma}v(R)$
4.7	$1, 2, 3, 8$	3.2	8.1	$ct^{-\alpha/\sigma}$
4.8	$1+4, 2, 3, 8$	3.3	5.3	$ct^{-\alpha/\sigma}$
4.9	$2, 3, 4, 8$	3.4	6.2	$t^{-\alpha/\sigma}v(x)$
4.10	$2, 3, 7, 8$	3.5	5.6	$ct^{-\alpha/\sigma}x^{2/\sigma}$
4.11	$2, 3, 4+\gamma 7, 8$	3.6	5.6	$ct^{-\alpha/\sigma}x^{2/\sigma}$
4.12	$1, 4, 7, 8$	3.7	4.12	$ct^{-\alpha/\sigma}r^{2/\sigma}$
4.13	$4, 5, 6, 7+\lambda 8$	3.8	5.2	$R^{\lambda}v(tR^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}})$
4.14	$1, 2, 3, 4+\gamma 8$	4.1	6.2	$ct^{-\alpha/\sigma}$
4.15	$1+8, 2, 3, 4+\gamma 8$	4.2	5.3	$ct^{-\alpha/\sigma}$
4.16	$1, 2, 3, 7+\lambda 8$	4.3	8.1	$ct^{\alpha\lambda/(2-\sigma\lambda)}$
4.17	$1, 2, 3, 4+\gamma 7+\lambda 8$	4.4	6.2	$ct^{\alpha\lambda/(2\gamma-\sigma\lambda)}$
4.18	$2, 3, 4, 7+\lambda 8$	4.5	5.6	$x^{\lambda}v\left(tx^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}}\right)$
4.19	$2, 3, 4+\gamma 8, 7+\mu 8$	4.5	5.6	$ct^{-\alpha/\sigma}x^{2/\sigma}$
5.2	$4, 5, 6, 7, 8$	4.1	5.2	$ct^{-\alpha/\sigma}R^{2/\sigma}$
5.3	$1, 2, 3, 4, 8$	4.2	6.2	$ct^{-\alpha/\sigma}$
5.4	$1, 2, 3, 7, 8$	4.3	8.1	—
5.5	$1, 2, 3, 4+\gamma 7, 8$	4.4	6.2	—
5.6	$2, 3, 4, 7, 8$	4.5	5.6	$ct^{-\alpha/\sigma}x^{2/\sigma}$
5.7	$1, 2, 3, 4, 7+\lambda 8$	4.6	6.2	$ct^{\alpha\lambda/(2-\sigma\lambda)}$
5.8	$1, 2, 3, 4+\gamma 8, 7+\mu 8$	4.7	6.2	—
6.2	$1, 2, 3, 4, 7, 8$	5.1	6.2	—
7.2	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$	6.1	8.1	$ct^{-\alpha/\sigma}$
7.3	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7+\lambda 8$	7.1	8.1	$ct^{\alpha\lambda/(2-\sigma\lambda)}$
8.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	7.1	8.1	—

Оптимальная система $\Theta_k(L_9)$ строится аналогично. Отметим, что X_9 соответствует идеалу, но не центру алгебры (как X_8). В результате, слагаемое k_9X_9 в одном из базисных инфинитезимальных операторов можно исключить внутренним автоморфизмом A_9 при выполнении условий

$$k_7^2 + k_8^2 \neq 0, \quad k_8 \neq \frac{1-\alpha}{\alpha}k_7.$$

В табл. 4 перечислены подалгебры $\Theta(L_9)$ до размерности 4, не входящие в $\Theta(L_8)$.

Таблица 4: Оптимальная система $\Theta(L_9)$ как расширение $\Theta(L_8)$

№	Подалгебра	Форма инвариантного решения
1.12	9	$t^{\alpha-1}v(x,y,z)$
1.13	$4+9$	$t^{\alpha-1}v\left(x,r,\frac{t}{1+\varphi t}\right)$
1.14	$7+\lambda 8$	$t^{\alpha-1}v\left(y,z,\frac{t}{1+tx}\right)$
1.15	$1+4+9$	$t^{\alpha-1}v\left(r,x-\varphi,\frac{t}{1+\varphi t}\right)$
1.16	$7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(xe^{\pm\frac{1}{t}},ye^{\pm\frac{1}{t}},ze^{\pm\frac{1}{t}}\right)$
1.17	$4+\gamma 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma 8\pm 9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(\frac{t}{1\pm t\gamma^{-1}\ln x},\gamma\varphi-\ln x,\frac{r}{x}\right)$
2.18	$4,9$	$t^{\alpha-1}v(x,r)$
2.19	$7,9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}v\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$
2.20	$4+g7,9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}v\left(\gamma\varphi-\ln x,\frac{r}{x}\right)$
2.21	$1,9$	$t^{\alpha-1}v(y,z)$
2.22	$1+4,9$	$t^{\alpha-1}v(r,x-\varphi)$
2.23	$8,9$	—
2.24	$4+\gamma 8,9$	$t^{\alpha-1}e^{-\gamma\varphi}v(x,r)$
2.25	$7+\lambda 8,9$	$t^{\alpha-1}x^{2/\alpha-2-\lambda}v\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$
2.26	$4+\gamma 7+\lambda 8,9$	$t^{\alpha-1}x^{2/\alpha-2-\lambda/\gamma}v\left(\frac{r}{x},\gamma\varphi-\ln x\right)$
2.27	$1+8,9$	$t^{\alpha-1}e^{-x}v\left(y,z\right)$
2.28	$1+4+\gamma 8,9$	$t^{\alpha-1}e^{-\gamma x}v\left(r,x-\varphi\right)$
2.29	$2+9,3$	$t^{\alpha-1}v\left(x,\frac{t}{1+ty}\right)$
2.30	$1,4+9$	$t^{\alpha-1}v\left(r,\frac{t}{1+t\varphi}\right)$
2.31	$1+9,4$	$t^{\alpha-1}v\left(r,\frac{t}{1+tx}\right)$
2.32	$1+9,4+9$	$t^{\alpha-1}v\left(r,\frac{t}{1+t(x+\varphi)}\right)$
2.33	$4,7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(\frac{t}{1\pm t\ln r},\frac{t}{1\pm t\ln x},\right)$
2.34	$4+9,7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8+\mu 9$	$t^{\alpha-1}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(\frac{r}{x},\frac{t}{1+t(\varphi+\mu\ln x)},\right)$
2.35	$1,7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$t^{\alpha-1}r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(\varphi,\frac{t}{1\pm t\ln r}\right)$
2.36	$1+9,7+\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}8$	$t^{\alpha-1}r^{\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha}}v\left(\varphi,\frac{tr}{1+tx}\right)$
2.37	$1,4+\gamma 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma 8\pm 9$	$t^{\alpha-1}r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}v\left(\frac{t}{1\pm t\gamma^{-1}\ln r},\gamma\varphi-\ln r\right)$
2.38	$1+9,4+\gamma 7+\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}\gamma 8$	$t^{\alpha-1}r^{\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha}}v\left(\frac{tr}{1+tx},\gamma\varphi-\ln r\right)$
3.21	$2,3,9$	$t^{\alpha-1}v(x)$
3.22	$1,4,9$	$t^{\alpha-1}v(r)$
3.23	$1,7,9$	$t^{\alpha-1}y^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}v(z/y)$
3.24	$1,4+\gamma 7,9$	$t^{\alpha-1}r^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}v(\gamma\varphi-\ln r)$
3.25	$4,8,9$	—
3.26	$7,8,9$	—
3.27	$4+\gamma 7,8,9$	—
3.28	$1,8,9$	—
3.29	$1+4,8,9$	—
3.30	$4,7+\lambda 8,9$	$t^{\alpha-1}x^{2/\alpha-2-\lambda}\,v\left(r/x\right)$
3.31	$4+\gamma 8,7+\mu 8,9$	$t^{\alpha-1}e^{-\gamma\varphi}x^{2/\alpha-2-\mu}\,v\left(r/x\right)$
3.32	$2+8,3,9$	$t^{\alpha-1}e^{-y}\,v\left(x\right)$
3.33	$1,4+\gamma 8,9$	$t^{\alpha-1}e^{-\gamma\varphi}\,v\left(r\right)$

3.34	$1+8, 4+\gamma 8, 9$	$t^{\alpha-1}e^{-x-\gamma\varphi}\, v\,(r)$
3.35	$1, 7+\lambda 8, 9$	$t^{\alpha-1}y^{2/\alpha-2-\lambda}\, v\,(z/y)$
3.36	$1, 4+\gamma 7+\lambda 8, 9$	$t^{\alpha-1}r^{2/\alpha-2-\lambda/\gamma}\, v\,(\gamma\varphi-\ln r)$
3.37	$1+9, 2, 3$	$H^{\alpha-1}v(t/H), H=1+tx$
3.38	$1+4+9, 2, 3$	$H^{\alpha-1}v(t/H), H=1+tx$
3.39	$2, 3, 4+9$	$t^{\alpha-1}v(x)$
3.40	$2, 3, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\,(t/H)\,, H=1\pm t\ln x$
3.41	$2+9, 3, 7+\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}8$	$x^{(1-\alpha)(2+\alpha)/(2\alpha)}H^{\alpha-1}v\,(tx/H)\,, H=1+ty$
3.42	$2, 3, 4+\gamma 7+\gamma\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm\gamma 9$	$x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\,(t/H)\,, H=1\pm t\ln x$
3.43	$1, 4, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v(t/H), H=1\pm t\ln r$
3.44:	$1, 4+9, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8+\mu 9$	$r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\,(t/H)\,,\ H=1+(\mu\ln r+\varphi)t$
3.45	$1+9, 4, 7+\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}8$	$r^{(1-\alpha)(2+\alpha)/(2\alpha)}H^{\alpha-1}v\,(tr/H)\,, H=1+tx$
4.20	$4, 5, 6, 9$	$t^{\alpha-1}v(R)$
4.21	$1, 2, 3, 9$	$ct^{\alpha-1}$
4.22	$1+4, 2, 3, 9$	$ct^{\alpha-1}$
4.23	$2, 3, 4, 9$	$ct^{\alpha-1}$
4.24	$2, 3, 7, 9$	$ct^{\alpha-1}x^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$
4.25	$2, 3, 4+\gamma 7, 9$	$ct^{\alpha-1}x^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$
4.26	$1, 4, 7, 9$	$ct^{\alpha-1}r^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$
4.27	$4, 7, 8, 9$	—
4.28	$2, 3, 8, 9$	—
4.29	$1, 4, 8, 9$	—
4.30	$1, 7, 8, 9$	—
4.31	$1, 4+\gamma 7, 8, 9$	—
4.32	$1+8, 2, 3, 9$	$ct^{\alpha-1}e^{-x}$
4.33	$1+4+\gamma 8, 2, 3, 9$	$ct^{\alpha-1}e^{-\gamma x}$
4.34	$2, 3, 4+\gamma 8, 9$	—
4.35	$2, 3, 7+\lambda 8, 9$	$ct^{\alpha-1}x^{2/\alpha-2-\lambda}$
4.36	$2, 3, 4+\gamma 7+\lambda 8, 9$	$ct^{\alpha-1}x^{2/\alpha-2-\lambda/\gamma}$
4.37	$1, 4, 7+\lambda 8, 9$	$ct^{\alpha-1}r^{2/\alpha-2-\lambda}$
4.38	$1, 4+\gamma 8, 7+\mu 8, 9$	$ct^{\alpha-1}r^{2/\alpha-2-\mu}e^{-\gamma\varphi}$
4.39	$1, 2, 3, 4+9$	$ct^{\alpha-1}$
4.40	$1+9, 2, 3, 4+9$	$ct^{\alpha-1}$
4.41	$1+9, 2, 3, 4+9$	$ct^{\alpha-1}$
4.42	$4, 5, 6, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$R^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\,(t/H)\,, H=1\pm t\ln R$
4.43	$1, 2, 3, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$ct^{\alpha-1}e^{\pm\frac{\alpha-1}{\alpha t}}$
4.44	$1+9, 2, 3, 7+\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}8$	$ct^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\alpha}}(1+tx)^{\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha}}$
4.45	$1, 2, 3, 4+\gamma 7+\gamma\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm\gamma 9$	$ct^{\alpha-1}e^{\pm\frac{\alpha-1}{\alpha t}}$
4.46	$1+9, 2, 3,$ $4+\gamma 7+\gamma\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2\alpha}8$	$ct^{\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{2\alpha}}(1+tx)^{\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha}}$
4.47	$2, 3, 4, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8\pm 9$	$x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\,(t/H)\,, H=1\pm t\ln x$
4.48	$2, 3, 4+\gamma 9, 7+\frac{1-\alpha}{\alpha}8+\mu 9$	$ct^{\alpha-1}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

4. Симметрийные редукции

Подалгебры малых размерностей (до трех) позволяют строить только инвариантные решения рангов два и три, т.е. сводить уравнение к уравнению в частных производных с меньшим числом переменных. Разрешение таких уравнений представляет собой сложную задачу и в данной работе не рассматривается.

В качестве иллюстрации, выполним симметрийную редукцию на подалгебре 2.1 $\{X_4, X_7\}$. Тогда соответствующая подстановка

$$u = v(\tau, p), \quad \tau = tx^{-2/\alpha}, \quad p = \frac{y^2 + z^2}{x^2}$$

даже в простейшее линейное уравнение $D_t^\alpha u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ приводит к достаточно сложному, хотя и линейному редуцированному уравнению на $v(\tau, p)$:

$$D_\tau^\alpha u = 4p(p+1)v_{pp} + (6p+4)v_p + 8\alpha^{-1}\tau p v_{\tau p} + 4\alpha^{-2}\tau^2 v_{\tau\tau} + 2\tau\alpha^{-1}(1 + 2\alpha^{-1})v_\tau.$$

Далее будут рассматриваться инвариантные решения ранга 1, для которых симметрийная редукция приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с целыми или дробными производными.

При осуществлении симметрийной редукции для подалгебр из $\Theta(L_7), \Theta(L_8)$ наиболее часто встречается форма инвариантного решения

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x})v(\tau), \quad \tau = tg(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T. \tag{20}$$

Тогда с помощью замены переменных в интеграле (2) легко получить соотношение

$$D_t^\alpha u = h(\mathbf{x})g^\alpha(\mathbf{x})D_\tau^\alpha v(\tau). \tag{21}$$

В частном случае

$$u(\mathbf{x}, t) = v(\tau), \quad \tau = tg(\mathbf{x}), \tag{22}$$

после подстановки в (1), с учетом (20), имеем форму редуцированного уравнения

$$g^\alpha D_\tau^\alpha v = \frac{|\nabla g|^2}{g^2}(fv'' + f'(v')^2)\tau^2 + \frac{\Delta g}{g} f v' \tau.$$

Отметим, что использование других эквивалентных форм инвариантного решения может привести к наличию в редуцированных уравнениях дробных производных другого вида. Например, если выбрать форму $u = v(t^{-\alpha/2}x)$ вместо $u = v(tx^{-2/\alpha})$, в результирующем уравнении будут присутствовать операторы типа Эрдейи-Кобера [8, 19, 20].

Многие подалгебры оптимальной системы приводят к одной и той же форме решения в силу совпадения инвариантов.

Возникающие при построении инвариантных решений ранга 1 уравнения приведены в табл. 5.

Таблица 5: Результаты симметрийной редукции для подалгебр $\Theta(L_7)$ (случай произвольной функции $k(u)$)

Подалгебры	Подстановка	Редуцированное уравнение
$3.2, 3.3, 4.2, 6.1$	$v(t)$	$D_t^\alpha v = 0, \quad v = ct^{\alpha-1}$
$3.5, 3.6, 4.5$	$v(tx^{-2/\alpha})$	$D_\tau^\alpha v = \dfrac{4}{\alpha^2}\tau^2\left(kv'' + (v')^2k'\right) + \dfrac{2(\alpha+2)}{\alpha^2}\tau k v'$
3.7	$v(tr^{-2/\alpha})$	$D_\tau^\alpha v = \dfrac{4}{\alpha^2}\tau^2(kv'' + (v')^2k') + \dfrac{4}{\alpha^2}\tau k v'$
4.1	$v(tR^{-2/\alpha})$	$D_\tau^\alpha v = \dfrac{4}{\alpha^2}\tau^2(kv'' + (v')^2k') + \dfrac{2(2-\alpha)}{\alpha^2}\tau k v'$

Для уравнения со степенным коэффициентом существуют дополнительные варианты редуцированных уравнений, приведенные в табл. 6.

Таблица 6: Результаты симметрийной редукции для подалгебр $\Theta(L_8)$ $(k(u) = u^\sigma)$

№	Подстановка	Редуцированное уравнение
3.8	$x^{2/\sigma} t^{-\alpha/\sigma} v\left(r/x\right)$	$(\tau^2+1)\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + \left(\frac{1}{\tau} - 2\tau\left(1+\frac{2}{\sigma}\right)\right) v^\sigma v' +$ $+\frac{2}{\sigma}\left(1+\frac{2}{\sigma}\right) v^{\sigma+1} - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v = 0$
3.9, 3.15, 4.9	$t^{-\alpha/\sigma} v(x)$	$\sigma(v')^2 + vv'' - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v^{2-\sigma} = 0$
3.10	$t^{-\alpha/\sigma} v(r)$	$v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2 + \frac{1}{r} v^\sigma v' - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v = 0$
3.11	$t^{-\alpha/\sigma} y^{2/\sigma} v(z/y)$	$\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) - \left(1+\frac{2}{\sigma}\right)\frac{2}{\tau} v^\sigma v' +$ $+\frac{2}{\sigma}\left(1+\frac{2}{\sigma}\right) v^{\sigma+1} - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v = 0$
3.12	$t^{-\alpha/\sigma} r^{2/\sigma} v(h)$ $h = \gamma\varphi - \ln r$	$(\gamma^2+1)\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) -$ $-\frac{4(\sigma+1)}{\sigma^2}\left(\sigma v^\sigma v' - v^{\sigma+1}\right) - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v = 0$
3.13	$e^x v\left(te^{\sigma x/\alpha}\right)$	$D_\tau^\alpha v = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\tau^2(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2) +$ $+\frac{\sigma}{\alpha^2}(2\alpha(\sigma+1)+\sigma)\tau v^\sigma v' + (\sigma+1)v^{\sigma+1}$
3.14	$e^{\gamma x} v\left(te^{\gamma\sigma x/\alpha}\right)$	$D_\tau^\alpha v = \frac{\sigma^2\gamma^2}{\alpha^2}\tau^2(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2) +$ $+\frac{\sigma\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha(\sigma+1)+\sigma)\tau v^\sigma v' + (\sigma+1)\gamma^2 v^{\sigma+1}$
3.16, 4.18	$x^\lambda v\left(tx^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}}\right)$	$D_\tau^\alpha v = \frac{(\sigma\lambda-2)^2}{\alpha^2}\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) +$ $+\frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\left(2\lambda(\sigma+1) - 1 + \frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\right)\tau v^\sigma v' + \lambda^2(\sigma+1-\lambda^{-1})v^{\sigma+1}$
3.17	$x^{\lambda/\gamma}\, v\left(tx^{\frac{\sigma\lambda-2\gamma}{\alpha\gamma}}\right)$	$D_\tau^\alpha v = \frac{(\sigma\lambda-2\gamma)^2}{\alpha^2\gamma^2}\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) +$ $+\frac{\lambda\sigma-2\gamma}{\alpha\gamma^2}\left(2\lambda(\sigma+1) - \gamma + \frac{\lambda\sigma-2\gamma}{\alpha}\right)\tau v^\sigma v' + \frac{\lambda^2}{\gamma^2}(\sigma+1-\gamma/\lambda)v^{\sigma+1}$
3.18	$r^\lambda\, v\left(tr^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}}\right)$	$D_\tau^\alpha v = \frac{(\sigma\lambda-2)^2}{\alpha^2}\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) +$ $+\frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\left(2\lambda(\sigma+1) + \frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\right)\tau v^\sigma v' + \lambda^2(\sigma+1)v^{\sigma+1}$
3.19	$e^{\gamma\phi} r^\mu v\left(th\right)$ $h = r^{\frac{\sigma\mu-2}{\alpha}} e^{\frac{\gamma\sigma\varphi}{\alpha}}$	$D_\tau^\alpha v = \frac{(\sigma\mu-2)^2+\gamma^2\sigma^2}{\alpha^2}\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + (\gamma^2+\mu^2)(\sigma+1)v^{\sigma+1}$ $+\frac{1}{\alpha^2}\left((\gamma^2+\mu^2)(2\alpha\sigma+2\alpha+\sigma)\sigma + 4 - 4\mu(\alpha\sigma+\alpha+\sigma)\right)\tau v^\sigma v'$
4.6	$t^{-\alpha/\sigma} v(R)$	$\sigma(v')^2 + vv'' + 2vv'/R - \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)} v^{2-\sigma} = 0$
4.13	$R^\lambda v(tR^{\frac{\sigma\lambda-2}{\alpha}})$	$D_\tau^\alpha v = \frac{(\sigma\lambda-2)^2}{\alpha^2}\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) +$ $+\frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\left(2\lambda(\sigma+1) + 1 + \frac{\lambda\sigma-2}{\alpha}\right)\tau v^\sigma v' + \lambda^2(\sigma+1+\lambda^{-1})v^{\sigma+1}$

Заметим, что всем подалгебрам, содержащим оператор X_8, соответствуют решения вида $u = t^{-\alpha/\sigma} v(h(x,y,z))$, которые приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям без дробных производных после редукции. Как показано в [12], многие из таких уравнений интегрируемы в квадратурах.

Все подалгебры, содержащие подалгебру 2.2 (операторы X_2, X_3), порождают инвариантные решения одномерного нелинейного уравнения аномальной диффузии. К таковым, например, относятся $3.2-3.6, 3.9, 3.13-3.17$. Редуцированные уравнения в этих случаях совпадают с полученными в работе [12].

Легко заметить, что и в остальных случаях редуцированное уравнение для инвариантных решений ранга 1 имеет вид, аналогичный [12]:

$$D_\tau^\alpha v = A(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2) + B\tau v^\sigma v' + Cv^{\sigma+1}, \tag{23}$$

кроме случаев сведения к уравнениям без производной дробного порядка.

Перейдем к использованию подалгебр $\Theta(L_9)$, не входящих в $\Theta(L_8)$. Они позволяют строить новые инвариантные решения при $k(u) = u^\sigma,\ \sigma = 2\alpha/(1-\alpha)$.

Если такая подалгебра содержит X_9 как базисный оператор (3.21-3.36, 4.20-4.38), один из инвариантов принимает вид $ut^{\alpha-1}$, и мы получаем аналог стационарного решения $t^{\alpha-1}v(x,y,z)$, для которого левая часть уравнения обращается в 0. Во всех прочих случаях для осуществления симметрийной редукции комбинированием инвариантов подалгебры удается выбрать форму инвариантного решения

$$u(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x})(1+tg(\mathbf{x}))^{\alpha-1}v(\tau), \quad \tau = \frac{t\lambda(\mathbf{x})}{1+tg(\mathbf{x})}$$

и далее использовать соотношения

$$D_t^\alpha u = \mu(\mathbf{x})\lambda^\alpha(\mathbf{x})(1+tg(\mathbf{x}))^{-1-\alpha}D_\tau^\alpha v(\tau),$$
$$D_t^\alpha u = \mu(\mathbf{x})\lambda^{-1}(\mathbf{x})(\lambda(\mathbf{x})-\tau g(\mathbf{x}))^{1+\alpha}D_\tau^\alpha v(\tau),$$

полученные с помощью замены переменных в интеграле (2).

Таблица 7: Результаты симметрийной редукции для подалгебр $\Theta(L_9)$, за исключением решений вида $t^{\alpha-1}v(\mathbf{x})$ $(k(u) = u^\sigma, \sigma = 2\alpha/(1-\alpha))$

№	Форма решения и редуцированное уравнение
3.37, 3.38	$H^{\alpha-1}v(t/H), H = 1+tx$ $D_\tau^\alpha v = \tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + 2(\alpha+2)\tau^3 v^\sigma v' + (1-\alpha)(\alpha+2)\tau^2 v^{\sigma+1}$
3.40, 3.42, 4.47	$x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\left(t/H)\right), \quad H = 1 \pm t\ln x$ $D_\tau^\alpha v = \tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + (\alpha+2)(2\tau - 1/\alpha)\tau^2 v^\sigma v' +$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}((\alpha+2)\alpha\tau(\alpha\tau-1)+1)v^{\sigma+1}$
3.41	$x^{(1-\alpha)(2+\alpha)/(2\alpha)}H^{\alpha-1}v\left(tx/H\right), H = 1+ty$ $D_\tau^\alpha v = \tau^2(\tau^2+1)\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + (\alpha+2)(2\tau^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha})\tau^2 v^\sigma v' +$ $+\frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(4\alpha^2\tau^2 + \alpha^2 + \alpha + 2)v^{\sigma+1}$
3.43	$r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v(t/H), \quad H = 1 \pm t\ln r$ $D_\tau^\alpha v = \tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + 2\left((\alpha+2)\tau \mp \frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\tau^2 v^\sigma v' +$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}((\alpha+2)\alpha^2\tau^2 \mp 2(\alpha+1)\alpha\tau + \alpha + 1)v^{\sigma+1}$
3.44	$r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\left(t/H\right), \quad H = 1 + (\mu\ln r + \varphi)t$ $D_\tau^\alpha v = (\mu^2+1)\tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + 2\left((\mu^2+1)(\alpha+2)\tau - \mu\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\tau^2 v^\sigma v' +$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}((\mu^2+1)(\alpha+2)\alpha^2\tau^2 - 2\mu(\alpha+1)\alpha\tau + \alpha + 1)v^{\sigma+1}$
3.45	$r^{(1-\alpha)(2+\alpha)/(2\alpha)}H^{\alpha-1}v\left(tr/H\right), \quad H = 1+tx$ $D_\tau^\alpha v = \tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + \frac{1}{\alpha}(2\alpha(\alpha+2)\tau^2 + \alpha^2 + 4\alpha + 2)\tau v^\sigma v' +$ $+\frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{4\alpha^2}(4\alpha^2\tau^2 + (\alpha+1)(\alpha+2))v^{\sigma+1}$
4.42	$R^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}H^{\alpha-1}v\left(t/H\right), \quad H = 1 \pm t\ln R$ $D_\tau^\alpha v = \tau^4\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + \left(2(\alpha+2)\tau \mp \frac{3\alpha+2}{\alpha}\right)\tau^2 v^\sigma v' +$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}((\alpha+2)\alpha^2\tau^2 \mp (3\alpha+2)\alpha\tau + 2\alpha + 1)v^{\sigma+1}$

Подалгебры 3.37–3.40, 3.42, 4.47 описывают решения, не зависящие от y, z, редуцированные уравнения совпадают с полученными в [12].

Отметим, что все редуцированные уравнения табл. 7 имеют вид

$$D_\tau^\alpha v = (A\tau^2 + B)\tau^2\left(v^\sigma v'' + \sigma v^{\sigma-1}(v')^2\right) + (C\tau^2 + D\tau + E)\tau v^\sigma v' + (F\tau^2 + G\tau + H)v^{\sigma+1}.$$

Инвариантные решения ранга 0 строятся на основе подалгебр размерности 4 и более. В соответствии с табл. 2,3,4, абсолютное большинство таких решений имеет степенной вид. Они также соответствуют степенным точным решениям редуцированных уравнений для решений ранга 1.

Заключение

Проведенная в данной работе групповая классификация и процедура симметрийной редукции иллюстрирует применимость классических алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений для систематического исследования нелинейных уравнений с производными дробного порядка и несколькими независимыми переменными. Результаты согласуются с ранее полученными для одномерной модели.

Построенные оптимальные системы подалгебр и формы инвариантных решений могут оказаться пригодными и для других трехмерных моделей с производными дробного порядка.

Основных сложностей построения редуцированных уравнений (изменения пределов и типа оператора дробного дифференцирования) удается избежать путем выбора подходящей формы инвариантного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
2. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam. 2006.
3. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: «Артишок». 2008. 512 с.
4. L. Caffarelli, J.L. Vazquez *Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 2011. V. 202. № 2. P. 537–565.
5. Płociniczak Ł. *Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 24. Issues 1–3. P. 169–183.
6. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М. : Наука. 1978. 400 с.
7. Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2012. 659 с.
8. R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, S. Yu. Lukashchuk *Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs.* In Anatoly Kochubei, Yuri Luchko (Eds.), Fractional Differential Equations (pp. 353–382). Berlin, Boston: De Gruyter. 2019.
9. Газизов Р. К., Лукащук С. Ю. *Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах* // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21. №4 (78). С. 104–112
10. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. *Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 7. С. 1215–1223.
11. N. H. Ibragimov *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.1. Symmetries, exact solutions and conservation laws.* CRC Press Inc., Boca Raton, Florida. 1994. 430 p.
12. Лукащук С. Ю. *Симметрийная редукция и инвариантные решения нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с источником* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, № 4. С. 114–126.
13. E. Lashkarian, S. R. Hejazi, E. Dastranj *Conservation laws of (3+α)-dimensional time-fractional diffusion equation // Computers & Mathematics with Applications.* 2018. Vol. 75. №3. P. 740–754.
14. S. Y. Lukashchuk, A. V. Makunin *Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term* // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 57. P. 335–343.
15. Лукащук С. Ю. *Об одном классе систем дробно-дифференциальных уравнений с симметриями только линейно-автономного вида* // Сб. тезисов международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 134-136.
16. Овсянников Л. В. *Об оптимальных системах подалгебр* // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.

17. Ильясов А. М. *Оптимальная система подалгебр алгебры Ли точечной группы симметрии нелинейного уравнения теплопроводности без источника.* Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 54–66.
18. J. Patera, P. Winternitz *Subalgebras of real three-and four-dimensional Lie algebras* // Journal of Mathematical Physics. 1977. V. 18. № 7. С. 1449-1455.
19. E. Buckwar, Y. Luchko *Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1998. Т. 227. — №. 1. P. 81–97.
20. R. Sahadevan, T. Bakkyaraj *Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations* // Journal of mathematical analysis and applications. 2012. Т. 393. №. 2. С. 341–347.

Рафаил Кавыевич Газизов,
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `gazizovrk@gmail.com`

Алексей Александрович Касаткин,
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kasatkin@ugatu.su`

Станислав Юрьевич Лукащук,
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `lsu@ugatu.su`