ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 29-34.

УДК 517.547

О ПРИЛОЖЕНИЯХ СУММАРНОГО УРАВНЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОМ

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

Аннотация. Пусть D – произвольный четырехугольник. Рассматриваем заданное на нем линейное суммарное четырехэлементное уравнение в классе решений, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Их граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте, не содержащем вершин. В вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Свободный член голоморфен в D, и его граничное значение удовлетворяет условию Гёльдера. Он не обязан быть аналитически продолжимым через какой-либо отрезок границы, т.е. решение и свободный член принадлежат разным классам голоморфных функций. Для регуляризации данного уравнения на границе четырехугольника вводится кусочно-линейный сдвиг Карлемана, отображающий каждую сторону в себя с изменением ориентации. Этот сдвиг разрывен в вершинах и имеет неподвижные точки в серединах сторон. Решение представимо в виде интеграла типа Коши по границе с неизвестной плотностью, инвариантной относительно сдвига на одной паре соседних сторон и антиинвариантной на другой. Показано, что регуляризация является равносильной. В некоторых частных случаях полученное уравнение Фредгольма разрешимо. В качестве примера взят некоторый четырехугольник, у которого один из углов развернутый. Строится система целых функций вполне регулярного роста, биортогональная с кусочно квазиполиномиальным весом системе степеней на трех лучах.

Ключевые слова: равносильная регуляризация, биортогональные системы аналитических функций, проблема моментов для целых функций экспоненциального типа.

Mathematics Subject Classification: 30Exx: 30E05, 30E20, 30E25

1. Введение

Пусть D – четырехугольник с вершинами t_j, $j=\overline{1,4}$ и сторонами ℓ_j, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma=\partial D$ $\left(\{t_1,t_2\}\subset\bar{\ell}_1\right)$. Преобразования

$$\sigma_j(z)=t_j+t_{j+1}-z \ \ (t_5\equiv t_1) \tag{1}$$

переводят D в четырехугольники, имеющие с ним общую сторону. Рассмотрим уравнение

$$\left(Vf\right)(z)\equiv\sum_{j=1}^{4}\lambda_j f\left[\sigma_j(z)\right]=g(z),\ z\in D \tag{2}$$

при следующих предположениях:
1) $\forall j\ \lambda_j\neq 0$. Поэтому считаем, что $\lambda_1=1$.
2) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D, и его граничное значение $g^+(t)\in H(\Gamma)$.

F.N. Garif'yanov, E.V. Strezhneva, On applications of summary equation induced by quadrilateral.

Поступила 8 января 2019 г.

3) Решение ищется в классе функций $f(z)$, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Кроме того, $\forall j$ $f^-(t) \in H(\ell_j)$, а в вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

Такой класс решений обозначим через B. По поводу его выбора более подробно см. введение в [1]. Здесь заметим только, что нетривиальность уравнения (2) следует из несвязности множества $C \setminus \cup\sigma_j(D)$, $j = \overline{1,4}$. Решение и свободный член принадлежат разным классам голоморфных функций, причем последний не обязан быть аналитически продолжимым через какой-либо отрезок границы.

Впервые уравнение (2) было полностью исследовано в статье [1] в том частном случае, когда $\lambda_j = (-1)^{j+1}$, а D – некоторая равнобедренная трапеция. При том же выборе коэффициентов в статье [2] был предложен метод равносильной регуляризации уравнения (2) в случае произвольного четырехугольника и полностью исследован еще один частный случай, когда D – некоторый четырехугольник, один из углов которого развернутый. В статье [3] был предложен метод регуляризации уравнения (2), когда $\forall j$ $\lambda_j = 1$. В двух указанных выше частных случаях было проведено полное его исследование. Сравнение полученных результатов показало, что картина разрешимости существенно зависит от подбора коэффициентов. Цель данной работы — исследование уравнения (2) в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ и применение полученных результатов к интерполяционным задачам для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Работа состоит из четырех разделов.

Первый раздел – введение.

Во втором разделе проведена равносильная регуляризация уравнения (2).

В третьем разделе полностью исследовано это уравнение, когда D – четырехугольник с вершинами $t_1 = 2^{-1} - i$, $t_2 = 2^{-1}$, $t_3 = 2^{-1} + i$, $t_4 = -2^{-1}$, ранее рассмотренный в статьях [2] и [3].

В четвертом разделе уравнение (2) интерпретируется в терминах ц.ф.э.т. как степенная проблема моментов Стильтьеса на трех лучах с кусочно-экспоненциальным весом. Построены биортогональные на Γ системы аналитических функций, индуцированные этим уравнением.

2. Регуляризация задачи

Будем искать решение уравнения (2) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau - z)^{-1}\varphi(\tau)d\tau,\ z \notin \overline{D} \tag{3}$$

с неизвестной плотностью $\varphi \in H(\ell_j)$, $j = \overline{1,4}$. Ясно, что $\forall j$ $\sigma_j(t) : \vec{\ell_j} \to \vec{\ell_j}$ с изменением ориентации, т.е. кусочно-линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t),\ t \in \ell_j\}$ является на Γ обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах. Середина сторон – это неподвижные точки сдвига.

Введем кусочно-постоянную функцию $\theta_t = \{1, t \in \ell_1 \cup \ell_2; -1, t \in \ell_3 \cup \ell_4\}$ и инволютивный оператор $W : \varphi(t) \to \theta_t\ \varphi[\alpha(t)]$. Заметим, что плотность интеграла типа Коши (3) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$. За счет подбора этого слагаемого без ограничения общности считаем, что

$$W\varphi = \varphi. \tag{4}$$

Действительно, соотношение (4) интерпретируем как задачу Карлемана

$$a^+ - Wa^+ = W\varphi - \varphi.$$

Она безусловно разрешима, что устанавливается сведением ее к задаче Римана методом локально-конформного склеивания [4]. Тогда

$$(2) \Leftrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} N(\tau+z)d\tau = g(z),\ z\in D, \tag{5}$$

где

$$N(\beta)=\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\left(\beta+a_j\right)^{-1},\quad a_j=-\left(t_j+t_{j+1}\right).$$

Справедлив аналог формулы Сохоцкого-Племеля

$$\left(A^{+}\phi\right)(t) = -2^{-1}\left(W\varphi\right)(t)+\left(A\varphi\right)(t),\quad t\in\Gamma, \tag{6}$$

причем особый интегральный оператор $(A\varphi)(t)$ получается формальной заменой $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Возьмем от обеих частей равенства (6) оператор W и заменим в особом интеграле переменную τ на $\alpha(\tau)$ с учетом (4), изменением ориентации и условия $\alpha'(\tau) = -1$, $\tau \neq t_j$ а затем сложим полученное соотношение с исходным. Пришли к уравнению

$$T\varphi = g^{+} + Wg^{+}, \tag{7}$$

где $T = -I + A + WAW$, а I – тождественный оператор. Введем банахово пространство $\widetilde{C}(\Gamma)$ – множество функций $\varphi(t) \in C\left(\bar{\ell}_j\right)$, $j=\overline{1,4}$ с нормой

$$M = max\left|\varphi(t)\right|,\ t\in\Gamma \tag{8}$$

Лемма 1. *Операторы A и W с точностью до компактного слагаемого антикоммутируют в $\widetilde{C}(\Gamma)$, т.е. (7) интегральное уравнение Фредгольма второго рода.*

Доказательство сводится к непосредственной проверке ограниченности ядра

$$K(t,\tau) = N(\tau+t) + \theta_\tau\theta_t N[\alpha(\tau)+\alpha(t)] \tag{9}$$

при различных вариантах взаимного расположения точек τ и t на сторонах Γ.

Теорема 1. *Уравнение (2) имеет не более чем конечное число условий разрешимости, являющихся условиями разрешимости интегрального уравнения (7).*

Доказательство. В случае разрешимости уравнения (7) обязательно имеет решение со свойством (4). По этому поводу см. [5]. Тогда (7) $\Rightarrow$ (2), поскольку однородная задача Карлемана $a^{+} = -Wa^{+}$ в силу указанного принципа локально-конформного склеивания имеет лишь тривиальное решение. □

Замечание 1. *Рассматриваемый здесь набор коэффициентов уравнения (2) является последним из трех, при которых его можно регуляризировать предложенным в [1] методом. Случай $\lambda_1=\lambda_4=1$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$ ничем существенно от него не отличается.*

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$T\varphi = 0. \tag{10}$$

Его фундаментальную систему решений (ф.с.р.) можно выбрать так, что каждая входящая туда функция удовлетворяет либо уcлловию (4), либо (см. [5]) противоположному условию

$$\varphi = -W\varphi. \tag{11}$$

Ясно, что $K(t,\tau) = K(\tau,t)$. Функции со свойством (11) автоматически ортогональны правой части неоднородного уравнения (7).

Действительно, $b(t) = -b[\alpha(t)] \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} b(t)dt = 0$.

3. Полное исследование одного частного случая

Пусть D – четырехугольник с вершинами $t_1 = 2^{-1} - i$, $t_2 = 2^{-1}$, $t_3 = 2^{-1} + i$, $t_4 = -2^{-1}$.

Лемма 2. *Ф.с.р. уравнения (10) не содержит функций со свойством (4).*

Доказательство. Предположим противное. Оценим модуль интегрального слагаемого в уравнении (10). В силу симметрии Γ и выбора коэффициентов задачи (2) достаточно рассмотреть всего два случая.

I. Равенство (8) достигается при $t \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(t) = 1 - i - t$, $\theta_t = 1$. Введем для краткости обозначения $u = \tau + t$ и $b_j(t) = \left| \int\limits_{\ell_j} \varphi(\tau) K(t,\tau) d\tau \right|$. Возможны четыре подслучая

a) $\tau \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 - i - \tau$, $\theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = (u - 1 - i)^{-1} - (u + i)^{-1} - - (u - i)^{-1} - (u - 1 + 3i)^{-1} + (u - 2 + 3i)^{-1} \Rightarrow b_1(t) < 2,41M$.

b) $\tau \in \ell_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 + i - \tau$, $\theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = (u - 2 - i)^{-1} + (u - 2 + i)^{-1} - - (u + i)^{-1} - (u - i)^{-1} \Rightarrow b_2(t) < 2,42M$.

c) $\tau \in \ell_3 \Rightarrow \alpha(\tau) = i - \tau$, $\theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = 0$.

d) $\tau \in \ell_4 \Rightarrow \alpha(\tau) = -i - \tau$, $\theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u - 1 - i)^{-1} - (u - i)^{-1} + + (u + 3i)^{-1} - (u - 1 + 3i)^{-1} \Rightarrow b_4(t) < 0,67\sqrt{2}M$.

Поскольку $2,41 + 2,42 + 0,67 \cdot \sqrt{2} < 2\pi$, то $\varphi \equiv 0$.

II. Равенство (8) достигается при $t \in \ell_3 \Rightarrow \alpha(t) = i - t$, $\theta_t = -1$. Возможны четыре подслучая.

a) $\tau \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 - i - \tau$, $\theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = 0$.

b) $\tau \in \ell_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 + i - \tau$, $\theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = (u - 1 + i)^{-1} - (u + i)^{-1} + + (u - 3i)^{-1} - (u - 3i - 1)^{-1} \Rightarrow b_2(t) < 0,67M$.

c) $\tau \in \ell_3 \Rightarrow \alpha(\tau) = i - \tau$, $\theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u - 1 + i)^{-1} + (u - 1 - i)^{-1} - - (u + i)^{-1} - (u + 1 - 3i)^{-1} - (u + 1 - i)^{-1} + (u - 3i)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow b_3(t) < 2,41 \cdot \sqrt{2}M$.

d) $\tau \in \ell_4 \Rightarrow \alpha(\tau) = -i - \tau$, $\theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u - 1 + i)^{-1} + (u - 1 - i)^{-1} - - (u + 1 - i)^{-1} - (u + 1 + i)^{-1} \Rightarrow b_4(t) < 2,46\sqrt{2}M$.

Последняя оценка не позволяет доказать утверждение леммы, поэтому воспользуемся условием (4). Введем в подслучае d) вместо ядра (9) новое ядро $K_1(t,\tau) = 2^{-1}\left(K(t,\tau) - K(t, -i - \tau)\right)$ и тогда $\left| \int\limits_{\ell_4} \varphi(\tau) K_1(t,\tau) \right| \leq 0,8 \cdot \sqrt{2}M$. Поскольку $0,67 + 2,41\sqrt{2} + 0,8\sqrt{2} < 2\pi$, то $\varphi \equiv 0$, что и завершает доказательство. □

Следствие 1. *Ф.с.р. уравнения (10) может содержать только функции со свойством (11).*

Теорема 2. *Однородное уравнение $(Vf)(z) = 0$, $z \in D$ имеет лишь тривиальное решение. Неоднородное уравнение (2) безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

Замечание 2. *Можно показать, что теорема 2 остается справедливой и в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. При этом ф.с.р. соответствующем однородного уравнения Фредгольма пуста. Доказательство не приводим ввиду его громоздкости, а также того обстоятельства, что нигде далее это не используется.*

4. Приложения к проблеме моментов

Перейдем к приложениям уравнения (2). Интерпретируем множество D как сопряженную индикаторную диаграмму ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхней функции), ассоциированной по Борелю ([6], §1, п.1) с нижней функцией $f(z) \in B$. Тогда

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{2} \int_{0}^{\infty} F(x) \exp(-x\sigma_j(z))dx - \sum_{j=3}^{4} \int_{L_j} F(\tau) \exp(-\tau\sigma_j(z))d\tau = g(z), z \in D, \qquad (12)$$

где L_3 – луч $\arg \tau = 5\pi/4$, L_4 – луч $\arg \tau = 3\pi/4$. Приравнивая коэффициенты Маклорена в левой и правой частях соотношения (12), имеем

$$E\left[F(t), t^k\right] \equiv \sum_{j=1}^{2} \int_{0}^{\infty} F(x)x^k \exp(a_j t)dt - \sum_{j=3}^{4} \int_{L_j} F(t)t^k \exp(a_j t)dt = g^{(k)}(0),$$

$$a_j = -(t_j + t_{j+1}),\ k = \overline{0, \infty}$$

Последнюю задачу можно трактовать как обобщение известных проблем Стилтьеса и Гамбургера на случай трех лучей с кусочно-квазиполиноминальным весом.

Замечание 3. *Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой ц.ф.э.т. $F(z)$ является некоторое «меньшее» выпуклое множество $D_1 \subset D$, возможен, но малоинтересен. Тогда соотношение (2) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. оно переопределено. Для этого необходимо (но не достаточно), чтобы свободный член был аналитически продолжим через некоторый отрезок Γ в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Более подробно см. замечание 1 в* [2].

Теорема 3. *Степенная проблема моментов $E\left[F(t), t^k\right] = \beta_k$, $k = \overline{0, \infty}$ в классе ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$, безусловно разрешима и имеет единственное решение при условии, что сумма ряда*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k z^k}{k!} \qquad (13)$$

голоморфна в D и $g^+(t) \in H(\Gamma)$.

Замечание 4. *Условия теоремы заведомо выполнены, если степенной ряд (13) имеет радиус сходимости $R > \sqrt{5}/2$, что легко проверяется.*

Пусть $g_m(z) = z^m/m!$. Рассмотрим систему функций

$$\{f_m(z)\} : (V f_m)(z) = g_m(z),\ z \in D,\ m = \overline{0, \infty}. \qquad (14)$$

Соответствующая система верхних функций $\{F_m(z)\}$ удовлетворяет условиям $E\left[F_m(t), t^k\right] = \delta_{m,k}$, т.е. она биортогональна с некоторым кусочно-квазиполиноминальным весом системе степеней на трех лучах. Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать, что это система целых функций вполне регулярного роста ([6] , гл. III) с кусочно-тригонометрическим индикатором $h(\theta) = \{2^{-1}\cos\theta + \sin\theta, \theta \in [0, 3\pi/4]; -2^{-1}\cos\theta,\ \theta \in [3\pi/4, \pi]\}$ и $h(\theta) = h(-\theta)$.

Теперь рассмотрим систему функций со свойством (4)

$$\{\varphi_m(\tau)\} : (A\varphi_m)(z) = (-1)^m g_m(z),\ m = \overline{0, \infty};\ z \in D. \qquad (15)$$

По самому определению этой системы ясно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi_m(\tau) N^{(k)}(\tau) d\tau = \delta_{m,k}. \qquad (16)$$

Система (15) неудобна тем, что плотности $\varphi_m(\tau)$ не могут быть граничными значениями функций, аналитических вне $\overline{D}$ и исчезающих на бесконечности. Поэтому запишем (16) в виде

$$(16) \Leftrightarrow -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_m^-(\tau)N^{(k)}(\tau)d\tau = \delta_{m,k},$$

где $f_m(z)$ – интеграл типа Коши (3) с плотностью $\varphi_m(\tau)$.

Функции (14) формально определены лишь вне $\overline{D}$. На самом деле, они допускают аналитическое продолжение в D через любую его сторону. При этом вершины являются точками ветвления. Введем два треугольника: Δ_1 с вершинами t_1, t_2, t_4 и Δ_2 с вершинами t_2, t_3, t_4. Доопределим функции (14) в Δ_1 аналитическим продолжением через сторону ℓ_1, т.е.

$$f(z) = f_m(z + 2i - 1) + f_m(z - 1) - f_m(z + 2i) - (1 - i - z)^m/m!,\ z \in \Delta_1.$$

В треугольнике функции (14) определим аналитическим продолжением через сторону ℓ_3, т.е. $f(z) = f(z+1-2i) + f(z+1) - f(z-2i) - (i-z)^m/m!$, $z \in \Delta_2$. Итак, функции (14) голоморфны в плоскости с двубережным разрезом по ломанной с вершинами t_1, t_4, t_2, t_3, перечисленными в порядке следования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А. *О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложениях* // Сиб. мат. журнал. 52(2). 2011. С. 243–249.
2. Гарифьянов Ф.Н. *Суммарное уравнение для функций, аналитических вне четырех угольника* // Изв. вузов. Математика. № 10. 2016. С. 3–7.
3. Гарифьянов Ф.Н. *О суммарном уравнении, порожденном четырехугольником* // Изв. вузов. Математика. № 1. 2018. С. 27–33.
4. Зверович Э.И. *Метод локально-комформного склеивания* // ДАН СССР 205(4). 1972. С. 767–770.
5. Аксеньтьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана* // Изв. вузов. Математика. №4. 1983. С. 43–51.
6. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* М.: Наука. 1967. 241 с.

Фархат Нургаязович Гарифьянов,
Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51
420066, г. Казань, РФ, РТ
E-mail: f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева,
Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ
ул. К. Маркса, д.10
420111, г. Казань, РФ, РТ
E-mail: strezh@yandex.ru