ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 79-88.

УДК 517.956

# О ФУНКЦИИ ГРИНА АНАЛОГА ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Б.Х. ТУРМЕТОВ**

**Аннотация.** Предлагается метод построения функций Грина некоторых краевых задач для полигармонического уравнения в многомерном единичном шаре. Рассматриваемые задачи являются аналогами третьей краевой задачи для неоднородного полигармонического уравнения. Для исследования разрешимости этих задач сначала в классе гладких в шаре функций приводятся свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов. Затем, используя свойства этих операторов, рассматриваемые задачи сводятся к эквивалентной задаче Дирихле со специальной правой частью. Далее, используя известные утверждения относительно задачи Дирихле, для основных задач доказаны теоремы о существования и единственности решения. Получены также интегральные представления решений этих задач через решения задачи Дирихле. Используя явный вид функции Грина, найдено интегральное представление задачи Дирихле со специальной правой частью. Полученное интегральное представление в дальнейшем используется для построения функции Грина аналогов третьей краевой задачи. Далее, приводится методика построения функции Грина основных задач. Для построения функции Грина этих задач изучены дифференциальные свойства фундаментального решения полигармонического оператора. Полученные свойства фундаментального решения применены для исследования свойств функции Грина задачи Дирихле. Построены представления функции Грина аналогов третьей краевой задачи. При нахождении функции Грина этой задачи существенно используется явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения. А именно, функция Грина этих задач представлена в виде суммы функция Грина задачи Дирихле и некоторого интегрального члена. Полученные представления функции Грина согласуются с результатами, полученными ранее для уравнения Лапласа.

**Ключевые слова:** полигармоническое уравнение, краевая задача, задача Дирихле, аналог третьей краевой задачи, функция Грина, интегральное представление.

**Mathematics Subjects Classifications:** 35J40, 31B30

## 1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – $n$-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, $\nu$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Задача Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения

$$(-\Delta)^m v(x) = F(x),\ x \in \Omega,\ \frac{\partial^k v(x)}{\partial \nu^k} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ k = 0, 1, \dots, m-1, m \geq 1 \tag{1}$$

в области $\Omega$ является классической и хорошо исследованной задачей.

Если функция $F(x)$ гладкая, то решение задачи (1) существует, единственно и представляется с помощью функции Грина в виде:

---

B.Kh. Turmetov, Green function for analogue of Robin problem for polyharmonic equation.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (грант №AP05131268).

*Поступила 14 июля 2018 г.*

$$v(x) \quad = \quad \int\limits_{\Omega} G_{D,m}(x,y)F(y)dy. \tag{2}$$

Явный вид функции Грина задачи Дирихле построен различными способами в работах [1]–[5]. Например, в работе [1] показано, что функция $G_{D,m}(x,y)$ имеет вид

$$G_{D,m}(x,y) \quad = \quad K_{m,n}|x-y|^{2m-n} \int\limits_{1}^{g(x,y)} (t^2-1)^{m-1} t^{1-n} dt, \tag{3}$$

где

$$g(x,y) = \frac{1}{|x-y|}\left| x|y| - \frac{y}{|x|} \right|, \quad K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1}((m-1)!)^2 n e_n}, \quad e_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Для коэффициента $K_{m,n}$ легко получить следующее представление (например, см. [6])

$$K_{m,n} \quad = \quad \frac{1}{4^{m-1}((m-1)!)^2 \omega_n}, \tag{4}$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь единичной сферы.

В случае $m = 1$, т.е. для уравнения Пуассона наряду с задачей Дирихле, классической и хорошо исследованной является задача Робена (третья краевая задача):

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega,\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + a u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

где $0 < a$ – действительное число.

Явный вид функции Грина этой задачи построен в работах [7]–[9].

Пусть $r = |x|,\ r\frac{\partial}{\partial r} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Рассмотрим операторы

$$\Gamma_a = \left( r\frac{\partial}{\partial r} + a \right), \quad \Gamma_a^{(k)} = \left( r\frac{\partial}{\partial r} + a \right)^k \ \equiv\ \underbrace{\Gamma_a \cdot \ldots \cdot \Gamma_a}_{k},\ k \geq 2.$$

Свойства и применение операторов типа $\Gamma_a^{(k)}$ в классе гармонических функций были изучены в работах [10, 11]. В настоящей работе мы исследуем метод построения функции Грина следующего аналога третьей краевой задачи

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x),\ \ x \in \Omega,\ \ \Gamma_a^{(k)}[u](x) = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ \ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Решением данной задачи назовем функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^m(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям задачи (5) в классическом смысле.

## 2. Вспомогательные утверждения

В данном пункте мы приведем некоторые свойства решения задачи Дирихле (1), изложим метод сведения задачи (5) к вспомогательной задаче Дирихле и докажем утверждение о существовании и единственности решения этой задачи.

Рассмотрим оператор

$$\Gamma_a^{-1}[u](x) = \int\limits_0^1 s^{a-1} u(sx) ds.$$

Справедливо следующее утверждение ([10],[12]):

**Лемма 1.** *Если $a > 0$, $u(x)-$ гладкая функция в области $\overline{\Omega}$ , то для всех $x \in \overline{\Omega}$ справедливы равенства*

$$\Gamma_a \left[\Gamma_a^{-1}[u]\right](x) = \Gamma_a^{-1}\left[\Gamma_a[u]\right](x) = u(x). \tag{6}$$

**Лемма 2.** *Пусть $f(x) \in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1$. Тогда решение задачи (5) существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_0^1 s^{a-1} v(sx) ds \equiv \Gamma_a^{-1}[v](x), \tag{7}$$

*где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (1) с функцией*

$$F(x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 2m + a\right) f(x).$$

*Доказательство.* Предположим, что $u(x)$ – решение задачи (5). Применим к этой функции оператор $\Gamma_a$ и обозначим $\Gamma_a[u](x) = v(x)$. Находим условия, которым удовлетворяет функция $v(x)$. Так как

$$r\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \Delta\left(\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 2\right)\Delta u(x) = \Gamma_2[\Delta u](x),$$

то

$$(-\Delta)^m v(x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a + 2m\right)(-\Delta)^m u(x) = \Gamma_{2m+a}[f](x) \equiv F(x).$$

Далее, для всех $x \in \partial\Omega$ имеем

$$0 = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right) u(x)\bigg|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega}, \ 0 = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^2 u(x)\bigg|_{\partial\Omega} =$$

$$= \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right) v(x)\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \nu} v(x)\bigg|_{\partial\Omega} + av(x)|_{\partial\Omega}.$$

Следовательно,

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0, \ r\frac{\partial v(x)}{\partial r}\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Далее,

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^2 v(x)\bigg|_{\partial\Omega} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^3 u(x)\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

С другой стороны,

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^2 v(x)\bigg|_{\partial\Omega} = \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2a+1)r\frac{\partial}{\partial r} + a^2\right) v(x)\bigg|_{\partial\Omega} =$$

$$= \frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2}\bigg|_{\partial\Omega} + (2a+1)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} + a^2 v(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2}\bigg|_{\partial\Omega}.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что для любого $k = 3, 4, \ldots, m-1$ выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial^k v(x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Следовательно, для функции $v(x) = \Gamma_a[u](x)$ получаем задачу Дирихле (1) с функцией $F(x) = \Gamma_{2m+a}[f](x)$. Если функция $f(x) \in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$, то $F(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$, и решение задачи (1) существует, единственно и представляется в виде (2).

Далее, из равенства (6) находим

$$u(x) = \int\limits_0^1 s^{a-1} v(sx) ds,$$

т.е. справедливо представление (7).

Пусть теперь наоборот функция $v(x)$ является решением задачи (1) с функцией $F(x) = \Gamma_{2m+a}[f](x)$. Покажем, что функция $u(x) = \Gamma_a^{-1}[v](x)$ удовлетворяет всем условиям задачи (5). Действительно, так как

$$(-\Delta)^m \Gamma_a^{-1}[v](x) = \int\limits_0^1 s^{a+2m-1} F(sx) ds = \Gamma_{a+2m}^{-1}[F](x),$$

$$F(x) = \Gamma_{2m+a}[f](x),$$

то в силу равенства (6) получаем

$$(-\Delta)^m u(x) = (-\Delta)^m \Gamma_a^{-1}[v](x) = \Gamma_{2m+a}^{-1}[\Gamma_{2m+a}[f]](x) = f(x).$$

Далее, в интеграле $\int\limits_0^1 s^{a-1} v(sx) ds$ сделаем замену переменных $sr = \xi$. Тогда $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = r^{-a} \int\limits_0^r \xi^{a-1} v(\xi\theta) d\xi, \quad \theta = \frac{x}{|x|}.$$

Отсюда

$$\Gamma_a[u](x)|_{\partial\Omega} = \left. \left( r\frac{\partial}{\partial r} + a \right) u(x) \right|_{\partial\Omega} =$$

$$= \left. \left( -ar^{-a} \int\limits_0^r \xi^{a-1} v(\xi\theta) ds + v(x) + ar^{-a} \int\limits_0^r \xi^{a-1} v(\xi\theta) ds \right) \right|_{r=1} = v(x)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\Gamma_a^{(2)}[u](x)\big|_{\partial\Omega} = \left. \left( r\frac{\partial}{\partial r} + a \right) v(x) \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} + av(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Далее, так как для любых $k = 3, 4, \dots, m$ выполняются равенства (например, см. [13])

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^k u(x)\bigg|_{\partial\Omega} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a\right)^{k-1} v(x)\bigg|_{\partial\Omega} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j a^{k-1-j} \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^j v(x)\bigg|_{\partial\Omega} = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j a^{k-1-j} \sum_{i=0}^{j} d_{i,j} \frac{\partial^i v(x)}{\partial \nu^i}\bigg|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $d_{i,j}$ – некоторые постоянные, то граничные условия задачи (5) также выполняются. □

**Лемма 3.** *Пусть функция $F(x)$ имеет вид $F(x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + a + 2m\right) f(x)$. Тогда решение задачи Дирихле (1) представляется в виде.*

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} \left(2m + a - n - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_{D,m}(x,y) f(y) dy. \tag{8}$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$I_j = \int\limits_{\Omega} G_{D,m}(x,y) y_j \frac{\partial}{\partial y_j} f(y) dy,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Используя методику работы (см. [14],стр.59, формула (32)), интегрируем по частям $I_j$, при этом учитывая свойство функции Грина $G_{D,m}(x,y)|_{|y|=1} = 0$, имеем

$$I_j = \int\limits_{\Omega} y_j G_{D,m}(x,y) \frac{\partial}{\partial y_j} f(y) dy = \int\limits_{\partial\Omega} y_j G_{D,m}(x,y) f(y) cos(\widehat{\nu_y y_j}) dS_y -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[y_j G_{D,m}(x,y)\right] f(y) dy \quad = - \int\limits_{\Omega} \left(1 + y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) G_{D,m}(x,y) f(y) dy.$$

Здесь $\widehat{\nu_y y_j}$ – угол между $\nu_y$ и $y_j$.
Тогда

$$\int\limits_{\Omega} G_{D,m}(x,y) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} f(y) dy = \int\limits_{\Omega} G_{D,m}(x,y) \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial y_j} f(y) dy \ =$$

$$= - \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} [y_j G_{D,m}(x,y)] f(y) dy \ = - \int\limits_{\Omega} \left(n + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_{D,m}(x,y) f(y) dy.$$

Следовательно, верно равенство

$$\int\limits_{\Omega} G_{D,m}(x,y) \left(2m + a + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) f(y) dy \quad = \quad \int\limits_{\Omega} \left(2m + a - n - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_{D,m}(x,y) f(y) dy.$$

Равенство (8) доказано. □

**Следствие 1.** *Пусть $f(x) \in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$. Тогда решение задачи (5) существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{0}^{1} s^{a-1} \left(a + 2m - n - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_{D,m}(sx,y)\right] f(y) dy. \tag{9}$$

## 3. Построение функции Грина

В этом пункте мы построим функцию Грина основной задачи. Пусть $\rho\frac{\partial}{\partial\rho} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}$. Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения

**Лемма 4.** *Для функции* $g(x,y) = \frac{1}{|x-y|}\left|x|y| - \frac{y}{|x|}\right|$ *справедливо следующее равенство*

$$|x-y|^{2m-n}\big(g^2(x,y)-1\big)^{m-1} g^{2-n}(x,y) = \frac{(1-|x|^2)^{m-1}(1-|y|^2)^{m-1}}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{n-2}}. \tag{10}$$

*Доказательство.* Так как

$$\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^2 - |x-y|^2 = \left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right),$$

то из представления функции $g(x,y)$ следует

$$|x-y|^{2m-n}\big(g^2(x,y)-1\big)^{m-1} g^{2-n}(x,y) = |x-y|^{2m-n}\frac{(1-|x|^2)^{m-1}(1-|y|^2)^{m-1}}{|x-y|^{2m-2}}\times$$

$$\times\frac{|x-y|^{n-2}}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{n-2}} = \frac{(1-|x|^2)^{m-1}(1-|y|^2)^{m-1}}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{n-2}}.$$

□

**Лемма 5.** *Справедливы следующие равенства*

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)|sx-y|^{2m-n} = (2m-n)|sx-y|^{2m-n}, \tag{11}$$

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)g(sx,y) = g(sx,y)\frac{s^2|x|^2|y|^2-1}{\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|^2}. \tag{12}$$

*Доказательство.* Последовательно применяя операторы $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$ и $s\frac{d}{ds}$ к функции $|sx-y|^{2m-n}$, имеем

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)|sx-y|^{2m-n} = (2m-n)|sx-y|^{2(m-1)-n}\left(|y|^2 - s(x,y)\right) +$$

$$+(2m-n)|sx-y|^{2(m-1)-n}\left(s^2|x|^2 - s(x,y)\right) =$$

$$= (2m-n)|sx-y|^{2m-n}\frac{|y|^2 - s(x,y) + s^2|x|^2 - s(x,y)}{|sx-y|^2} = (2m-n)|sx-y|^{2m-n}.$$

Равенство (11) доказано.

Далее,

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)g(sx,y) = |sx-y|^{-1}\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right| +$$

$$+\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)\left(|sx-y|^{-1}\right) = |sx-y|^{-1}\cdot 2\frac{s^2|x|^2|y|^2 - s(x,y)}{\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|} -$$

$$-\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right||sx-y|^{-3}\left(|y|^2 - s(x,y) + |s^2y|^2 - s(x,y)\right) =$$

$$= \frac{1}{|sx-y|}\cdot 2\frac{s^2|x|^2|y|^2 - s(x,y)}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|} - \frac{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|}{|sx-y|} = \frac{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|}{|sx-y|}\times$$

$$\times\left[\frac{2s^2|x|^2|y|^2 - 2s(x,y)}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^2} - 1\right] = g(sx,y)\frac{s^2|x|^2|y|^2 - 1}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^2}.$$

Равенство (12) также доказано. □

**Лемма 6.** *Справедливо следующее равенство*

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)G_{D,m}(sx,y) = (2m-n)G_{D,m}(sx,y) -$$

$$- K_{m,n}(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-|y|^2)^{m-1}\frac{1-s^2|x|^2|y|^2}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n}, \quad (13)$$

*где* $K_{m,n}$ *определяется равенством* (4).

*Доказательство.* Используя представление функции $G_{D,m}(x,y)$, имеем

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}G_{D,m}(sx,y) = K_{m,n}\int\limits_1^{g(sx,y)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}dt\rho\frac{\partial}{\partial\rho}|sx-y|^{2m-n} +$$

$$+ K_{m,n}|sx-y|^{2m-n}(g^2-1)^{m-1}g^{1-n}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}g(sx,y).$$

Аналогично,

$$s\frac{d}{ds}G_{D,m}(sx,y) = K_{m,n}\int\limits_1^{g(sx,y)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}dts\frac{d}{ds}|sx-y|^{2m-n} +$$

$$+ K_{m,n}|sx-y|^{2m-n}(g^2-1)^{m-1}g^{1-n}s\frac{d}{ds}g(sx,y).$$

Отсюда

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)G_{D,m}(sx,y) = K_{m,n}\int\limits_1^{g(sx,y)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}dt\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)|sx-y|^{2m-n}+$$

$$+K_{m,n}|sx-y|^{2m-n}(g^2-1)^{m-1}g^{1-n}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)g(sx,y).$$

Далее, используя равенства (11),(12) и (10), окончательно получаем

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + s\frac{d}{ds}\right)G_{D,m}(sx,y) = K_{m,n}(2m-n)|sx-y|^{2m-n}\int\limits_1^{g(sx,y)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}dt+$$

$$+ K_{m,n}|sx-y|^{2m-n}(g^2-1)^{m-1}g^{1-n}g(sx,y)\frac{s^2|x|^2|y|^2 - 1}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^2} =$$

$$= (2m-n)G_{D,m}(sx,y) - K_{m,n}(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-|y|^2)^{m-1}\frac{1-s^2|x|^2|y|^2}{\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|^n}.$$

□

Приведем основное утверждение относительно функции Грина задачи (5).

**Теорема 1.** *Пусть $a>0$, $0<\lambda<1$ и $f(x)\in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$. Тогда решение задачи (5) можно представить в виде*

$$u(x) \ = \int\limits_{\Omega} G_a(x,y)f(y)dy, \tag{14}$$

*где функция Грина $G_a(x,y)$ имеет вид*

$$G_a(x,y) = G_{D,m}(x,y) + \\ + K_{m,n}(1-|y|^2)^{m-1}\int\limits_0^1 s^{a-1}\frac{(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-s^2|x|^2|y|^2)}{\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|^n}ds. \tag{15}$$

*Доказательство.* Если $f(x)\in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$, то в силу утверждения Леммы 2 решение задачи (5) существует, единственно и представляется в виде (7), где $v(x)-$ решение задачи Дирихле (1) с функцией $F(x)=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+2m+a\right)f(x)$. Далее, в силу утверждения Следствия 1 решение задачи (5) можно представить в виде (9), т.е.

$$u(x) = \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^1 s^{a-1}\left(a+2m-n-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)G_{D,m}(sx,y)\right]f(y)dy.$$

Обозначим

$$G_a(x,y) = \int\limits_0^1 s^{a-1}\left(a+2m-n-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)G_{D,m}(sx,y)ds. \tag{16}$$

Исследуем функцию

$$\left(a+2m-n-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)G_{D,m}(sx,y).$$

В силу равенства (13) получаем

$$\left(a+2m-n-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)G_{D,m}(sx,y) = \left(s\frac{d}{ds}+a\right)G_{D,m}(sx,y) + \\ + \ K_{m,n}(1-|y|^2)^{m-1}\frac{(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-s^2|x|^2|y|^2)}{\left|sx|y|-\frac{y}{|y|}\right|^n}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 s^{a-1}\left(s\frac{d}{ds}+a\right)G_{D,m}(sx,y)ds = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left[s^a G_{D,m}(sx,y)\right]ds = G_{D,m}(x,y).$$

Отсюда для функции $G_a(x,y)$ получаем равенство (15), а для решение задачи (5) представление (14). □

**Следствие 2.** *Если $m = 1$ , то функция Грина задачи Робена для уравнения Пуассона представляется в виде*

$$G_a(x,y) = G_{D,1}(x,y) + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^1 s^{a-1}\frac{1-s^2|x|^2|y|^2}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n}ds.$$

Данное представление в случае $n = 2$ получено в работе [7], а в случае $n > 2$ в работе [8].

Теперь приведем некоторое обобщение задачи (5). Пусть $a_j, j = 1, 2, \ldots, m$ положительные действительные числа. Введем обозначения

$$\Gamma^{(\ell)}_{a_1,a_2,\ldots,a_\ell} = \underbrace{\Gamma_{a_1}\cdot\Gamma_{a_2}\ldots\Gamma_{a_\ell}}_{\ell},\ \ \ell \geq 1.$$

Аналогичным образом можно исследовать следующую задачу

$$(-\Delta)^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad \Gamma^{(k)}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}[u](x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \quad (17)$$

Приведем без доказательства основное утверждение относительно задачи (17).

**Теорема 2.** *Пусть $a_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ 0 < \lambda < 1$ и $f(x) \in C^{\lambda+1}(\overline{\Omega})$. Тогда решение задачи (17) существует,единственно и его можно представить в виде*

$$u(x) = \int\limits_\Omega G_{a_1}(x,y)f(y)dy,$$

*где функция Грина $G_{a_1}(x,y)$ имеет вид*

$$G_{a_1}(x,y) \;=\; G_{D,m}(x,y) \;+\; K_{m,n}(1-|y|^2)^{m-1}\int\limits_0^1 s^{a_1-1}\frac{(1-s^2|x|^2)^{m-1}(1-s^2|x|^2|y|^2)}{\left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n}ds.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, S. Guido *Polyharmonic Boundary Value Problems.* Berlin : Springer-Verlag. 2010. 429 p.
2. T.S. Kal'menov, D. Suragan *On a new method for constructing the green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation* // Differential Equations. V. 48, No. 3. 2012. P. 441–445.
3. T. Kal'menov, B. Koshanov, M. Nemchenko *Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere* //Complex Variables and Elliptic Equations. V. 53(2). 2008. P. 177–183.
4. Карачик В.В. *Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных* // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 14, вып. 4. 2014. С. 550–558.
5. A. Kumar, R. Prakash *Dirichlet problem for inhomogeneous polyharmonic equation* // Complex Variables and Elliptic Equations. An International Journal. V. 53, Issue 7. 2008 . P. 643–651.
6. Турметов Б.Х. *О разрешимости одной краевой задачи для неоднородного полигармонического уравнения с граничным оператором дробного порядка* // Уфимский математический журнал. Т. 8, № 3. 2016. С. 160–175.
7. M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov *On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle* // Adv. Pure Appl. Math. V. 6, No. 3. 2015. P. 163-–172.
8. Карачик В.В., Турметов Б.Х. *О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона*// Математические труды. Т. 28, № 1. 2018. С. 17–34.

9. Торебек Б.Т. *Функция Грина третьей краевой задачи в шаре* // Математический журнал. Т. 15, № 1. 2015. С. 89–100.
10. Баврин И.И. *Операторы для гармонических функций и их приложения* // Дифференциальные уравнения. Т. 21, № 1, 1985. С. 9–15.
11. Баврин И.И. *Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения* // Дифференциальные уравнения. Т. 24, № 9, 1988. С. 1629–1631.
12. B.Kh. Turmetov, R.R. Ashurov *On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball* // Boundary value problems. V. 2013, No.162. 2013. P. 1–15.
13. A.E. Bekaeva, V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov *Solvability of some boundary-value problems for polyharmonic equation with Hadamard-Marchaud boundary operator* // Russian Mathematics. V. 58, Issue 7, 2014. P. 11–24.
14. Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1982. 336 с.

Батирхан Худайбергенович Турметов,
Международный казахско-турецкий универститет им. А. Ясави,
ул. Б. Саттарханова, 29,
161200, г. Туркестан, Казахстан.
E-mail: turmetovbh@mail.ru