ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 3 (2019). С. 63-78.

УДК 517.956, 517.958

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Л.Б. МИРОНОВА

Аннотация. Доказаны существование и единственность решения для одного класса систем интегральных уравнений с частными интегралами. Интегральными уравнениями с частными интегралами называют интегральные уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаками интегралов различной кратности. Рассматриваемый в статье класс интегральных уравнений характеризуется тем, что уравнения содержат интегралы как с переменными, так и с постоянными верхними пределами интегрирования. Предварительно доказывается теорема существования и единственности для интегральных уравнений в трехмерном пространстве. Затем аналогичное утверждение доказывается для уравнений с произвольным числом независимых переменных. Указаны некоторые приложения полученного результата. Для гиперболической системы с доминирующими производными второго порядка с тремя независимыми переменными доказаны существование и единственность решения основной характеристической задачи. Основная характеристическая задача для системы уравнений с доминирующими производными второго порядка может рассматриваться как аналог задачи Гурса для гиперболической системы без кратных характеристик. Решение указанной задачи построено в явном виде в терминах матрицы Римана. Матрица Римана определена как решение системы интегральных уравнений Вольтерры. Сформулирована задача с граничными условиями на пяти сторонах характеристического параллелепипеда для указанной системы уравнений с доминирующими производными второго порядка. Путем сведения задачи к системе уравнений с частными интегралами, опираясь на полученные результаты, доказаны существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: интегральное уравнение с частными интегралами, задача с условиями на характеристиках.

Mathematics Subject Classification: 45A05, 45F05, 35L51

1. Введение

В данной статье идет речь об одном классе интегральных уравнений с частными интегралами, то есть уравнений, содержащих неизвестную функцию нескольких переменных под интегралами различной кратности [1]–[3]. Получены условия безусловной однозначной разрешимости некоторых систем интегральных уравнений (указаний на этот вопрос в литературе автору обнаружить не удалось), которые применяются к решению одной задачи для системы уравнений с частными производными с граничными условиями на характеристиках.

Исследование граничных задач для гиперболических систем представляет значительный теоретический интерес. Различные аспекты теории указанных систем исследовались многими авторами [4]–[11]. В данной статье содержится некоторое развитие результатов работы [12], где был предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены

L.B. Mironova, On class of integral equations with partial integrals and its applications.

Поступила 3 июля 2018 г.

решения задач Коши и Гурса, а также работ [13]–[14], где метод Римана применяется для исследования задач для одной системы уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками.

2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [15] показано, что интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами с непрерывными ядрами и свободным членом

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) - \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y,z,\alpha)w(\alpha,y,z)\,d\alpha - \int\limits_{y_0}^{y} K_2(x,y,z,\beta)w(x,\beta,z)\,d\beta - \\
- \int\limits_{z_0}^{z} K_3(x,y,z,\gamma)w(x,y,\gamma)\,d\gamma - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K_4(x,y,z,\alpha,\beta)w(\alpha,\beta,z)\,d\beta\,d\alpha - \\
- \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z} K_5(x,y,z,\alpha,\gamma)w(\alpha,y,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha - \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} K_6(x,y,z,\beta,\gamma)w(x,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta - \\
- \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z} K_7(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)w(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha = F(x,y,z), \quad (1)
\end{aligned}
$$

а также его n-мерный аналог, имеют единственное решение в классе непрерывных функций. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если в уравнении*

$$
\begin{aligned}
w(x_1,\dots,x_n) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}} \int\limits_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \cdots \int\limits_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} K_{q_1\dots q_k}(x_1,\dots,x_n,\alpha_{q_1},\dots,\alpha_{q_k}) \times \\
\times\, w(x_1,\dots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n) \times \\
\times\, d\alpha_{q_k}\dots d\alpha_{q_1} = F(x_1,\dots,x_n), \quad (2)
\end{aligned}
$$

$$
Q_{k,n} = \{(q_1,\dots,q_k) \mid 1 \leqslant q_1 < \dots < q_k \leqslant n\},
$$

где $x^0_i \leqslant x_i \leqslant x^1_i$, $i = \overline{1,n}$, $q_1,\dots,q_k$ — натуральные числа, $K_{q_1\dots q_k}$, $(q_1,\dots,q_k) \in Q_{k,n}$, $k = \overline{1,n}$, F — непрерывные функции своих аргументов в соответствующих замкнутых параллелепипедах, то в параллелепипеде $\Omega = [x^0_1, x^1_1] \times \dots \times [x^0_n, x^1_n]$ существует единственное непрерывное решение $w(x_1,\dots,x_n)$ этого уравнения.

Здесь предлагается обобщение этого результата на несколько более широкий класс систем интегральных уравнений.

1. Трехмерное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z) - \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y,z,\alpha)w(\alpha,y,z)\,d\alpha - \int\limits_{y_0}^{y} K_2(x,y,z,\beta)w(x,\beta,z)\,d\beta - \\
- \int\limits_{z_0}^{z} K_3(x,y,z,\gamma)w(x,y,\gamma)\,d\gamma - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} K_{12}(x,y,z,\alpha,\beta)w(\alpha,\beta,z)\,d\beta\,d\alpha -
\end{aligned}
$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z_1} K_{13}(x,y,z,\alpha,\gamma)w(\alpha,\gamma,z)\,d\gamma\,d\alpha-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x_1} K_{21}(x,y,z,\alpha,\beta)w(\alpha,\beta,z)\,d\alpha\,d\beta-$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z_1} K_{23}(x,y,z,\beta,\gamma)w(\beta,\gamma,z)\,d\gamma\,d\beta-\int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x_1} K_{31}(x,y,z,\alpha,\gamma)w(\alpha,y,\gamma)\,d\alpha\,d\gamma-$$

$$-\int_{z_0}^{z}\int_{y_0}^{y_1} K_{32}(x,y,z,\beta,\gamma)w(x,\beta,\gamma)\,d\beta\,d\gamma-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} K_{123}(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)w(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha-$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} K_{213}(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)w(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha\,d\beta-$$

$$-\int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} K_{312}(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)w(\alpha,\beta,\gamma)\,d\beta\,d\alpha\,d\gamma=F(x,y,z), \qquad (3)$$

где $(x,y,z)\in D=[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]\times[z_0,z_1]$, $x_0<x_1$, $y_0<y_1$, $z_0<z_1$, $w=\mathrm{colon}(w^1,\dots,w^m)$, $F=\mathrm{colon}(f^1,\dots,f^m)$, K_ω — матричные функции размерности $m\times m$ (здесь ω — набор индексов). Коэффициенты и правая часть уравнения (3) предполагаются непрерывными в соответствующих замкнутых параллелепипедах. Уравнение (3) кратко запишем в виде

$$w-Bw=F. \qquad (4)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $x_0=y_0=z_0=0$.

Для матриц $A=(a_{ij})$, где функции a_{ij} заданы на ограниченном замкнутом множестве D, будем использовать норму [16, с. 410]

$$\|A\|=\max_i\sum_j\max_D|a_{ij}|.$$

Пусть выполняются оценки

$$x+y+z<s \text{ в } D,$$

$$1+\|K_1\|<M,\quad 1+\|K_2\|<M,\quad 1+\|K_3\|<M,$$

$$1+\|\int_0^{y_1}K_{12}d\beta\|<M,\quad 1+\|\int_0^{z_1}K_{13}d\gamma\|<M,$$

$$1+\|\int_0^{x_1}K_{21}d\alpha\|<M,\quad 1+\|\int_0^{z_1}K_{23}d\gamma\|<M,$$

$$1+\|\int_0^{x_1}K_{31}d\alpha\|<M,\quad 1+\|\int_0^{y_1}K_{32}d\beta\|<M,$$

$$1+\|\int_0^{y_1}\int_0^{z_1}K_{123}d\gamma d\beta\|<M,\quad 1+\|\int_0^{x_1}\int_0^{z_1}K_{213}d\gamma d\alpha\|<M,$$

$$1+\|\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}K_{312}d\beta d\alpha\|<M.$$

Докажем, что оператор B непрерывен на множестве заданных на D непрерывных векторных функций. Пусть w_1 и w_2 — непрерывные векторные функции, заданные на множестве D. Тогда, очевидно,

$$\|Bw_1 - Bw_2\| < 12mM(x+y+z)\|w_1 - w_2\| < 12mMs\|w_1 - w_2\|.$$

Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \varepsilon/(12mMs)$, такое, что из условия $\|w_1 - w_2\| < \delta$ следует $\|Bw_1 - Bw_2\| < \varepsilon$. Непрерывность оператора B доказана.

Покажем теперь, что некоторая степень оператора B является сжимающим отображением. Имеем

$$\|B^2w_1 - B^2w_2\| < (12mM)^2\frac{s^2}{2!}\|w_1 - w_2\|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|B^kw_1 - B^kw_2\| < (12mM)^k\frac{s^k}{k!}\|w_1 - w_2\|,$$

Ясно, что при некотором k

$$\frac{(12mMs)^k}{k!} < 1.$$

Поэтому B^k является сжимающим оператором при некотором k.

Если B — непрерывное отображение полного метрического пространства в себя, такое, что некоторая его степень является сжатием, то уравнение

$$w - Bw = 0$$

имеет одно и только одно решение [17, с. 82] (которое, очевидно, является нулевым в нашем случае). Но тогда линейное уравнение (4) имеет единственное решение в классе непрерывных векторных функций [18, с. 39].

2. Общий случай. Проведенные выше рассуждения обобщаются на n-мерное пространство $(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &w(x_1,\ldots,x_n) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_k^0}^{x_k}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{Q_{l,n}^k}\int\limits_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}^1}\cdots\int\limits_{x_{q_l}^0}^{x_{q_l}^1} K_{kq_1\ldots q_l}(x_1,\ldots,x_n,\alpha_{q_1},\ldots,\alpha_{q_l},\alpha_{q_k})\times \\ &\qquad \times w(x_1,\ldots,x_n)|_{x_k=\alpha_k}|_{x_{q_1}=\alpha_{q_1}}\cdots|_{x_{q_l}=\alpha_{q_l}}\times \\ &\qquad\qquad \times d\alpha_{q_l}\ldots d\alpha_{q_1}d\alpha_k = F(x_1,\ldots,x_n), \quad (5) \end{aligned}$$

$$Q_{l,n}^k = \{(q_1,\ldots,q_l) \mid 1 \leqslant q_1 < \ldots < q_l \leqslant n,$$
$$q_i \in \{1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\},\ 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

Здесь $(x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$ (множество Ω определено выше, в формулировке теоремы 1), $x_1^0 < x_1^1, \ldots,\ x_n^0 < x_n^1$, $w = \mathrm{colon}(w^1,\ldots,w^m)$, $F = \mathrm{colon}(f^1,\ldots,f^m)$, K_ω — матричные функции размерности $m \times m$. Коэффициенты и правая часть уравнения (5) непрерывны в соответствующих замкнутых областях. В операторной форме уравнение (5) имеет вид

$$w - B_nw = F. \qquad (6)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $x_i^0 = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Норма матрицы $A = (a_{ij})$, где функции a_{ij} заданы на Ω, определяется соотношением

$$\|A\| = \max_i \sum_j \max_\Omega |a_{ij}|.$$

Пусть выполняются оценки

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < s, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega,$$

$$1 + \|K_j\| < M, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$1 + \| \int\limits_0^{x^1_{q_1}} \cdots \int\limits_0^{x^1_{q_l}} K_{kq_1 \ldots q_l} d\alpha_{q_l} \ldots d\alpha_{q_1} \| < M \text{ для всех } k \text{ и } (q_1, \ldots, q_l).$$

Докажем, что оператор B_n непрерывен. Пусть w_1 и w_2 — непрерывные векторные функции, заданные на множестве Ω. Тогда

$$\|B_n w_1 - B_n w_2\| < n2^{n-1} mM(x_1 + \cdots + x_n)\|w_1 - w_2\| < n2^{n-1} mMs\|w_1 - w_2\|. \tag{7}$$

Очевидно, из (7) следует, что оператор B_n непрерывен.

Далее

$$\|B_n^2 w_1 - B_n^2 w_2\| < (n2^{n-1}mM)^2 \frac{s^2}{2!}\|w_1 - w_2\|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|B_n^k w_1 - B_n^k w_2\| < (n2^{n-1}mM)^k \frac{s^k}{k!}\|w_1 - w_2\|,$$

Ясно, что при некотором k

$$\frac{(n2^{n-1}mMs)^k}{k!} < 1,$$

то есть B_n^k является сжимающим оператором при некотором k.

Следовательно, линейное уравнение (6) имеет единственное решение в классе непрерывных векторных функций. То есть имеет место

Теорема 2. *Если в уравнении* (6) *все коэффициенты* K_ω *и правая часть* F *непрерывны в соответствующих замкнутых параллелепипедах изменения своих переменных, то в параллелепипеде* $\Omega = [x_1^0, x_1^1] \times \cdots \times [x_n^0, x_n^1]$ *существует единственное непрерывное решение* $w(x_1, \ldots, x_n)$ *этого уравнения.*

Система типа Вольтерра (2), где w, F — векторы, $K_{q_1 \ldots q_k}$ — матрицы, является частным случаем системы (6).

Отметим особо, что если речь идет об уравнении (или системе уравнений) типа Вольтерра, то степень гладкости решения будет той же, что и у ядер и правой части этого уравнения (системы) [19, с. 11].

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Укажем на одно приложение теоремы 2.

1. Построение решения основной характеристической задачи для системы в трехмерном пространстве методом Римана. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x,y,z)v_x + b_1(x,y,z)w_x + c_1(x,y,z)u + \\ \qquad +d_1(x,y,z)v + e_1(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\ v_{yy} = a_2(x,y,z)u_y + b_2(x,y,z)w_y + c_2(x,y,z)u + \\ \qquad +d_2(x,y,z)v + e_2(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\ w_{zz} = a_3(x,y,z)u_z + b_3(x,y,z)v_z + c_3(x,y,z)u + \\ \qquad +d_3(x,y,z)v + e_3(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{cases} \tag{8}$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x, y, z) выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$. Решение (8) класса u, v, $w \in C^1(D)$, u_{xx}, v_{yy}, $w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D.

К системе (8) подстановками

$$u^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} a_1^*(\alpha, y, z)\, d\alpha\Big)u, \quad v^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y} b_2^*(x, \beta, z)\, d\beta\Big)v,$$

$$w^* = \exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} c_3^*(x, y, \gamma)\, d\gamma\Big)w$$

сводится система со старшими производными вида

$$\begin{cases} u^*_{xx} = a_1^*(x,y,z)u^*_x + b_1^*(x,y,z)v^*_x + c_1^*(x,y,z)w^*_x + d_1^*(x,y,z)u^* + \\ \qquad + e_1^*(x,y,z)v^* + f_1^*(x,y,z)w^* + g_1^*(x,y,z), \\ v^*_{yy} = a_2^*(x,y,z)u^*_y + b_2^*(x,y,z)v^*_y + c_2^*(x,y,z)w^*_y + d_2^*(x,y,z)u^* + \\ \qquad + e_2^*(x,y,z)v^* + f_2^*(x,y,z)w^* + g_2^*(x,y,z), \\ w^*_{zz} = a_3^*(x,y,z)u^*_z + b_3^*(x,y,z)v^*_z + c_3^*(x,y,z)w^*_z + d_3^*(x,y,z)u^* + \\ \qquad + e_3^*(x,y,z)v^* + f_3^*(x,y,z)w^* + g_3^*(x,y,z). \end{cases}$$

Сформулируем основную характеристическую задачу, играющую в теории системы (8) ту же роль, какую играет задача Гурса [5] в теории гиперболической системы

$$\begin{cases} u_x = a_1(x,y)u + b_1(x,y)v, \\ v_y = a_2(x,y)u + b_2(x,y)v. \end{cases}$$

Основная характеристическая задача. Пусть $G = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$. Обозначим через X, Y, Z грани G при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно. Требуется найти регулярное в области G решение системы (8), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x_0, y, z) = \varphi_1(y, z), \quad v(x, y_0, z) = \varphi_2(x, z), \\ w(x, y, z_0) = \varphi_3(x, y), \\ (u_x - a_1 v - b_1 w)(x_0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ (v_y - a_2 u - b_2 w)(x, y_0, z) = \psi_2(x, z), \\ (w_z - a_3 u - b_3 v)(x, y, z_0) = \psi_3(x, y), \end{gathered} \tag{9}$$

φ_1, $\psi_1 \in C^1(\overline{X})$, φ_2, $\psi_2 \in C^1(\overline{Y})$, φ_3, $\psi_3 \in C^1(\overline{Z})$.

Решение основной характеристической задачи существует и единственно. Действительно, преобразуем (8) к виду

$$\begin{cases} u_x = u_1 + a_1 v + b_1 w, \\ u_{1x} = c_1 u + (d_1 - a_{1x})v + (e_1 - b_{1x})w + f_1, \\ v_y = a_2 u + v_1 + b_2 w, \\ v_{1y} = (c_2 - a_{2y})u + d_2 v + (e_2 - b_{2y})w + f_2, \\ w_z = a_3 u + b_3 v + w_1, \\ w_{1z} = (c_3 - a_{3z})u + (d_3 - b_{3z})v + e_3 w + f_3. \end{cases} \tag{10}$$

Обозначим $d_{10} = d_1 - a_{1x}$, $e_{10} = e_1 - b_{1x}$, $c_{20} = c_2 - a_{2y}$, $e_{20} = e_2 - b_{2y}$, $c_{30} = c_3 - a_{3z}$, $d_{30} = d_3 - b_{3z}$. Система (8) с условиями (9) сводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \varphi_1(y,z) + \int\limits_{x_0}^{x}(u_1 + a_1 v + b_1 w)(\alpha,y,z)d\alpha, \\ u_1(x,y,z) = \psi_1(y,z) + \int\limits_{x_0}^{x}(c_1 u + d_{10} v + e_{10} w + f_1)(\alpha,y,z)d\alpha, \\ v(x,y,z) = \varphi_2(x,z) + \int\limits_{y_0}^{y}(v_1 + a_2 u + b_2 w)(x,\beta,z)d\beta, \\ v_1(x,y,z) = \psi_2(x,z) + \int\limits_{y_0}^{y}(c_{20} u + d_2 v + e_{20} w + f_2)(x,\beta,z)d\beta, \\ w(x,y,z) = \varphi_3(x,y) + \int\limits_{z_0}^{z}(w_1 + a_3 u + b_3 v)(x,y,\gamma)d\gamma, \\ w_1(x,y,z) = \psi_3(x,y) + \int\limits_{z_0}^{z}(c_{30} u + d_{30} v + e_3 w + f_3)(x,y,\gamma)d\gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Очевидно, что решение (11) существует и единственно в классе непрерывных функций

Ясно, что (11) равносильна основной характеристической задаче (8), (9). Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если в замыкании области G выполняются включения a_i, $b_i \in C^2$, c_i, d_i, e_i, $f_i \in C^1$, $i = \overline{1,3}$, то решение основной характеристической задачи* (8), (9) *существует и единственно.*

Построим решение основной характеристической задачи в терминах матрицы Римана. Перепишем (10) в векторно-матричной форме

$$\begin{gathered} L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1\mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2\mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3\mathbf{U}_z - \mathbf{B}\mathbf{U}, \\ \mathbf{U} = \mathrm{colon}(u, u_1, v, v_1, w, w_1), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ c_1 & 0 & d_{10} & 0 & e_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & b_2 & 0 \\ c_{20} & 0 & d_2 & 0 & e_{20} & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1 \\ c_{30} & 0 & d_{30} & 0 & e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{colon}(0, f_1, 0, f_2, 0, f_3).$$

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \mathrm{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6)$, где $\mathbf{R}_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6})$, $i = \overline{1,6}$, являются решениями систем

$$\begin{cases} r_{i1}(x,y,z) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (c_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + c_{20} r_{i4} + \\ + a_3 r_{i5} + c_{30} r_{i6})(\alpha, y, z) d\alpha, \\ r_{i2}(x,y,z) = \delta_{i2} - \int\limits_{\xi}^{x} r_{i1}(\alpha, y, z) d\alpha, \\ r_{i3}(x,y,z) = \delta_{i3} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_1 r_{i1} + d_{10} r_{i2} + d_2 r_{i4} + \\ + b_3 r_{i5} + d_{30} r_{i6})(x, \beta, z) d\beta, \\ r_{i4}(x,y,z) = \delta_{i4} - \int\limits_{\eta}^{y} r_{i3}(x, \beta, z) d\beta, \\ r_{i5}(x,y,z) = \delta_{i5} - \int\limits_{\zeta}^{z} (b_1 r_{i1} + e_{10} r_{i2} + b_2 r_{i3} + \\ + e_{20} r_{i4} + e_3 r_{i6})(x, y, \gamma) d\gamma, \\ r_{i6}(x,y,z) = \delta_{i6} - \int\limits_{\zeta}^{z} r_{i5}(x, y, \gamma) d\gamma, \end{cases} \tag{13}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (13) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x,y,z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (12) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{V}\mathbf{A}_1)_x - (\mathbf{V}\mathbf{A}_2)_y - (\mathbf{V}\mathbf{A}_3)_z - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = (\mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{R}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_z, \tag{14}$$

которое может быть проверено непосредственно.

Вычислим значение $\mathbf{U}(\xi,\eta,\zeta)$, $(\xi,\eta,\zeta) \in G$. Первая строка (14) дает

$$r_{12} f_1 + r_{14} f_2 + r_{16} f_3 = (r_{11} u + r_{12} u_1)_x + (r_{13} v + r_{14} v_1)_y + (r_{15} w + r_{16} w_1)_z, \tag{15}$$

где $r_{1j} = r_{1j}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$, остальные функции зависят от (x,y,z). Интегрируем (15) по области $G_1 = \{x_0 < x < \xi,\ y_0 < y < \eta,\ z_0 < z < \zeta\}$:

$$\int\limits_{y_0}^{\eta} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{11} u + r_{12} u_1)(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{y_0}^{\eta} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{11} u + r_{12} u_1)(x_0, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma\, d\beta +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{\xi} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{13} v + r_{14} v_1)(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma\, d\alpha -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{\xi} \int\limits_{z_0}^{\zeta} (r_{13} v + r_{14} v_1)(\alpha, y_0, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma\, d\alpha +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta}(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)d\beta\,d\alpha-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_{y_0}^{\eta}(r_{15}w+r_{16}w_1)(\alpha,\beta,z_0,\xi,\eta,\zeta)d\beta\,d\alpha=$$

$$=\iiint\limits_{G_1}(r_{12}f_1+r_{14}f_2+r_{16}f_3)(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)d\alpha\,d\beta\,d\gamma. \tag{16}$$

В силу (13)

$$r_{11}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)\equiv 1,\quad r_{12}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=r_{13}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=$$
$$=r_{14}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta)=r_{15}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)=r_{16}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)\equiv 0.$$

Таким образом, (16) принимает вид

$$\int\limits_{y_0}^{\eta}\int\limits_{z_0}^{\zeta}u(\xi,\beta,\gamma)d\gamma\,d\beta=g_1(\xi,\eta,\zeta)$$

с функцией $g_1(\xi,\eta,\zeta)$, выраженной через данные (9) и элементы матрицы $\mathbf{R}$. Отсюда

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2 g_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta\partial\zeta}.$$

Аналогично, из третьей и пятой строк (14) выводим формулы, получающиеся из (16) заменой r_{1j} на r_{3j} и r_{5j} соответственно. Используя (13), получаем

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2 g_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\zeta},\quad w(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2 g_3(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\eta},$$

где $g_2(\xi,\eta,\zeta)$ и $g_3(\xi,\eta,\zeta)$ выражены через условия (9) и элементы матрицы $\mathbf{R}$.

2. Существование и единственность решения задачи с условиями на пяти сторонах характеристического прямоугольника. Различные задачи с условиями на сторонах характеристического прямоугольника для системы с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными рассмотрены в [14]. В параллелепипеде $G=\{x_0<x<x_1,\, y_0<y<y_1,\, z_0<z<z_1\}$, рассмотрим одну задачу с граничными условиями на пяти его сторонах X, Y, Z, $X_1=\{(x,y,z)|x=x_1,y_0<y<y_1,z_0<z<z_1\}$, $Y_1=\{(x,y,z)|y=y_1,x_0<x<x_1,z_0<z<z_1\}$. Отметим, что в отличие от рассмотренной ниже задачи, для получения условий разрешимости задач в [14] не требуется применение теоремы 2.

Задача 1. Найти в G регулярное решение (8), удовлетворяющее условиям

$$\begin{array}{ll} u(x_0,y,z)=\varphi_1(y,z), & (u_x-a_1v-b_1w)(x_1,y,z)=\chi_1(y,z),\\ v(x,y_0,z)=\varphi_2(x,z), & (v_y-a_2u-b_2w)(x,y_1,z)=\chi_2(x,z),\\ w(x,y,z_0)=\varphi_3(x,y), & (w_z-a_3u-b_3v)(x,y,z_0)=\psi_3(x,y),\end{array} \tag{17}$$

$\varphi_1(y,z)\in C^1(\overline{X})$, $\chi_1(y,z)\in C^1(\overline{X}_1)$, $\varphi_2(x,z)\in C^1(\overline{Y})$, $\chi_2(x,z)\in C^1(\overline{Y}_1)$, $\varphi_3(x,y)$, $\psi_3(x,y)\in C^1(\overline{Z})$.

Нам понадобятся формулы для u, u_1, v, v_1, w, w_1, получающиеся при решении основной характеристической задачи методом Римана (здесь и далее дифференцирование компонент матрицы Римана по ξ, η, ζ означает дифференцирование по второй тройке аргументов):

$$u(x,y,z)=r_{11}(x_0,y,z,x,y,z)u(x_0,y,z)+r_{12}(x_0,y,z,x,y,z)u_1(x_0,y,z)+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{11\eta}(x_0,\beta,z,x,y,z)u(x_0,\beta,z)+r_{12\eta}(x_0,\beta,z,x,y,z)u_1(x_0,\beta,z))d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{11\zeta}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u(x_0,y,\gamma)+r_{12\zeta}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,y,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{11\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{12\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{13\eta}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v(\alpha,y_0,z)+r_{14\eta}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{13\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{14\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{15\zeta}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w(\alpha,y,z_0)+r_{16\zeta}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,y,z_0))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{15\eta\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{16\eta\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}r_{12}(\alpha,y,z,x,y,z)f_1(\alpha,y,z)d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{12\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,z)+r_{14\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,z)+$$

$$+r_{16\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,z))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{12\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,y,\gamma)+r_{14\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,y,\gamma)+$$

$$+r_{16\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,y,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{12\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{14\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{16\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{18}$$

$$u_1(x,y,z)=r_{21}(x_0,y,z,x,y,z)u(x_0,y,z)+r_{22}(x_0,y,z,x,y,z)u_1(x_0,y,z)+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{21\eta}(x_0,\beta,z,x,y,z)u(x_0,\beta,z)+r_{22\eta}(x_0,\beta,z,x,y,z)u_1(x_0,\beta,z))d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\zeta}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u(x_0,y,\gamma)+r_{22\zeta}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,y,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{21\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{22\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{23\eta}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v(\alpha,y_0,z)+r_{24\eta}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{23\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{24\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{25\zeta}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w(\alpha,y,z_0)+r_{26\zeta}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,y,z_0))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{25\eta\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{26\eta\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}r_{22}(\alpha,y,z,x,y,z)f_1(\alpha,y,z)d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{22\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,z)+r_{24\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,z)+$$

$$+r_{26\eta}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,z))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,y,\gamma)+r_{24\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,y,\gamma)+$$

$$+r_{26\zeta}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,y,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{22\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{24\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{26\eta\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{19}$$

$$v(x,y,z)=r_{33}(x,y_0,z,x,y,z)v(x,y_0,z)+r_{34}(x,y_0,z,x,y,z)v_1(x,y_0,z)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{33\xi}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v(\alpha,y_0,z)+r_{34\xi}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{33\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v(x,y_0,\gamma)+r_{34\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(x,y_0,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{33\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{34\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{31\xi}(x_0,\beta,z,x,y,z)u(x_0,\beta,z)+r_{32\xi}(x_0,\beta,z,x,y,z)u_1(x_0,\beta,z))d\beta+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{31\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{32\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{35\zeta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w(x,\beta,z_0)+r_{36\zeta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w_1(x,\beta,z_0))d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{35\xi\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{36\xi\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}r_{34}(x,\beta,z,x,y,z)f_2(x,\beta,z)d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{32\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,z)+r_{34\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,z)+$$

$$+r_{36\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,z))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{32\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(x,\beta,\gamma)+r_{34\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(x,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{36\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(x,,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{32\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{34\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{36\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \qquad (20)$$

$$v_1(x,y,z)=r_{43}(x,y_0,z,x,y,z)v(x,y_0,z)+r_{44}(x,y_0,z,x,y,z)v_1(x,y_0,z)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{43\xi}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v(\alpha,y_0,z)+r_{44\xi}(\alpha,y_0,z,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,z))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v(x,y_0,\gamma)+r_{44\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(x,y_0,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{43\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{44\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{41\xi}(x_0,\beta,z,x,y,z)u(x_0,\beta,z)+r_{42\xi}(x_0,\beta,z,x,y,z)u_1(x_0,\beta,z))d\beta+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{41\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{42\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{45\zeta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w(x,\beta,z_0)+r_{46\zeta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w_1(x,\beta,z_0))d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{45\xi\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{46\xi\zeta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}r_{44}(x,\beta,z,x,y,z)f_2(x,\beta,z)d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{42\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,z)+r_{44\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,z)+$$

$$+r_{46\xi}(\alpha,\beta,z,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,z))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{42\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(x,\beta,\gamma)+r_{44\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(x,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{46\zeta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(x,,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{42\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{44\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{46\xi\zeta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \tag{21}$$

$$w(x,y,z)=r_{55}(x,y,z_0,x,y,z)w(x,y,z_0)+r_{56}(x,y,z_0,x,y,z)w_1(x,y,z_0)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{55\xi}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w(\alpha,y,z_0)+r_{56\xi}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,y,z_0))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{55\eta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w(x,\beta,z_0)+r_{56\eta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w_1(x,\beta,z_0))d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{55\xi\eta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{56\xi\eta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{51\xi}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u(x_0,y,\gamma)+r_{52\xi}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,y,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{51\xi\eta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{52\xi\eta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{53\eta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v(x,y_0,\gamma)+r_{54\eta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(x,y_0,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{53\xi\eta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{54\xi\eta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}r_{56}(x,y,\gamma,x,y,z)f_3(x,y,\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{52\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,y,\gamma)+r_{54\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,y,\gamma)+$$

$$+r_{56\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,y,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{52\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(x,\beta,\gamma)+r_{54\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(x,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{56\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(x,,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{52\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{54\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{56\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha; \qquad (22)$$

$$w_1(x,y,z)=r_{65}(x,y,z_0,x,y,z)w(x,y,z_0)+r_{66}(x,y,z_0,x,y,z)w_1(x,y,z_0)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}(r_{65\xi}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w(\alpha,y,z_0)+r_{66\xi}(\alpha,y,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,y,z_0))d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\eta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w(x,\beta,z_0)+r_{66\eta}(x,\beta,z_0,x,y,z)w_1(x,\beta,z_0))d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(r_{65\xi\eta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w(\alpha,\beta,z_0)+r_{66\xi\eta}(\alpha,\beta,z_0,x,y,z)w_1(\alpha,\beta,z_0))d\beta d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{61\xi}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u(x_0,y,\gamma)+r_{62\xi}(x_0,y,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,y,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{61\xi\eta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u(x_0,\beta,\gamma)+r_{62\xi\eta}(x_0,\beta,\gamma,x,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}(r_{63\eta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v(x,y_0,\gamma)+r_{64\eta}(x,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(x,y_0,\gamma))d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{63\xi\eta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v(\alpha,y_0,\gamma)+r_{64\xi\eta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}r_{66}(x,y,\gamma,x,y,z)f_3(x,y,\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{62\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,y,\gamma)+r_{64\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,y,\gamma)+$$

$$+r_{66\xi}(\alpha,y,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,y,\gamma))d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{62\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(x,\beta,\gamma)+r_{64\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(x,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{66\eta}(x,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(x,,\beta,\gamma))d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}(r_{62\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_1(\alpha,\beta,\gamma)+r_{64\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+r_{66\xi\eta}(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)f_3(\alpha,\beta,\gamma))d\gamma d\beta d\alpha. \tag{23}$$

При записи этих формул учтены уравнения (13), $i=\overline{1,6}$, для компонент матрицы Римана.

Для того чтобы свести задачу 1 к основной характеристической задаче, нужно определить недостающие данные $u_1(x_0,y,z)=(u_x-a_1v-b_1w)(x_0,y,z)$, $v_1(x,y_0,z)=(v_y-a_2u-b_2w)(x,y_0,z)$. Для этого положим в (19) $x=x_1$, а в (21) $y=y_1$. Получаем систему двух интегральных уравнений

$$r_{22}(x_0,y,z,x_1,y,z)u_1(x_0,y,z)+\int\limits_{y_0}^{y}r_{22\eta}(x_0,\beta,z,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\zeta}(x_0,y,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,y,\gamma)d\gamma+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{z_0}^{z}r_{22\eta\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x_1,y,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\gamma d\beta+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}r_{24\eta}(\alpha,y_0,z,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{z_0}^{z}r_{24\eta\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x_1,y,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\gamma d\alpha=$$

$$=F_{11}(y,z)+\chi_1(y,z), \tag{24}$$

$$r_{44}(x,y_0,z,x,y_1,z)v_1(x,y_0,z)+\int\limits_{x_0}^{x}r_{44\xi}(\alpha,y_0,z,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,z)d\alpha+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}r_{44\zeta}(x,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(x,y_0,\gamma)d\gamma+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{z_0}^{z}r_{44\xi\zeta}(\alpha,y_0,\gamma,x,y_1,z)v_1(\alpha,y_0,\gamma)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y_1}r_{42\xi}(x_0,\beta,z,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,z)d\beta+\int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{z_0}^{z}r_{42\xi\zeta}(x_0,\beta,\gamma,x,y_1,z)u_1(x_0,\beta,\gamma)d\gamma d\beta=$$

$$=F_{12}(x,z)+\chi_2(x,z), \tag{25}$$

функции F_{11}, F_{12} известны.

Пусть

$$a_1(x,y,z)=d_{10}(x,y,z)=d_2(x,y,z)\equiv 0,\quad c_1\geqslant 0. \tag{26}$$

Тогда $r_{24\eta}(x,y,z,\xi,\eta,z)\equiv 0$, $r_{22}(x_0,y,z,x_1,y,z)\neq 0$. Из уравнения (24) однозначно определяется $u_1(x_0,y,z)$ (теорема 2). Подставляя найденное значение $u_1(x_0,y,z)$ в уравнение (25), получаем для определения $v_1(x,y_0,z)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода (при $d_2(x,y,z)\equiv 0$ $r_{44}(x,y_0,z,x,y_1,z)\neq 0$). Это уравнение однозначно разрешимо. Таким образом, задача 1 редуцирована к основной характеристической задаче.

Аналогично разрешается система (24) – (25) при условиях

$$c_1(x,y,z)=a_2(x,y,z)=c_{20}(x,y,z)\equiv 0,\quad d_2\geqslant 0. \tag{27}$$

При этом сначала из уравнения (25) определяется $v_1(x,y_0,z)$, а затем из (24) — $u_1(x_0,y,z)$.

Теорема 4. *Если a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, $b_3\in C^2(\overline{G})$, c_1, c_{20}, c_{30}, d_{10}, d_2, d_{30}, e_{10}, e_{20}, e_3, f_1, f_2, $f_3\in C^1(\overline{G})$, и выполняется одно из условий (26), (27), то существует единственное решение задачи 1.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В. *Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций* // Дифференц. уравнения. Т. 34, № 4. 2002. С. 538–546.
2. J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York: M. Dekker, 2000. 560 p.
3. Калитвин А.С. *Линейные операторы с частными интегралами*, Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252Ёс.
4. Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными* // Матем. моделирование. Т. 6, № 6. 1994. С. 22–31.
5. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. Т. 18, № 9. 1982. С. 1614–1622.
6. Плещинская И.Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными* // Дифференц. уравнения. Т. 23, № 9. 1987. С. 1634–1637.
7. Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Матем. № 8. 2008. С. 70–72.
8. Воронова Ю.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Уфимский матем. журнал. Т. 2, вып. 2. 2010. С. 20–26.
9. Жибер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Уфимский матем. журнал. Т. 3. вып. 3. 2011. С. 67–79.
10. Созонтова Е.А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа* // Изв. вузов. Матем. № 10. 2013. С. 43–54.
11. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Т. 21, вып. 4. 2017. С. 752–759.
12. Миронова Л.Б. *О методе Римана в* R^n *для одной системы с кратными характеристиками* // Изв. вузов. Математика. № 1. 2006. С. 34–39.
13. Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Математика. № 3. 2007. С. 12–21.
14. Миронова Л.Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 43. 2006. С. 31–37.
15. Севастьянов В.А. *О методе И.Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра* // Казан. ун-т, 1997. Деп. в ВИНИТИ 24.04.97, № 1373–В97. 9 с.
16. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967. 576 с.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976. 544 с.
18. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1971. 512 с.
19. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Изд. Казанского математического общ-ва, 2001. 226 с.

Любовь Борисовна Миронова,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт,
ул. Казанская, 89,
423600, г. Елабуга, Россия
E-mail: `lbmironova@yandex.ru`