ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 99-117.

УДК 517.53

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА АЗАРИНА ФУНКЦИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

К.Г. МАЛЮТИН, Т.И. МАЛЮТИНА, Т.В. ШЕВЦОВА

Аннотация. В представленной статье рассматриваются интегралы вида

$$\int_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt\,,$$

где $\varphi(r)$ — гладкая, возрастающая функция на полуоси $[0,\infty)$ такая, что $\lim_{r\to+\infty}\varphi(r)=\infty$. Получены точные сведения об их асимптотическом поведении. Мы доказываем аналог леммы Римана–Лебега для тригонометрических интегралов. Применение этой леммы позволяет получить асимптотические формулы для интегралов с абсолютно непрерывной функцией. Предлагаемый метод получения асимптотических формул отличается от классических методов (метод Лапласа, применение теории вычетов, метод перевала и др.) Чтобы добиться большей цельности изложения мы, по большей части, ограничиваемся ядрами $\exp[i\ln^p(rt)]$. Соответствующие условия гладкости на функцию $f(t)$ позволяют получать многочленные формулы. Свойства интегралов и методы получения асимптотических оценок различаются для случаев $p\in(0,1)$, $p=1$, $p>1$. При $p\in(0,1)$ асимптотические разложения получаются уже другим методом — методом разложения ядра в ряд. Рассматриваются случаи, когда в качестве абсолютно непрерывной функции $f(t)$ берется произведение степенной функции t^ρ на ядро Пуассона или сопряженное ядро Пуассона для полуплоскости, а в качестве промежутка интегрирования берется мнимая полуось. Вещественные и мнимые части этих интегралов представляют собой гармонические функции в комплексной плоскости, разрезанной по положительному лучу. Найдены предельные множества Азарина для таких функций.

Ключевые слова: лемма Римана–Лебега, тригонометрический интеграл, асимптотическая формула, ядро Пуассона, гармоническая функция, предельное множество Азарина.

Mathematics Subject Classification: 30E15, 31C05

1. Введение

В этой статье мы рассматриваем интегралы вида

$$\int_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt\,,$$

где $\varphi(r)$ — гладкая, возрастающая функция на полуоси $[0,\infty)$ такая, что

$$\lim_{r\to+\infty}\varphi(r)=\infty,$$

и получаем точные сведения об их асимптотическом поведении.

K.G. Malyutin, T.I. Malyutina, T.V. Shevtsova, Azarin limiting sets of functions and asymptotic representation of integrals.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Поступила 18 июня 2018 г.

Ядро $\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]$ достаточно своеобразное. Например, в трехтомной монографии Э. Риекстыньша [1]–[3], где, в частности, рассматриваются интегралы вида $\int\limits_a^b f(t)K(rt)\,dt$, асимптотические разложения интегралов с такими ядрами не исследуются. Мы доказываем аналог леммы Римана–Лебега для тригонометрических интегралов (лемма 1). Применение этой леммы позволяет получить одночленные асимптотические формулы для интегралов с абсолютно непрерывной функцией $f(t)$ (теоремы 1, 2, 3). Заметим, что предлагаемый метод получения асимптотических формул отличается от классических методов (метод Лапласа, применение теории вычетов, метод перевала и др.), описанных в монографии М. А. Евграфова [4].

Чтобы добиться большей цельности изложения, мы, по большей части, ограничиваемся ядрами $\exp[i\ln^p(rt)]$. Соответствующие условия гладкости на функцию $f(t)$ позволяют получать многочленные формулы (теорема 4). Свойства интегралов и методы получения асимптотических оценок различаются для случаев $p\in(0,1)$, $p=1$, $p>1$. При $p\in(0,1)$ асимптотические разложения получаются уже другим методом — методом разложения ядра в ряд (теорема 5). Затем мы изучаем уже совсем конкретные функции, когда в качестве функции $f(t)$ берется произведение t^ρ на ядро Пуассона или сопряженное ядро Пуассона для полуплоскости, а в качестве промежутка интегрирования берется луч $[0,\infty)$. Вещественные и мнимые части этих интегралов, которые мы обозначаем $u_k(z)$, $k=3,4,5,6$, представляют собой гармонические функции в комплексной плоскости, разрезанной по положительному лучу.

Важной характеристикой роста субгармонической и, в частности, гармонической функции $u(z)$ является ее предельное множество Азарина [5] $\operatorname{Fr} u$. Это предельное множество семейства функций $u_t(z)=u(tz)/t^\rho$ (ρ — порядок u) при $t\to+\infty$ в топологии пространства обобщенных функций Шварца. В случае $p\in(0,1)$ мы находим предельное множество Азарина функций $u_k(z)$. Предельное множество Азарина несет в себе больше информации о поведении субгармонических функций в окрестности бесконечности, чем индикатор. Общая теория дает теорему о характеризации предельных множеств Азарина и гарантирует существование субгармонических функций с заданным предельным множеством. Однако, мы даем примеры конкретных функций нерегулярного роста, для которых вычисляется предельное множество Азарина. До сих пор асимптотические оценки, в основном, строились для функций вполне регулярного роста. Такие функции хорошо приближают некоторые субгармонические функции с корнями на одном луче. Мы указываем такие функции. Тем самым, мы указываем широкий набор субгармонических функций нерегулярного роста с известным асимптотическим поведением. Заметим, что в книге Б. Я. Левина [6] приведены асимптотические формулы для класса целых функций вполне регулярного роста. Целые функции вполне регулярного роста изучены наиболее полно, встречаются в большом количестве работ и имеют разнообразные применения. Однако, современные исследования вопросов полноты и представления рядами в функциональных пространствах, проблем теории аналитического продолжения, задач теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и операторов типа свертки требуют систематического изучения целых функций, не обладающих сколь-нибудь правильным поведением. Поэтому актуальной является разработка методов решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений для основных асимптотических характеристик роста целых функций из весьма общих и естественных классов. В последнее время появились многочисленные работы, посвященные этой тематике. Отметим совместную работу Г. Г. Брайчева и В. Б. Шерстюкова [7], и работу В. Б. Шерстюкова [8].

2. Об одном аналоге теоремы Римана–Лебега

Мы начнем с аналога леммы Римана–Лебега [9, с. 49] о стремлении к нулю коэффициентов Фурье произвольной интегрируемой функции.

Лемма 1. *Пусть $f(t) \in L_1([a,b])$, $0 \leqslant a < b < +\infty$, и пусть $\varphi(r)$ — возрастающая, дважды дифференцируемая функция на полуоси $[0,+\infty)$ такая, что*

$$\lim_{r\to+\infty} \varphi(r) = \infty\,, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{r^2\varphi''(r)\ln r}{(r\varphi'(r)\ln r + \varphi(r))^2} = 0\,. \tag{1}$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt = 0\,.$$

Доказательство. Заметим, что если $f(t) \in L_1([a,b])$, то справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(t)|\,dt = \|f\|_1\,. \tag{2}$$

Пусть через E обозначено множество функций $f(t) \in L_1([a,b])$, для которых справедливо утверждение леммы. Из (1) и (2) следует, что E является замкнутым подмножеством в $L_1([a,b])$ (относительно топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_1$). Очевидно, также, что E является линейным подпространством пространства $L_1([a,b])$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что E содержит хотя бы одно множество функций, конечные линейные комбинации которых плотны в $L_1([a,b])$. Можно указать много таких множеств. В качестве примера возьмем множество $C_1([a,b])$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$.

Пусть $f \in C_1([a,b])$ и пусть вначале $a > 0$. Заметим, что при $r > 1/a$

$$\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt = \frac{t\,d(\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)])}{i(rt\varphi'(rt)\ln(rt) + \varphi(rt))}\,.$$

После интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt = \left.\frac{f(t)t\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]}{i(rt\varphi'(rt)\ln(rt) + \varphi(rt))}\right|_a^b -$$

$$-\frac{1}{i}\int\limits_a^b \left[\frac{f'(t)t + f(t)}{rt\varphi'(rt)\ln(rt) + \varphi(rt)} -\right.$$

$$\left.-\ \frac{f(t)t(r\varphi'(rt)\ln(rt) + r^2t\varphi''(rt)\ln(rt) + 2r\varphi'(rt))}{(rt\varphi'(rt)\ln(rt) + \varphi(rt))^2}\right]\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt\,.$$

Из (1) следует, что правая часть последнего равенства стремится к нулю при $r \to +\infty$.

Если $a = 0$, $f \in L_1([0, b])$, то по заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_0^\delta f(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда, учитывая равенство $|\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]| = 1$, имеем

$$\left|\int\limits_0^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt]|\, dt\right| = \left|\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^b\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int\limits_\delta^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt]|\, dt\right|,$$

откуда, по первой части доказательства, получим утверждение леммы. □

Замечание 1. В лемме 1, как и в лемме Римана–Лебега, не оценивается скорость стремления к нулю интеграла. Это и в принципе невозможно сделать при ограничении $f \in L_1([a, b])$. При дополнительных ограничениях на гладкость функции f с помощью интегрирования по частям можно получить более детальную информацию об асимптотическом поведении интеграла.

Замечание 2. Ограничениям (1) удовлетворяет достаточно широкий класс функций. Например, ему удовлетворяют функции $\varphi(r) = (\ln r)^\sigma$, $\varphi(r) = r^\sigma$, $\varphi(r) = \exp(r^\sigma)$ $(\sigma > 0)$ и т. п.

3. Асимптотические формулы для интегралов

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, $\rho \in \mathbb{R}$, и пусть функция $\varphi(r)$ удовлетворяет условию (1). Тогда при $r \to +\infty$*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_a^b f(t)\, d(t^\rho\cos[\varphi(rt)\ln(rt)]) = \\
&= b^\rho f(b)\cos[\varphi(br)\ln(br)] - a^\rho f(a)\cos[\varphi(ar)\ln(ar)] + o(1), \\
&\int\limits_a^b f(t)\, d(t^\rho\sin[\varphi(rt)\ln(rt)]) = \\
&= b^\rho f(b)\sin[\varphi(br)\ln(br)] - a^\rho f(a)\sin[\varphi(ar)\ln(ar)] + o(1)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Докажем первую формулу в (3). Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_a^b f(t)\, d(t^\rho\cos[\varphi(rt)\ln(rt)]) =$$

$$= f(t)\, t^\rho\cos[\varphi(rt)\ln(rt)]\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(t)\, t^\rho\cos[\varphi(rt)\ln(rt)]\, dt\,.$$

Так как $f' \in L_1([a, b])$, то по лемме 1 интеграл в правой части сходится к нулю при $r \to +\infty$.

Вторая формула в (3) доказывается аналогично. □

Рассмотрим теперь частный случай $\varphi(r) = (\ln r)^\alpha$, где $\alpha > 0$ — постоянное число. В этом случае мы получаем формулы для предельного множества интегралов в (3) по направлению $r \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, $0 < a < b < \infty$, и пусть $\rho \in \mathbb{R}$, $p > 1$ — постоянные числа. Тогда предельное множество интегралов*

$$\int\limits_a^b f(t)\,d(t^\rho \cos[(\ln(rt))^p]), \qquad \int\limits_a^b f(t)\,d(t^\rho \sin[(\ln(rt))^p])$$

по направлению $r \to +\infty$ совпадает с сегментом

$$[-a^\rho|f(a)| - b^\rho|f(b)|,\ a^\rho|f(a)| + b^\rho|f(b)|]\ .$$

Доказательство. Предварительно докажем лемму.

Лемма 2. *Пусть φ — T-периодическая, непрерывная функция, число $p > 1$, $A = \varphi([0,T))$, a, b — произволные числа, $0 < a < b < \infty$. Тогда предельное множество функции $(\varphi((x+a)^p), \varphi((x+b)^p))$: $(-a, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ при $x \to +\infty$ совпадает с декартовым квадратом $A \times A$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \big(x^{1/p} + c\big)^p$, тогда для $x > |c|^p$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{c}{x^{1/p}}\right)^{p-1} = 1 + \frac{c(p-1)}{x^{1/p}} + \dots\ .$$

Зафиксируем число $x \in [0,T)$ и определим последовательность x_k условием

$$x_k = (x + kT)^{1/p} - a, \quad (x_k + a)^p = x + kT, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Обозначим

$$w_k = (x_k + b)^p = \big((x+kT)^{1/p} + b - a\big)^p = y_k + j(k)\,T\,,$$

где $j(k) \in \mathbb{N},\ y_k \in [0,T)$.

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$w_{k+1} - w_k = \big((x + (k+1)T)^{1/p} + b - a\big)^p - \big((x+kT)^{1/p} + b - a\big)^p =$$
$$= T\left(1 + \frac{b-a}{(x + (k+\theta)T)^{1/p}}\right)^{p-1} = T\left(1 + \frac{(b-a)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}} + \dots\right) =$$
$$= T + \Delta_k, \quad \theta \in (0,1)\,.$$

Ясно, что

$$\Delta_k = T\left(\frac{(b-a)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}} + \frac{(b-a)(p-1)(p-2)}{2(x+(k+\theta)T)^{2/p}} + \dots\right) \sim$$
$$\sim T\frac{(b-a)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}}, \quad k \to \infty\,.$$

Таким образом, последовательность Δ_k обладает свойствами:

1) $\Delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\Delta_k \geqslant 0$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$,

3) если $w_k = y_k + j(k)T,\ j(k) \in \mathbb{N},\ y_k \in [0,T)$, то

$$w_{k+1} = y_k + \Delta_k + (j(k)+1)\,T\,. \tag{4}$$

Из свойств 1), 2), 3) следует, что предельное множество последовательности y_k при $k \to \infty$ есть весь полусегмент $[0,T)$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $y \in [0,T)$. Обозначим $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, T-y\}$. Тогда $\varepsilon_1 > 0$. Пусть k_0 такое число, что при $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство $\Delta_k < \varepsilon_1$. По определению $y_{k_0} \in [0,T)$. Из формулы (4) следует, что

$$w_{k_0+m} = y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \Delta_{k_0+1} + \cdots + \Delta_{k_0+m-1} + (j(k_0)+m)\,T\,,$$

при любом $m \in \mathbb{N}$. Из расходимости ряда $\Delta_{k_0}+\Delta_{k_0+1}+\ldots$ следует, что существует наименьшее число m такое, что будет выполняться неравенство $y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \cdots + \Delta_{k_0+m-1} > T + y$. Тогда

$$y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \cdots + \Delta_{k_0+m-1} = T + y + \delta\,,$$

где $0 < \Delta_{k_0+m-1} < \varepsilon_1$.

Очевидно, что $0 < y + \delta < T$. Тогда

$$w_{k_0+m} = y_{k_0+m} + (j(k_0)+m+1)\,T, \quad y_{k_0+m} = y + \delta\,.$$

Так как $0 < \delta < \varepsilon_1 < \varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то y принадлежит предельному множеству последовательности y_k. Поскольку число y выбрано произвольно из полуинтервала $[0,T)$, то лемма доказана. $\square$

Теорема 2 теперь следует из леммы 2, если заметить, что $\ln(ra) = \ln r + \ln a$, и положить $x = \ln r$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, $0 < a < b < \infty$, и пусть $p > 1$. Тогда при $r \to +\infty$*

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b f(t)\cos[\ln^p(rt)]\,dt = \\ = \frac{1}{p\ln^{p-1} r}[bf(b)\sin[\ln^p(br)] - af(a)\sin[\ln^p(ar)]] + \frac{o(1)}{\ln^{p-1} r}, \\ \int\limits_a^b f(t)\sin[\ln^p(rt)]\,dt = \\ = \frac{1}{p\ln^{p-1} r}[af(a)\cos[\ln^p(ar)] - bf(b)\cos[\ln^p(br)]] + \frac{o(1)}{\ln^{p-1} r}\,.\end{gathered} \tag{5}$$

В частности, предельное множество функций

$$p\ln^{p-1} r \int\limits_a^b f(t)\cos[\ln^p(rt)]\,dt, \quad p\ln^{p-1} r \int\limits_a^b f(t)\sin[\ln^p(rt)]\,dt$$

по направлению $r \to +\infty$ совпадает с сегментом

$$[-a|f(a)| - b|f(b)|,\ a|f(a)| + b|f(b)|].$$

Теорема доказывается так же, как и теоремы 1, 2.

Если $f(t)$ имеет несколько производных, то интегрирование по частям можно повторять, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ю производную $f^{(k-1)}(t)$ на сегменте $[a,b]$, $0<a<b<\infty$, $k\geqslant 1$, и пусть $p>1$. Тогда*

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b f(t)\cos(\ln rt)^p\,dt=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}(-1)^m\,\frac{t\Phi_{2m}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\sin(\ln rt)^p\Big|_a^b+\\+\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{|k-2|}{2}\rfloor}(-1)^m\,\frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\cos(\ln rt)^p\Big|_a^b+\frac{o(1)}{(\ln r)^{k(p-1)}},\quad r\to+\infty\,,\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$\Phi_m(t)=L^m[f(t)],\quad L[f(t)]=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\frac{tf(t)}{(\ln rt)^{p-1}}\,.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b f(t)\cos(\ln rt)^p\,dt=\sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^m\,\frac{t\Phi_{2m}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\sin(\ln rt)^p\Big|_a^b+\\+\sum_{m=0}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^m\,\frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\cos(\ln rt)^p\Big|_a^b+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\int\limits_a^b\frac{t\Phi_k(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\,d\left[\cos(\ln rt)^p\right]\end{gathered}\tag{7}$$

при нечетном k, а при четном k последнее слагаемое в правой части (7) имеет вид

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\int\limits_a^b\frac{t\Phi_k(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\,d\left[\sin(\ln rt)^p\right]\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и равенства

$$\cos(\ln rt)^p\,dt=\frac{t\,d\left[\sin(\ln rt)^p\right]}{p(\ln rt)^{p-1}},\quad \sin(\ln rt)^p\,dt=-\frac{t\,d\left[\cos(\ln rt)^p\right]}{p(\ln rt)^{p-1}}\,,\tag{8}$$

получим

$$\int\limits_a^b f(t)\cos(\ln rt)^p\,dt=\frac{t\Phi_0(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\sin(\ln rt)^p\Big|_a^b-\int\limits_a^b\Phi_1(t)\sin(\ln rt)^p\,dt\,.$$

Справедливость формулы (7) при $k=1$ установлена. Пусть формула (7) справедлива при всех нечетных $k\leqslant m$, а функция $f(t)$ имеет $(m+1)$-ю абсолютно непрерывную производную на сегменте $[a,b]$. Применяя дважды формулу интегрирования по частям и равенства (8), получим

$$\begin{gathered}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\int\limits_a^b\frac{t\Phi_m(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\,d\left[\cos(\ln rt)^p\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{t\Phi_m(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\cos(\ln rt)^p\Big|_a^b+\\+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\int\limits_a^b\frac{t\Phi_{m+1}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\,d\left[\sin(\ln rt)^p\right]=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{t\Phi_{m+1}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\sin(\ln rt)^p\Big|_a^b+\\+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{t\Phi_m(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\cos(\ln rt)^p\Big|_a^b+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\int\limits_a^b\frac{t\Phi_{m+2}(t)}{p(\ln rt)^{p-1}}\,d\left[\cos(\ln rt)^p\right]\,.\end{gathered}$$

Таким образом, формула (7) справедлива и при $k = m + 2$. На основании принципа математической индукции отсюда следует ее справедливость при всех нечетных $k \geqslant 1$. Для четных k доказательство аналогично. Формула (6) следует из (7), если заметить, что

$$\Phi_k(t) = \frac{O(1)}{(\ln r)^{(k+1)(p-1)}}, \qquad r \to +\infty\,.$$

$\square$

Замечание. Очевидно, что для бесконечно дифференцируемой функции $f(t)$ асимптотическая формула (6) справедлива при любом k.

В случае когда $p \in (0,1)$ асимптотическое разложение интеграла получается не с помощью интегрирования по частям, а разложением ядра.

Теорема 5. *Пусть $f(t) \in L_1([a,b])$, $0 < a < b < \infty$, и пусть $p \in (0,1)$. Тогда при $r > \max\{b,\, 1/a\}$ справедливо разложение*

$$\int\limits_a^b f(t)\exp(i\lambda(\ln rt)^p)\,dt = \exp(i\lambda \ln^p r)\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{n,k}}{(\ln r)^{k(1-p)+n}}\right), \tag{9}$$

где

$$\alpha_0 = \int\limits_a^b f(t)\,dt, \quad \alpha_{n,k} = \frac{i^k\lambda^k}{k!}c_{n,k}\int\limits_a^b f(t)(\ln t)^{n+k}\,dt\,,$$

а коэффициенты $c_{n,k}$ определяются из разложения

$$\left(\frac{1}{x}((1+x)^p - 1)\right)^k = \sum_{n=-k+1}^{\infty} c_{n,k}\,x^n\,.$$

Двойной ряд в формуле (9) *является абсолютно сходящимся при достаточно больших r. Разложение* (9) *справедливо как асимптотическое разложение в случае, если $a = 0$ и*

$$\int\limits_0 t^{-\varepsilon}|f(t)|\,dt < \infty$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Это разложение справедливо как асимптотическое разложение и в случае $b = \infty$,

$$\int\limits^{\infty} t^{\varepsilon}|f(t)|\,dt < \infty\,.$$

Доказательство. Воспользовавшись разложением функции e^x в ряд Тейлора и равенством

$$\exp\left(i\lambda(\ln rt)^p\right) = \exp\left(i\lambda\ln^p r\right)\exp\left(i\lambda\ln^{p-1} r\ln t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^p - 1\right)\right),$$

получим

$$\int\limits_a^b f(t)\exp(i\lambda(\ln rt)^p)\,dt =$$

$$= \exp\left(i\lambda\ln^p r\right)\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k\lambda^k}{\ln^{k(1-p)} r}\int\limits_a^b f(t)\ln^k t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^p - 1\right)^k\right)\,dt\,.$$

Обозначив $x = \ln t/\ln r$, мы получим разложение (9). Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при при $r > \max\{b,\, 1/a\}$ выполняется неравенство $|\ln t| < |\ln r|$. Заключительная часть теоремы следует из того, что сходимость интеграла

$$\int\limits_0 t^{-\varepsilon}|f(t)|\,dt < \infty \quad \left(\int\limits^{\infty} t^{\varepsilon}|f(t)|\,dt < \infty\right)$$

влечет за собой сходимость интеграла

$$\int\limits_0 f(t)\,(\ln t)^k\;dt < \infty \quad \left(\int\limits^{\infty} f(t)\,(\ln t)^k\;dt < \infty\right)$$

при любом $k > 0$. $\square$

Замечание. Коэффициенты $c_{n,k}$ можно записать в конечном виде, если вначале воспользоваться формулой Ньютона для бинома $((1+x)^p - 1)^k$, а затем использовать разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^{mp}$. В результате для любых целых $k \geqslant 1$ и $n \geqslant -k+1$ имеем

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{mp(mp-1)\cdots(mp-(n+k)+1)}{(n+k)!}\,.$$

4. Предельное множество Азарина некоторых функций

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u_1(z,p,\rho,\lambda) &= \frac{r\sin\theta}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau^{\rho}\exp(i\lambda|\ln\tau|^p)}{\tau^2 - 2\tau r\cos\theta + r^2}\,d\tau = \\ &= \frac{r^{\rho}\sin\theta}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\rho}\exp(i\lambda|\ln tr|^p)}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u_2(z,p,\rho,\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau^{\rho-1}r(r-\tau\cos\theta)}{\tau^2 - 2\tau r\cos\theta + r^2}\exp(i\lambda|\ln\tau|^p)\,d\tau = \\ &= \frac{r^{\rho}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\exp(i\lambda|\ln tr|^p)\,dt\,, \end{aligned} \tag{11}$$

$$u_3(z,p,\rho,\lambda) = \operatorname{Re} u_1(z,p,\rho,\lambda), \quad u_4(z,p,\rho,\lambda) = \operatorname{Im} u_1(z,p,\rho,\lambda),$$
$$u_5(z,p,\rho,\lambda) = \operatorname{Re} u_2(z,p,\rho,\lambda), \quad u_6(z,p) = \operatorname{Im} u_2(z,p,\rho,\lambda),$$

где $z = re^{i\theta}$, $\rho \in (0,1)$, $p > 0$, $\lambda \geqslant 0$. Причем при $p = 1$ мы, чтобы получить более простую функцию, знак модуля всюду опускаем.

Методом комплексного интегрирования вычисляются следующие интегралы

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\rho}\,dt}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} = \frac{\sin\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}, \qquad \theta \in (0,2\pi), \quad \rho \in (0,1)\,, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}\,dt}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} = \frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}, \qquad \theta \in (0,2\pi), \quad \rho \in (0,1)\,. \tag{13}$$

Теорему 5 можно применять для случаев $a = 0$, $b = \infty$,

$$f(t) = \frac{\sin\theta}{\pi}\,\frac{t^\rho}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} \quad \text{или} \quad f(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1 - t\cos\theta)t^{\rho-1}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,,$$

где $\theta \in (0, 2\pi)$, $\rho \in (0, 1)$. При $p \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $\rho \in (0, 1)$, $\lambda \geqslant 0$ согласно этой теореме получаем соотношения

$$u_3(z, p, \rho, \lambda) = \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho \cos(\lambda \ln^p r) + \frac{O(1)r^\rho}{\ln^{1-p} r}, \quad r \to +\infty\,, \tag{14}$$

$$u_4(z, p, \rho, \lambda) = \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho \sin(\lambda \ln^p r) + \frac{O(1)r^\rho}{\ln^{1-p} r}, \quad r \to +\infty\,,$$

и аналогичные формулы для $u_5(z, p, \rho, \lambda)$, $u_6(z, p, \rho, \lambda)$ с заменой $\sin\rho(\pi-\theta)$ на $\cos\rho(\pi-\theta)$. Именно,

$$u_5(z, p, \rho, \lambda) = \frac{\cos\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho \cos(\lambda \ln^p r) + \frac{O(1)r^\rho}{\ln^{1-p} r}, \quad r \to +\infty\,,$$

$$u_6(z, p, \rho, \lambda) = \frac{\cos\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho \sin(\lambda \ln^p r) + \frac{O(1)r^\rho}{\ln^{1-p} r}, \quad r \to +\infty\,.$$

Для введенных нами функций предельные множества Азарина описываются соотношениями

$$\operatorname{Fr} u_3 = \operatorname{Fr} u_4 = \left\{\alpha \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho : \ \alpha \in [-1, 1]\right\}\,, \tag{15}$$

$$\operatorname{Fr} u_5 = \operatorname{Fr} u_6 = \left\{\alpha \frac{\cos\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho : \ \alpha \in [-1, 1]\right\}$$

при значениях параметров $\rho \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$, $\lambda > 0$.

Докажем, например, соотношение (15). Пусть $\alpha \in [-1, 1]$, α — фиксированное число. Введем обозначения

$$u_t(z) = \frac{u_3(tz, p)}{t^\rho}, \quad t_n = \exp\left(\left(\frac{1}{\lambda}(\arccos\alpha + 2\pi n)\right)^{1/p}\right)\,.$$

Из (14) следует, что при любом фиксированном $r > 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{gathered} \left|u_{t_n}(re^{i\theta}) - \alpha \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho\right| = \\ = \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho \left|\cos\left(\lambda \ln^p t_n r\right) - \alpha + \frac{O(1)r^\rho}{\ln^{1-p} t_n r}\right|, \quad n \to \infty\,. \end{gathered} \tag{16}$$

Из определения последовательности t_n и асимптотического равенства

$$(a + x_n)^p = x_n^p + pa/x_n^{1-p} + O\left(1/x_n^{2-p}\right), \quad x_n \to \infty\,,$$

следует, что при любом фиксированном $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\lambda \ln^p t_n r\right) - \alpha\right) = 0\,.$$

Отсюда и из (16) получаем, что внутри круга $\{z : |z| \leqslant R\}$ последовательность $u_{t_n}(z)$ равномерно сходится к функции

$$w_\alpha(re^{i\theta}) = \alpha \frac{\sin\rho(\pi - \theta)}{\sin\rho\pi} r^\rho\,.$$

Тем более сходимость имеет место в топологии пространства обобщённых функций Шварца на плоскости. Из определения предельного множества следует, что

$\{w_\alpha(z) : \alpha \in [-1,1]\} \subset \mathrm{Fr}\, u_3$. Так как из любой последовательности $t_n \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность вида

$$t_{n_k} = \exp\left(\left(\frac{\arccos \alpha_{n_k} + 2\pi n_k}{\lambda}\right)^{1/p}\right),$$

где n_k — натуральное, $\alpha_{n_k} \to \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, то других функций в предельном множестве не существует.

Если $h_k(\theta)$ — индикатор Фрагмена–Линделефа функции $u_k(z,p)$, т. е.

$$h_k(\theta) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{u_k(re^{i\theta}, p)}{r^\rho},$$

то справедливы равенства

$$h_3(\theta) = h_4(\theta) = \frac{|\sin\rho(\pi-\theta)|}{\sin\rho\pi}, \quad h_5(\theta) = h_6(\theta) = \frac{|\cos\rho(\pi-\theta)|}{\sin\rho\pi}.$$

Характер асимптотических формул резко меняется при переходе к случаям $p = 1$ или $p > 1$.

Теорема 6. *Пусть $p = 1$, $\rho \in (0,1)$, $\lambda \geqslant 0$. Тогда*

$$u_3(z,1,\rho,\lambda) = [A_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) - B_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho, \tag{17}$$

$$u_4(z,1,\rho,\lambda) = [B_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) + A_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho,$$

$$u_5(z,1,\rho,\lambda) = [C_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) - D_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho,$$

$$u_6(z,1,\rho,\lambda) = [D_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) + C_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho,$$

где

$$A_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Re}\,\frac{\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi}, \quad B_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Im}\,\frac{\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi},$$

а аналогичные формулы для величин $C_\rho(\lambda,\theta)$ и $D_\rho(\lambda,\theta)$ получаются заменой $\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)$ на $\cos(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)$, т. е.

$$C_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Re}\,\frac{\cos(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi}, \quad D_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Im}\,\frac{\cos(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi}.$$

Доказательство. Заметим вначале, что из написанных выше равенств легко получить, что для функции $u_5(z,1,\rho,\lambda)$, например, справедливы формулы

$$\mathrm{Fr}\, u_5(z,1,\rho,\lambda) = \{(C_\rho(\lambda,\theta)\sin\varphi - D_\rho(\lambda,\theta)\cos\varphi)r^\rho :\ \varphi \in [0,2\pi]\}, \tag{18}$$

$$h_5(\theta) = \sqrt{C_\rho^2(\lambda,\theta) + D_\rho^2(\lambda,\theta)}.$$

Аналогичные формулы выполнены и для $u_3(z,1,\rho,\lambda)$, $u_4(z,1,\rho,\lambda)$, $u_6(z,1,\rho,\lambda)$.

Докажем одно из этих равенств. Имеем

$$u_3(z,1,\rho,\lambda) = \frac{r^\rho\sin\theta}{\pi}\,\mathrm{Re}\, r^{i\lambda}\int_0^\infty \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2-2t\cos\theta+1}\,dt.$$

Из формулы (12) методом аналитического продолжения по параметру ρ получаем выражение

$$\int_0^\infty \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2-2t\cos\lambda+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin\theta}\,\frac{\sin(\pi-\theta)(\rho+i\lambda)}{\sin\pi(\rho+i\lambda)},$$

откуда и следует формула (17). Равенство (18) получается теми же рассуждениями, что и равенство (15). $\square$

Рассмотрим теперь функции $u_k(z,p,\rho,\lambda)$ при $p>1$. Мы докажем асимптотическую формулу только для функции $u_1(z,p,\rho,\lambda)$.

Теорема 7. *Пусть $p>1$, $\rho\in(0,1)$, $\lambda>0$. Тогда при $p\in(1,2]$ имеем*

$$u_1(z,p,\rho,\lambda)=\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda|\tau|^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau+$$

$$+\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{0}^{i\infty}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau+$$

$$+r^\rho e^{i\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(2\pi i\rho n)\exp(i\lambda(\ln r+i(\theta+2\pi n))^p)-$$

$$-r^\rho e^{-i\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(2\pi i\rho(n+1))\exp(i\lambda(\ln r+i(2\pi(n+1)-\theta))^p)\,,$$

причем каждый из написанных рядов является сходящимся и асимптотическим одновременно. При $p>2$, если прямая $\operatorname{Im}\tau=s$ не содержит полюсов знаменателя, справедлива формула

$$u_1(z,p,\rho,\lambda)=\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda|\tau|^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau+$$

$$+\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{0}^{is}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau+\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{is}^{is+\infty}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau+$$

$$+r^\rho e^{i\rho\theta}\sum_{0\leqslant n<\frac{s-\theta}{2\pi}}\exp(2\pi i\rho n+i\lambda(\ln r+i(\theta+2\pi n))^p)-$$

$$-r^\rho e^{i\rho\theta}\sum_{0\leqslant n<\frac{s+\theta}{2\pi}-1}\exp(2\pi i\rho(n+1)+i\lambda(\ln r+i(2\pi(n+1)-\theta))^p)\,,$$

причем каждое слагаемое в написанных суммах стремится к нулю при $z\to\infty$ быстрее любой степени z. Если во всех написанных выше интегралах ядро $1/\left(e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1\right)$ разложить по степеням $1/r$, то почленное интегрирование даст разложение соответствующего интеграла в асимптотический степенной ряд по степеням $1/r$.

Доказательство. В интеграле (10) сделаем замену $t=\exp v$. Тогда

$$u_1(z,p,\rho,\lambda)=\frac{r^\rho\sin\theta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[(\rho+1)v+i\lambda|v+\ln r|^p\right]}{e^{2v}-2e^{v}\cos\theta+1}\,dv\,.$$

После очередной замены $v=\tau-\ln r$ получим

$$u_1(z,p,\rho,\lambda)=\frac{\sin\theta}{\pi r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda|\tau|^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau\,.$$

Знаменатель в последнем интеграле обращается в нуль в точках

$$\tau=\ln r\pm i\theta+2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\,.$$

Пусть L_s — прямоугольник с вершинами в точках θ, R, $R+is$, is, причем число s выбирается так, чтобы на границу прямоугольника не попадали выписанные выше нули. Функция

$$f(\tau)=\frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}$$

голоморфна внутри прямоугольника L_s за исключением конечного числа полюсов τ_k. По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L_s}\frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,d\tau=\sum_{\tau_k\in L_s}\mathrm{Res}_{\tau_k}f(\tau)\,,$$

где ∂L_s — граница прямоугольника L_s, проходимая в положительном направлении. Так как все полюсы у функции f простые, то

$$\mathrm{Res}_{\tau_k}f(\tau)=\frac{\exp\left((\rho+1)\tau_k+i\lambda\tau_k^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r+1}\,.$$

Если $\tau_k=\tau_{1,n}=\ln r+i(\theta+2n\pi)$, то

$$\mathrm{Res}_{\tau_{1,n}}f(\tau)=\frac{r^{\rho+1}e^{i(\rho+1)\theta}\exp(2n\pi\rho i+i\lambda\tau_{1,n}^p)}{2e^{i\theta}(e^{i\theta}-\cos\theta)}=\frac{r^{\rho+1}e^{i\rho\theta}\exp(2n\pi\rho i+i\lambda\tau_{1,n}^p)}{2i\sin\theta}\,.$$

Если $\tau_k=\tau_{2,n}=\ln r+i(2(n+1)\pi-\theta)$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{\tau_{2,n}}f(\tau)&=\frac{r^{\rho+1}e^{-i(\rho+1)\theta}\exp(2(n+1)\pi\rho i+i\lambda\tau_{2,n}^p)}{2e^{-i\theta}(e^{-i\theta}-\cos\theta)}=\\&=\frac{r^{\rho+1}e^{-i\rho\theta}\exp(2(n+1)\pi\rho i+i\lambda\tau_{2,n}^p)}{2i\sin\theta}\,.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial L_s}\frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\cos\theta e^{\tau}/r+1}\,d\tau&=\pi\sum_{0\leqslant n<(s-\theta)/(2\pi)}\frac{r^{\rho+1}e^{i\rho\theta}\exp(2n\pi\rho i+i\lambda\tau_{1,n}^p)}{\sin\theta}-\\&-\pi\sum_{0\leqslant n<(s+\theta)/(2\pi)-1}\frac{r^{\rho+1}e^{-i\rho\theta}\exp(2(n+1)\pi\rho i+i\lambda\tau_{2,n}^p)}{\sin\theta}\,,\end{aligned}$$

где сумму по пустому множеству считаем равной нулю. Обозначим через I_1 отрезок $[0,R]$, через I_2 — отрезок $[R,R+is]$, через I_3 — отрезок $[0,is]$, через I_4 — отрезок $[is,R+is]$. Тогда

$$\int\limits_{\partial L_s}f(\tau)\,d\tau=\int\limits_{I_1}f(\tau)\,d\tau+\int\limits_{I_2}f(\tau)\,d\tau-\int\limits_{I_3}f(\tau)\,d\tau-\int\limits_{I_4}f(\tau)\,d\tau\,.$$

Если теперь $\tau=R+iu$, где $0\leqslant u\leqslant s$, а число R достаточно большое, то $\tau^p=R^p(1+iu/R)^p$. Отсюда следует, что $\mathrm{Im}\,\tau^p\geqslant 0$. Кроме того,

$$\left|\frac{e^{2\tau}}{r^2}-2\cos\theta\,\frac{e^{\tau}}{r}+1\right|\geqslant\left(\frac{e^R}{r}-1\right)^2\,.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{I_2}f(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{e^{(\rho+1)R}}{\left(e^R/r-1\right)^2}\,s,\quad\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{I_2}f(\tau)\,d\tau=0\,.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau=\int\limits_0^{is} \frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{\exp\left((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau+\pi r^{\rho+1}e^{i\rho\theta}\sum_{0\leqslant n<(s-\theta)/(2\pi)}\frac{\exp(2n\pi\rho i+i\lambda\tau_{1,n}^p)}{\sin\theta}-$$
$$-r^{\rho+1}e^{-i\rho\theta}\pi\sum_{0\leqslant n<(s+\theta)/(2\pi)-1}\frac{\exp(2(n+1)\pi\rho i+i\lambda\tau_{2,n}^p)}{\sin\theta}\,,$$

$$u_1(z,p,\rho,\lambda)=\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^0\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau+$$
$$+\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_0^{is}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau+\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{is}^{is+\infty}\frac{\exp\left[(\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p\right]}{e^{2\tau}/r^2-2\left(\cos\theta\right)e^\tau/r+1}\,d\tau+ \tag{19}$$
$$+r^\rho e^{i\rho\theta}\sum_{0\leqslant n<(s-p)/(2\pi)}\exp(2\pi i\rho n+i\lambda(\ln r+i(\theta+2\pi n))^p)-$$
$$-r^\rho e^{-i\rho\theta}\sum_{0\leqslant n<(s+p)/(2\pi)-1}\exp(2\pi i\rho(n+1)+i\lambda(\ln r+i(2\pi(n+1)-\theta))^p)\,.$$

Вначале рассмотрим случай $p>2$. Если $\tau=u+is$, то

$$|\exp((\rho+1)\tau+i\lambda\tau^p)|=\exp((\rho+1)u+\varphi(u))\,, \tag{20}$$

где $\varphi(u)=\operatorname{Re} i\lambda(u+is)^p$. Имеем

$$\varphi(u)=\operatorname{Re}\left(i\lambda u^p\left(1+\frac{is}{u}\right)^p\right)=\operatorname{Re}\left(i\lambda u^p\left(1+p\frac{is}{u}-\frac{p(p-1)}{2}\frac{s^2}{u^2}+...\right)\right)\sim$$
$$\sim-\lambda psu^{p-1},\quad u\to+\infty\,. \tag{21}$$

Заметим еще, что если выбирать s следующим образом: $s=\pi+2m\pi$, когда $\cos\theta\geqslant0$, и $s=2m\pi$, когда $\cos\theta<0$, то при $\tau=u+is$ будет выполняться оценка

$$\left|\frac{e^{2\tau}}{r^2}-2\cos\theta\,\frac{e^\tau}{r}+1\right|\geqslant\frac{e^{2u}}{r^2}+1\,. \tag{22}$$

Далее имеем

$$\left(\frac{e^{2\tau}}{r^2}-2\cos\theta\frac{e^\tau}{r}+1\right)^{-1}=\left(\left(\frac{e^\tau}{r}-e^{i\theta}\right)\left(\frac{e^\tau}{r}-e^{-i\theta}\right)\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}\left(1-e^{\tau+i\theta}/r\right)}-\frac{1}{e^{i\theta}\left(1-e^{\tau-i\theta}/r\right)}\right)\,. \tag{23}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{1-z}=1+z+\cdots+z^n+\frac{z^{n+1}}{1-z}$$

и равенство (23), получим тождество

$$\frac{1}{e^{2\tau}/r^2 - 2\cos\theta e^{\tau}/r + 1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} \frac{e^{k\tau}}{r^k} + \\ + \frac{1}{\sin\theta} \frac{e^{(n+1)\tau}}{r^{n+1}} \frac{\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)e^{\tau}/r}{e^{2\tau}/r^2 - 2(\cos\theta)\, e^{\tau}/r + 1}\,.$$

Используя это тождество, получим

$$\frac{\sin\theta}{\pi} \int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(\cos\theta)\, e^{\tau}/r + 1}\, d\tau \; = $$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+1)\theta)}{r^k} \int\limits_{is}^{is+\infty} e^{k\tau} \exp((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p))\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi r^{n+1}} \int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{\big(\sin((n+2)\theta) - \frac{e^{\tau}}{r}\sin((n+1)\theta)\big)\, e^{(n+1)\tau} \exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(\cos\theta)\, e^{\tau}/r + 1}\, d\tau\,.$$

Мы будем считать, что s выбрано указанным выше способом. Тогда из соотношений (20), (21), неравенства (22) получим, что все написанные выше интегралы сходятся. Кроме того, если $r > 1$ и

$$R_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{(\sin((n+2)\theta) - (e^{\tau}/r)\sin((n+1)\theta))\, e^{(n+1)\tau} \exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(e^{\tau}/r)\cos\theta + 1}\, d\tau\,,$$

то, применяя указанные выше соотношения, получим

$$R_n \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} (1+e^u) e^{(n+1)u} \exp((\rho+1)u + \varphi(u))\, du = c_n < \infty\,.$$

Это показывает, что ряд

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+1)\theta)}{r^k} \int\limits_{is}^{is+\infty} e^{k\tau} \exp((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p))\, d\tau$$

является асимптотическим рядом по степеням $1/r$ для интеграла

$$\frac{\sin\theta}{\pi} \int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(\cos\theta)\, e^{\tau}/r + 1}\, d\tau\,.$$

Заметим, что аналогично доказываются утверждения теоремы, касающиеся других интегралов. Рассмотрим теперь выражение

$$b_{n,1}(z) = \exp(2\pi n\rho i + i\lambda(\ln r + i\theta + 2\pi n)^p)\,.$$

Имеем

$$|b_{n,1}(z)| = \exp\left(\operatorname{Re} i\lambda(\ln r)^p \left(1 + i\frac{\theta + 2\pi n}{\ln r}\right)^p\right) = \\ = \exp(-(1+o(1))\lambda p(\theta + 2\pi n)(\ln r)^{p-1}), \quad r \to +\infty\,.$$

Отсюда следует, что $b_{n+1,1}(z) = o(1)\, b_{n,1}(z)$.

В случае $p > 2$ величина $b_{n,1}(z)$ убывает быстрее любой степени z. Кроме того,

$$|b_{n,1}(z)| = \exp\left(\operatorname{Re} ie^{\frac{i\pi p}{2}}\lambda(\theta+2\pi n)^p\left(1-i\frac{\ln r}{\theta+2\pi n}\right)^p\right).$$

Если $p \in (1,2)$, то при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\left(ie^{i\pi p/2}\left(1-i\frac{\ln r}{\theta+2\pi n}\right)^p\right) \leqslant \delta < 0\,.$$

Поэтому при таких p ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n,1}(z)$ является сходящимся.

Если $p = 2$, то

$$b_{n,1}(z) = \exp(2\pi n\rho i + i\lambda(\ln^2 r - (\theta+2\pi n)^2) - 2\lambda\ln r(\theta+2\pi n)),$$

и в этом случае ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n,1}(z)$ также является сходящимся.

Аналогичные утверждения верны для величины

$$b_{n,2}(z) = \exp(2\pi(n+1)\rho i + i\lambda(\ln r + i(2\pi(n+1)-\theta))^p)\,.$$

Обозначим через γ_s контур, составленный из луча $(-\infty,0)$, отрезка $[0,is]$ и луча $[is,is+\infty)$. В случае $p > 2$ асимптотическое разложение для функции $u_1(z,p)$ получается следующим образом. Если ядро $1/(e^{2\tau}/r^2 - 2e^{\tau}(\cos\theta)/r + 1)$ разложить в степенной ряд по степеням $1/r$ (этот ряд будет сходящимся при $r > e^{\operatorname{Re}\tau}$) и подставить это выражение в интеграл

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{\gamma_s}\frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2\left(\cos\theta\right)e^{\tau}/r + 1}\,d\tau\,,$$

то почленное интегрирование даст асимптотическое разложение для функции $u_1(z,p)$. Заметим, что в интегралах для коэффициентов путь интегрирования можно заменить на вещественную ось. Следовательно, для получения асимптотического разложения можно и не прибегать к контуру γ_s. Он нужен только для обоснования асимптотического разложения. В частности, при $p > 2$, $\varepsilon < \arg z < 2\pi-\varepsilon$, где ε — произвольное строго положительное число, функция $ru_1(z,p)$ равномерно при $z \to \infty$ стремится к постоянной

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda|\tau|^p\right)\,d\tau\,.$$

Пусть теперь $p \in (1,2]$. Покажем, что в этом случае

$$\lim_{s\to+\infty}\int\limits_{is}^{is+\infty}\frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(e^{\tau}/r)\cos\theta + 1}\,d\tau = 0\,,$$

если s стремится к бесконечности, пробегая те значения, которые мы указали раньше.

Действительно, если $\tau = u + is$, а s принимает указанные значения, то

$$\left|\frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2\,(\cos\theta)\,e^{\tau}/r + 1}\right| \leqslant \frac{\exp\left((\rho+1)u + \operatorname{Re} i\lambda(u+is)^p\right)}{e^{2u}/r^2 + 1} =$$
$$= \frac{\exp\left((\rho+1)u - \lambda(u^2+s^2)^{p/2}\sin\left(p\operatorname{arctg}(s/u)\right)\right)}{e^{2u}/r^2 + 1}.$$

Мы получаем

$$\left|\int\limits_{is}^{is+\infty} \frac{\exp\left((\rho+1)\tau + i\lambda\tau^p\right)}{e^{2\tau}/r^2 - 2(e^{\tau}/r)\cos\theta + 1}\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{(\rho+1)u}}{e^{2\tau}/r^2 + 1}\exp\left(-\lambda(u^2+s^2)^{p/2}\sin\left(p\operatorname{arctg}\frac{s}{u}\right)\right)\,du\,.$$

Первый сомножитель в интеграле есть интегрируемая функция по лучу $[0,\infty)$, второй сомножитель меньше единицы и стремится к нулю при $s \to +\infty$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл стремится к нулю. Теперь, переходя в равенстве (19) к пределу при $s \to \infty$, получим в случае $p \in (1,2]$ формулу для $u_1(z,p)$, указанную в формулировке теоремы. Можно доказать, что получившиеся ряды будут не только сходящимися, но еще и асимптотическими. □

Аналогичные формулы можно написать и для других функций $u_k(z,p,\rho,\lambda)$. При желании можно написать и более точные асимптотические формулы. Такие формулы получаются применением соответствующей техники преобразований интегралов в комплексной плоскости. Заметим, что для изучения функций $u_k(z,p,\rho,\lambda)$ при $p>1$ теорема 4 неприменима, так как все внеинтегральные члены обращаются в нуль. Мы видим, что характер асимптотического поведения функций $u_k(z,p,\rho,\lambda)$ различается для случаев $p \in (0,1)$, $p=1$, $p>1$. В частности, при $p>1$ функции $u_k(z,p,\rho,\lambda)$ имеют различный порядок роста на разных лучах θ_1, θ_2, $0<\theta_1<\theta_2\leqslant\pi$. Этого не наблюдается при $p\in(0,1]$. Поведение функций $u_k(z,p,\rho,\lambda)$ при $p\in(0,1)$ и $p=1$ также различается. Это видно из строения предельных множеств Азарина таких функций.

5. Асимптотические формулы для нерегулярно растущих целых функций

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho\in(0,1)$ со строго положительными корнями z_k, $k=1,2,\ldots$. Мы будем рассматривать функции $\ln(1-z/z_k)$ в плоскости, разрезанной по лучу $[0,+\infty)$, фиксируя однозначную ветвь условием положительности функции при отрицательных вещественных z. Тогда

$$\ln f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = \int\limits_0^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\,dn(t) = \int\limits_0^{\infty}\frac{z}{z-t}\frac{n(t)}{t}\,dt\,,$$

где $n(t)=\sum\limits_{z_k\leqslant t}1$ — считающая функция нулей f. Имеем

$$\ln|f(z)| = \int\limits_0^{\infty}\frac{r(r-t\cos\theta)}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}\frac{n(t)}{t}\,dt, \quad z=re^{i\theta}\,.$$

Пусть

$$\varphi(t)=t^{\rho}(a_0+a_1\cos(\lambda\ln t)+b_1\sin(\lambda\ln t)),\quad t>0,$$

где $\rho\in(0,1)$, $a_0>0$, $\lambda\geqslant0$, и a_1, b_1 — произвольные вещественные числа.

Если $a_0 \geqslant \sqrt{1+\lambda^2/\rho^2}\ \sqrt{a_1^2+b_1^2}$, то $\varphi(t)$ будет строго возрастающей функцией. Действительно,

$$\varphi'(t) = \rho t^{\rho-1}\left[a_0 + \left(a_1 + \frac{\lambda}{\rho}b_1\right)\cos(\lambda\ln t) + \left(b_1 - \frac{\lambda}{\rho}a_1\right)\sin(\lambda\ln t)\right],$$

и из элементарного неравенства

$$C_1\sin\alpha + C_2\cos\alpha \geqslant -\sqrt{C_1^2+C_2^2}$$

получаем

$$\varphi'(t) \geqslant \rho t^{\rho-1}\left[a_0 - \sqrt{\left(a_1+\frac{\lambda}{\rho}b_1\right)^2 + \left(b_1 - \frac{\lambda}{\rho}a_1\right)^2}\,\right] =$$

$$= \rho t^{\rho-1}\left(a_0 - \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right) \geqslant 0\,.$$

В определении f возьмем $n(t) = \lfloor\varphi(t)\rfloor$. Здесь, как и в теореме 4, использовано стандартное обозначение для целой части (пола) числа. Заметим, что фактически речь идет не о конкретной целой функции f, а о семействе целых функций, зависящих от пяти параметров ρ, a_0, λ, a_1 и b_1.

Предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\, f$ для целой функции f определяется как предельное множество Азарина субгармонической функции $\ln|f(z)|$. Теорема 6 показывает, что предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\, f$ и индикатор $h_f(\theta)$ функции f, принадлежащей указанному семейству, определяются равенствами

$$\mathrm{Fr}\, f = \left\{\left(a_0\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi} + (a_1C_\rho(\lambda,\theta) + b_1D_\rho(\lambda,\theta))\cos\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-a_1D_\rho(\lambda,\theta) + b_1C_\rho(\lambda,\theta))\sin\varphi\right)r^\rho :\ \varphi\in[0,2\pi]\right\},$$

$$h_f(\theta) = a_0\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi} + \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{C_\rho^2(\lambda,\theta)+D_\rho^2(\lambda,\theta)}\,.$$

Эти соотношения справедливы и без предположения

$$a_0 \geqslant \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,,$$

однако, в общем случае функция f будет мероморфной.

Если взять вспомогательную функцию вида

$$\varphi(t) = t^\rho\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(\lambda_k\ln t) + b_k\sin(\lambda_k\ln t))\right), \quad t>0,$$

и затем по предложенной схеме построить функцию $f(z)$, то с помощью теоремы 6 можно получить асимптотическую формулу для $\ln|f(z)|$. В случае, если $\varphi(t)$ — возрастающая функция, f будет целой функцией. На этом пути можно получать асимптотические формулы для широкого класса нерегулярно растущих целых функций. Было бы интересно сравнить подобные формулы с общими результатами работы [7], но такой вопрос требует отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 1. Рига: Зинатне, 1974.
2. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 2. Рига: Зинатне, 1977.
3. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 3. Рига: Зинатне, 1981.
4. Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука, 1979.
5. Азарин В. С. *Об асимптотическом поведении субгармонических функций* // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 2. С. 147–167.
6. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
7. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка* $\rho \in (0, 1)$ *с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 1. С. 3–28.
8. Шерстюков В. Б. *Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации* // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 9. С. 139–180.
9. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 1. М.: Мир, 1985.

Константин Геннадьевич Малютин,
ФГБОУ ВО «Курский государственный университет» ,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Таисия Ивановна Малютина,
ФГБОУ ВО «Курский государственный университет» ,
ул. Радищева, 33,
305000, г. Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Татьяна Васильевна Шевцова,
ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» ,
ул. 50 лет Октября, 94,
305040, г. Курск, Россия
E-mail: dec-ivt-zao@mail.ru