ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 36-55.

УДК 519.63

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ И НЕВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

М.Х. БЕШТОКОВ

Аннотация. В настоящей работе в прямоугольнике исследуются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с нелокальным линейным источником, выступающих в качестве математических моделей движения влаги и солей в почвах с фрактальной организацией. Кроме декартова случая, в работе рассматриваются одномерные случаи с цилиндрической и сферической симметрией. Методом энергетических неравенств выводятся априорные оценки решений нелокальных краевых задач в дифференциальной форме. Построены разностные схемы и для них доказываются аналоги априорных оценок в разностной форме, приводятся оценки погрешности в предположений достаточной гладкости решений уравнений. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau^2)$. Библ. 31.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, уравнение влагопереноса, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова-Капуто/

Mathematics Subject Classification: 65N06; 65N12

Введение

Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для уравнений с частными производными, как раздел математики, имеющий многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах.

Дифференциальные уравнения, содержащие дробные производные как по времени, так и по пространственным переменным, в настоящее время стали привлекать внимание математиков, физиков в связи с использованием таких уравнений в качестве математических моделей различных процессов [1]–[9].

M.KH. BESHTOKOV, BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DEGENERATE AND DEGENERATE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-LOCAL LINEAR SOURCE AND DIFFERENCE METHODS FOR THEIR NUMERICAL IMPLEMENTATION.

Поступила 29 мая 2018 г.

Исследованию разнообразных локальных и нелокальных начально-краевых задач для дифференциальных уравнений типа Соболева и его подкласса псевдопараболических уравнений посвящено большое количество работ [10]–[19].

В [20]–[25] методом конечных разностей исследуются различные краевые задачи для дифференциальных уравнений соболевского типа с переменными коэффициентами.

В настоящей работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений типа Соболева с дробной по времени производной в смысле Герасимова-Капуто с нелокальным линейным источником. Кроме декартова случая, в работе рассматриваются одномерные случаи с цилиндрической и сферической симметрией.

1. Постановка краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальным линейным источником.

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x q(s,t)u(s,t)ds + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1.1}$$

$$\Pi(0,t) = \beta_{11}(t)u(0,t) + \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_{21}(t)u(l,t) + \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{1.4}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t), \eta(x),\ \beta_{12}(t),\ \beta_{22}(t) \le c_1,$$
$$|\beta_{11}(t),\ \beta_{21}(t),\ r(x,t),\ q(x,t),\ \eta_x(x), k_x(x,t), r_x(x,t)| \le c_2, \tag{1.5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$ – дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, [26], [27], $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(x)u_x\big)$, $c_i, i = 0,1,2-$ положительные постоянные числа, $\partial_{0t}^{\alpha} u = D_{0t}^{\alpha} u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$, $D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\alpha}-$ дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка α.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа $M_i,\ i = 1,2,...$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме.

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1)–(1.4) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\Big(a,b\Big) = \int_0^l abdx,\ \Big(a,a\Big) = \|a\|_0^2, \text{ где } a,b - \text{заданные на } [0,l] \text{ функции.}$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на $U = u + \partial_{0t}^{\alpha} u$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, U\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, U\Big) + \Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta u_x\big)_x, U\Big) + \Big(ru_x, U\Big) - \Big(\int_0^x quds, U\Big) + \Big(f, U\Big). \tag{2.1}$$

Справедлива следующая [28]

Лемма 1. *Для любой абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *функции* $\upsilon(t)$ *справедливо неравенство*

$$\upsilon(t)\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\big(\upsilon^2(t)\big), \quad 0<\alpha<1.$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (2.1), пользуясь неравенством Коши с ε [см. [29], стр.100] и **леммой 1**:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, U\Big) = \Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = \Big(1, u\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) + \Big(1, (\partial_{0t}^{\alpha}u)^2\Big) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2, \tag{2.2}$$

$$\Big(\big(ku_x\big)_x, U\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = Uku_x\Big|_0^l - \Big(ku_x, u_x+\partial_{0t}^{\alpha}u_x\Big) =$$

$$= Uku_x\Big|_0^l - \Big(k, u_x^2\Big) - \Big(k, u_x\partial_{0t}^{\alpha}u_x\Big) \leqslant Uku_x\Big|_0^l - c_0\|u_x\|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^l k\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx. \tag{2.3}$$

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x, U\Big) = \Big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = U\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l -$$

$$-\Big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x), u_x+\partial_{0t}^{\alpha}u_x\Big) = -\Big(\eta, u_x\partial_{0t}^{\alpha}u_x\Big) - \Big(\eta, (\partial_{0t}^{\alpha}u_x)^2\Big) + U\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l =$$

$$= U\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx - c_0\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2. \tag{2.4}$$

$$\Big(ru_x, U\Big) = \Big(ru_x, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = \Big(ru_x, u\Big) + \Big(ru_x, \partial_{0t}^{\alpha}u\Big) \leqslant \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big). \tag{2.5}$$

$$-\Big(\int_0^s quds, U\Big) = -\Big(\int_0^s quds, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = -\Big(\int_0^s quds, u\Big) - \Big(\int_0^s quds, \partial_{0t}^{\alpha}u\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\Big(1, \Big(\int_0^s quds\Big)^2\Big) \leqslant M_3^{\varepsilon}\int_0^l\int_0^s u^2dsdx + \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\|u\|_0^2 \leqslant \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + M_4^{\varepsilon}\|u\|_0^2. \tag{2.6}$$

$$\Big(f, U\Big) = \Big(f, u+\partial_{0t}^{\alpha}u\Big) = \Big(f, u\Big) + \Big(f, \partial_{0t}^{\alpha}u\Big) \leqslant \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\|f\|_0^2 + \|u\|_0^2. \tag{2.7}$$

Учитывая преобразования (2.2)–(2.7), из (2.1) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \big(k+\eta(x)\big)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx + c_0\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant U\Pi(x,t)\Big|_0^l + \varepsilon\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + M_6^{\varepsilon}\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + M_7^{\varepsilon}\|f\|_0^2. \tag{2.8}$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, из (2.8) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \big(k+\eta(x)\big)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx + c_0\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant U\Pi(x,t)\Big|_0^l + M_8\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + M_9\|f\|_0^2. \tag{2.9}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.9), тогда получим

$$U(x,t)\Pi(x,t)\Big|_0^l = \Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu_2(t) - \beta_{21}(t)u(l,t) - \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big) +$$

$$+\Big(u(0,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)\Big(\mu_1(t) - \beta_{11}u(0,t) - \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big) = \mu_2(t)u(l,t) +$$

$$+\mu_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \beta_{21}(t)u^2(l,t) - \beta_{21}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \beta_{22}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) -$$

$$-\beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2 + \mu_1(t)u(0,t) + \mu_1(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \beta_{11}(t)u^2(0,t) -$$

$$-\beta_{11}u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\beta_{12}(t)u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)-\beta_{12}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant M_{10}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\varepsilon_1\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2+\varepsilon_2\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2+M_{11}^{\varepsilon}\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)-$$

$$-\beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2-\frac{1}{2}\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)-\beta_{12}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2-\frac{1}{2}\beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{\beta_{12}(t)}{2}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2-\frac{\beta_{22}(t)}{2}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2-\frac{\beta_{12}(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t)-\frac{\beta_{12}(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)+$$

$$+M_{12}\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_{13}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \tag{2.10}$$

Учитывая (2.10), из (2.9) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l\big(k+\eta(x)\big)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2\leqslant$$

$$\leqslant M_{14}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{15}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big), \tag{2.11}$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям неравенства (2.11) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2\Big)\leqslant M_{14}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+$$

$$+M_{16}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{2.12}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части воспользуемся леммой [28].

Лемма 2. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha}y(t)\le c_1y(t)+c_2(t),\ 0\le\alpha\le 1,$$

где $c_1>0,\ c_2(t)-$суммируемвя на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t)\le y(0)E_{\alpha}(c_1t^{\alpha})+\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)},\ E_{\alpha,\mu}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}-$ функции Миттаг-Леффлера.

На основании **леммы 2** оценим первое слагаемое в правой части (2.12).
Пусть $y(t)=D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)},\ \ \partial_{0t}^{\alpha}y(t)=\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}$, тогда получим

$$D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}\leqslant M_{17}\Big(D_{0t}^{-2\alpha}\big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big). \tag{2.13}$$

Справедлива следующая

Лемма 3. *Для любой неотрицательной интегрируемой на $[0,T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство*

$$D_{0t}^{-2\alpha}g(t)=\frac{t^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\alpha\Gamma^2(\alpha)-\Gamma(2\alpha)}D_{0t}^{-\alpha}g(t). \tag{2.14}$$

Доказательство. Преобразуем дробный интеграл, стоящий в левой части

$$D_{0t}^{-2\alpha}g(t)=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-1}g(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}g(\tau)d\tau. \qquad (2.15)$$

Интегрируя (2.15) по частям, пользуясь формулой $B(\alpha,\alpha)=\dfrac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$, после несложных преобразований из (2.15) получим (2.14)).

В (2.14)) покажем, что

$$\alpha\Gamma^2(\alpha)>\Gamma(2\alpha),\ \forall\alpha\in(0,1).$$

или

$$(2\alpha)!<2(\alpha!)^2,\ \forall\alpha\in(0,1). \qquad (2.16)$$

Для этого рассмотрим неравенство $2^{\alpha^2}<2$. Неравенство справедливо для всех $\alpha\in(-1,1)$. Тогда из (2.16) находим

$$(2\alpha)!\leqslant 2^{\alpha^2}(\alpha!)^2<2(\alpha!)^2,\ \forall\alpha\in(0,1). \qquad (2.17)$$

Докажем методом математической индукции справедливость

$$(2\alpha)!\leqslant 2^{\alpha^2}(\alpha!)^2,\ \forall\alpha\in R. \qquad (2.18)$$

Действительно, при $\alpha=0$ верно (2.18). Допустим, что (2.18) выполняется для всех $\alpha=n$. Докажем теперь, что (2.18) выполняется при всех $\alpha=n+1$, тогда получим

$$(2n+2)!\leqslant 2^{(n+1)^2}((n+1)!)^2. \qquad (2.19)$$

Преобразуем левую часть (2.19)

$$(2n+2)!=2n!(2n+1)(2n+2)\leqslant 2^{n^2}(n!)^2(2n+1)(2n+2)\leqslant$$
$$\leqslant 2^{n^2}2^{2n}(n!)^2 2(n+1)^2.$$

Из последнего находим

$$2n+1\leqslant 2^{2n}(n+1),\ \forall n\in R. \qquad (2.20)$$

Повторяя рассуждения, методом математической индукции доказывается справедливость (2.20). □

С помощью **леммы 3** из (2.12) с учетом (2.13),(2.14) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right), \qquad (2.21)$$

где $M-$ положительное постоянное, зависящее только от входных данных (1.1)–(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}-$ дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

Теорема 1. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.5), тогда для решения задачи (1.1)–(1.4) справедлива априорная оценка (2.21).*

Из априорной оценки (2.21) следуют единственность и устойчивость решения по начальным и правой части в смысле нормы

$$\|u\|_1^2=\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u_x\|_0^2\Big).$$

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащие производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1.1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами [28]

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \varkappa(ku_x)_x + \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x + ru_x - \int_0^x q(s,t)u(s,t)ds + f(x,t), \tag{3.1}$$

где $\varkappa = \frac{1}{1+R}$, $R = \frac{0.5h|r|}{k}$ — разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y = \varkappa_i^j\left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\left(\gamma_i y_{\bar{x}}\right)_x + b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - \sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar + \varphi_i^j, \tag{3.2}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_1 y_{x,0}) = \beta_{11}y_0^{(\sigma)} + 0.25h^2 d_0^j y_0^{(\sigma)} + \tilde{\beta}_{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0 - \tilde{\mu}_1,\ t\in\overline{\omega}_\tau, \tag{3.3}$$

$$-\left(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_N y_{\bar{x},N})\right) = \beta_{21}y_N^{(\sigma)} + 0.5h\sum_{s=0}^{N} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar + \tilde{\beta}_{22}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N - \tilde{\mu}_2, \tag{3.4}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h \tag{3.5}$$

где

$$\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j,$$
$$\tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j,$$
$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}),\ \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}),\ b_i^j = \frac{r(x,t_{j+\sigma})}{k(x,t_{j+\sigma})},\ \varphi = f(x_i, t_{j+\sigma})$$
$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,\ d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}),\ a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},$$
$$a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},\ l\geq 1,\ \sigma = 1-\frac{\alpha}{2},$$
$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l\geq 1,$$
$$\text{при } j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$
$$\text{при } j>0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\leq s\leq j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}$$
$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,$$

$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Герасимова-Капуто порядка α, $0<\alpha<1$ [30].

Введем скалярные произведения и норму:

$$[u,v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h,\ i=0,N,\\ h,\ i\neq 0,N.\end{cases}$$

$$(u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h,\ [u,u] = [1,u^2] = |[u]|_0^2,$$

Перепишем (3.2)–(3.5) в операторной форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\delta}y + \overline{\Phi}, \tag{3.6}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.7}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x + b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - \sum\limits_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{2}{h}\Big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} - 0.25h^2 d_0^j y_0^{(\sigma)}\Big),\ i=0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \frac{2}{h}\Big(-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} - 0.5h\sum\limits_{s=0}^{N} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar\Big),\ i=N, \end{cases}$$

$$\overline{\delta}y = \begin{cases} \delta y_i = \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_i y_{\bar{x}})_x,\ i=\overline{1,N-1}, \\ \delta^- y_0 = \frac{2}{h}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0}) - \beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\Big),\ i=0, \\ \delta^+ y_N = \frac{2}{h}\Big(-\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\bar{x},N}) - \beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big),\ i=N, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i,\ i=\overline{1,N-1}, \\ \varphi^- = \frac{2}{h}\Big(\mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j\Big),\ i=0, \\ \varphi^+ = \frac{2}{h}\Big(\mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j\Big),\ i=N. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}} \\ \varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}},\ r_0 \leqslant 0 \\ \varkappa_N = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N \geq 0. \end{cases}$$

Умножим теперь (3.6) скалярно на $\bar{y} = y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y$:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\Big] = \Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big] + \Big[\bar{\delta}y, \bar{y}\Big] + \Big[\overline{\Phi}, \bar{y}\Big]. \tag{3.8}$$

Справедлива следующая [30]

Лемма 4. *Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство:*

$$y^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y \geq \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2).$$

Оценим суммы, входящие в (3.8), с учетом **леммы 4**:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, \bar{y}\Big] = \Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big] = \Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big] + \Big[1, (\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y)^2\Big] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2 + |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2. \tag{3.9}$$

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big] = \Big(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + 0.5h\bar{y}_0\Lambda^- y_0^{(\sigma)} + 0.5h\bar{y}_N\Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \bar{y}\Big) +$$

$$+\Big(b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) - \Big(\sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar, \bar{y}\Big) + \bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_{11} y_0^{(\sigma)}\bar{y}_0 -$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\bar{y}_N - 0.25h^2 d_0^j y_0^{(\sigma)}\bar{y}_0 - \beta_{21} y_N^{(\sigma)}\bar{y}_N - 0.5hd_N\bar{y}_N\sum_{s=0}^{N} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar. \tag{3.10}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (3.10):

$$\Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \bar{y}\Big) = \bar{y}\varkappa ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\Big] = \bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} -$$

$$-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}}\bar{y} + \varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\Big] = \bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] -$$

$$-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big] - \Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big] - \Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa^{(-1)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \bar{y}_N \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \varepsilon |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + |[y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) -$$
$$-\frac{1}{1+hM_2}\Big(a\varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] - \frac{c_0}{2(1+hM_2)}\Big(\varkappa, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_{\bar{x}}^2\Big] \leqslant \bar{y}_N \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} +$$
$$+\varepsilon |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) - M_3 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 - M_4 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y_{\bar{x}}]|_0^2. \tag{3.11}$$

$$\Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \bar{y}\Big) =$$
$$= \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$
$$+\Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\Big) \leqslant \varepsilon |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \tag{3.12}$$

$$-\Big(\sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar, \bar{y}\Big) - 0.25h^2 d_0^j y_0^{(\sigma)} \bar{y}_0 - 0.5h d_N \bar{y}_N \sum_{s=0}^{N} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} \bar{y}_0 - \beta_{21} y_N^{(\sigma)} \bar{y}_N =$$
$$= -\Big[\sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar, y^{(\sigma)}\Big] - \Big[\sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\Big] - \beta_{11} (y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_{11} y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 -$$
$$-\beta_{21} (y_N^{(\sigma)})^2 - \beta_{21} y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + M_6^{\varepsilon_1}\Big[1, \Big(\sum_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)} \hbar\Big)^2\Big] +$$
$$+M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \varepsilon_2 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)^2 \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 +$$
$$+M_8^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3} |[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \varepsilon_2 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)^2. \tag{3.13}$$

Учитывая преобразования (3.11)–(3.13), из (3.10) получим

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\Big] \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + \varepsilon_2 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 + \varepsilon_3 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)^2 +$$
$$+M_7^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) - M_3 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 - M_4 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y_{\bar{x}}]|_0^2. \tag{3.14}$$

$$\Big[\bar{\delta} y, \bar{y}\Big] = \Big(\delta y, \bar{y}\Big) + 0.5h\delta^- y_0 \bar{y}_0 + 0.5h\delta^+ y_N \bar{y}_N = \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, \bar{y}\Big) +$$
$$+\bar{y}_0 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (\gamma_i y_{x,0}) - \bar{y}_0 \beta_{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \bar{y}_N \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (\gamma_N y_{\bar{x},N}) - \bar{y}_N \beta_{22} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N =$$
$$= -\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (\gamma_i y_{\bar{x}}), \bar{y}_{\bar{x}}\Big] - \beta_{12} \bar{y}_0 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \bar{y}_N \beta_{22} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N =$$
$$= -\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} (\gamma_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}), y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big] - \Big(\gamma_i, (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_{\bar{x}})^2\Big] - \beta_{12} y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \beta_{12} \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 -$$
$$-\beta_{22} y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N - \beta_{22} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N)^2 \leqslant -\frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|y_{\bar{x}}]|_0^2 - c_0 \|\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_{\bar{x}}]|_0^2 -$$
$$-\frac{\beta_{12}}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2 - \frac{\beta_{22}}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 - \beta_{12} \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 - \beta_{22} \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)^2. \tag{3.15}$$

$$\Big[\overline{\Phi}, \bar{y}\Big] = (\varphi, \bar{y}) + 0.5h\varphi^- \bar{y}_0 + 0.5h\varphi^+ \bar{y}_N = (\varphi, \bar{y}) + \bar{y}_0 \Big(\mu_1 + 0.5h\varphi_0\Big) +$$
$$+\bar{y}_N \Big(\mu_2 + 0.5h\varphi_N\Big) = (\varphi, \bar{y}) + \bar{y}_0 \mu_1 + 0.5h\varphi_0 \bar{y}_0 + \bar{y}_N \mu_2 + 0.5h\varphi_N \bar{y}_N =$$
$$= \Big[\varphi, \bar{y}\Big] + \mu_1 \bar{y}_0 + \mu_2 \bar{y}_N = \Big[\varphi, y^{(\sigma)}\Big] + \Big[\varphi, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\Big] +$$
$$+\mu_1 y_0^{(\sigma)} + \mu_1 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 + \mu_2 y_N^{(\sigma)} + \mu_2 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N \leqslant \varepsilon_1 |[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y]|_0^2 + \varepsilon_2 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0\Big)^2 +$$
$$+\varepsilon_3 \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big)^2 + M_9^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2 + \mu_2^2\Big) + M_{10}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_{11}^{\varepsilon_1} |[\varphi]|_0^2. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание преобразования (3.9)–(3.16), из (3.8) находим

$$\frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2 + |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2 + M_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_0\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 +$$
$$+\frac{\beta_{12}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0^2 + \frac{\beta_{22}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N^2 + \beta_{12}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2 + \beta_{22}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2 + \varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2 + \varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2 +$$
$$+M_{13}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_{14}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big) + M_{11}^{\varepsilon_1}|[\varphi]|_0^2. \tag{3.17}$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2},\ \varepsilon_2 = \dfrac{\beta_{12}}{2},\ \varepsilon_3 = \dfrac{\beta_{22}}{2}$ из (3.17) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2 + \|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_{15}|[y^{(\sigma)}]|^2_{W_2^1(0,l)} + M_{16}\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big), \tag{3.18}$$

где $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2$.
Перепишем (3.18) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M_{17}^{\sigma}|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} + M_{18}^{\sigma}|[y^j]|^2_{W_2^1(0,l)} + M_{16}\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big), \tag{3.19}$$

Справедлива следующая

Лемма 5. *Пусть $\{p_j\}$– последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$p_0 = 1, \quad \overline{\sigma}^{1-\alpha}p_j = \sum_{s=1}^{j}(c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_s^{\alpha,\sigma})p_{j-s}, \quad j \geq 1,$$

тогда

$$0 < p_j < 1, \quad \sum_{s=k}^{j} p_{j-s}c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leqslant k \leqslant j, \tag{3.20}$$

где $\overline{\sigma}^{1-\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}\Big((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}\Big) - \dfrac{1}{2}\Big((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}\Big)$.

Доказательство. Следуя [31] докажем равенство (3.20). Тогда, учитывая, что $c_s < c_{s-1}$ для $s \geq 1$, получаем

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s}c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s}c_{s-1}^{\alpha,\sigma}, \tag{3.21}$$

где

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s}c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \sum_{s=0}^{j} p_{j-s}c_s^{\alpha,\sigma}, \tag{3.22}$$

Из (3.21), (3.22) находим

$$\sum_{s=j}^{j} p_{j-s}c_{s-j}^{\alpha,\sigma} = p_0c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \tag{3.23}$$

где $\overline{\sigma}^{1-\alpha} = \begin{cases} \sigma^{1-\alpha},\ j=0, \\ \dfrac{1}{2-\alpha}\Big((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}\Big) - \dfrac{1}{2}\Big((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}\Big),\ j \geq 1, \end{cases}$

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s}c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=0}^{j} p_{j-s}c_s^{\alpha,\sigma} = p_0c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \tag{3.24}$$

Учитывая (3.23), (3.24), получаем

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} (c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_{s}^{\alpha,\sigma}) < \overline{\sigma}^{1-\alpha},$$

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} + p_j c_0, \quad p_j c_0 > 0, \quad c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \tag{3.25}$$

Из (3.22) находим

$$c_0 p_j = \sum_{s=1}^{j} (c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_{s}^{\alpha,\sigma}) p_{j-s}$$

Из (3.24), (3.25) получаем

$$0 < p_j c_0 < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 0 < p_j < 1.$$

Пусть $s = l + k - 1$, тогда с учетом (3.23) получим

$$\sum_{s=k}^{j} p_{j-s} c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \sum_{l=1}^{j-k+1} p_{j-k+1-l} c_{l-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leqslant k \leqslant j.$$

Лемма доказана. □

Справедливы следующие

Лемма 6. *Пусть выполнено (3.20), тогда для* $m = 1, 2, ...$ *получим*

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1+(m-1)\alpha)} \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} s^{(m-1)\alpha} \leqslant \frac{\overline{\sigma}^{1-\alpha} j^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)}. \tag{3.26}$$

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 3.2 [31].

Лемма 7. *Пусть* $\overrightarrow{e} = (1, 1, ..., 1)^T \in R^j$ *и*

$$J = 2\overline{\sigma}^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & p_1 & ... & p_{j-2} & p_{j-1} \\ 0 & 0 & ... & p_{j-3} & p_{j-2} \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}_{j\times j}$$

и выполнено (3.26), тогда получим

$$J^i = 0, \quad i \geq j.$$

$$J^m \overrightarrow{e} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} \Big((2\lambda t_j^{\alpha})^m, (2\lambda t_{j-1}^{\alpha})^m, ..., (2\lambda t_1^{\alpha})^m \Big)^T, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

$$\sum_{s=0}^{i} J^s \overrightarrow{e} = \sum_{s=0}^{j-1} J^s \overrightarrow{e} \leqslant \Big(E_{\alpha}(2\lambda t_j^{\alpha}), E_{\alpha}(2\lambda t_{j-1}^{\alpha}), ..., E_{\alpha}(2\lambda t_1^{\alpha}) \Big)^T, \quad i \geq j.$$

Лемма 7 доказывается аналогично лемме 3.3 [31].

Лемма 8. *Предположим, что неотрицательные последовательности* y^j, φ^j, $j=0,1,2,...$ *удовлетворяют неравенству*

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y^j \leqslant \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geq 1$$

где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ *— константы, тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то*

$$y^{j+1} \leqslant 2\Big(y^0 + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \varphi^{j'}\Big) E_{\alpha}(2\lambda t_j^{\alpha}), \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0,$$

где $E_{\alpha}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$*— функция Миттаг-Леффлера,* $\lambda = \lambda_1 + \dfrac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Лемма 8 доказывается на основании лемм 4-6 аналогично лемме 3.1 [31].
На основании **леммы 8** из (3.18) получаем

$$||[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M\left(||[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \left(||[\varphi^{j'}]|^2_0 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)\right). \tag{3.27}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.5), тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи (3.2)–(3.5) справедлива априорная оценка (3.27).*

Из априорной оценки (3.27) следуют единственность и устойчивость решения задачи (3.2)–(3.5) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.4), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (3.2)–(3.5). Для оценки точности разностной схемы (3.2)–(3.5) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.2)–(3.5), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i^j \Big(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \Big(\gamma_i z_{\bar{x}}\Big)_x + b_i^{-j} a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} - \sum_{s=0}^{i} d_s^j z_s^{(\sigma)} \hbar + \Psi_i^j, \tag{3.28}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} (\gamma_1 z_{x,0}) = \beta_{11} z_0^{(\sigma)} + 0.25h^2 d_0^j z_0^{(\sigma)} + \tilde{\beta}_{12} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z_0 - \tilde{\nu}_1, \ t \in \overline{\omega}_{\tau}, \tag{3.29}$$

$$-\big(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} (\gamma_N z_{\bar{x},N})\big) = \beta_{21} z_N^{(\sigma)} + 0.5h \sum_{s=0}^{N} d_s^j z_s^{(\sigma)} \hbar + \tilde{\beta}_{22} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z_N - \tilde{\nu}_2, \tag{3.30}$$

$$z(x,0) = 0, \ x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.31}$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (3.2)–(3.5) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4).

Применяя априорную оценку (3.27) к решению задачи (3.28)–(3.31), получаем неравенство

$$||[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \Big(||[\Psi^{j'}]|^2_0 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2} \Big), \tag{3.32}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (3.32) следует сходимость решения разностной задачи (3.2)–(3.5) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в смысле нормы $||[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \leqslant \tau_0$ справедлива оценка

$$||[y^{j+1} - u^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M\Big(h^2 + \tau^2\Big).$$

Следствие 1. *Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид:*

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^l q(x,t)u(x,t)dx + f(x,t),$$
$$0 < x < l,\ 0 < t \le T,$$

если потребовать выполнения условия $|q| \leqslant c_2$.

4. Постановка краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения с нелокальным линейным источником

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m k\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x q(s,t)u(s,t)ds + f(x,t),$$
$$0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{4.1}$$
$$\lim_{x\to 0} x^m\Pi(x,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{4.2}$$
$$-\Pi(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4.3}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4.4}$$

где $0 \le m \le 2$.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (4.2), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(0,t) = 0$ [25, с.173], если функции $r(0,t), k(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

5. Априорная оценка в дифференциальной форме

Получим априорную оценку методом энергетических неравенств, для этого умножим уравнение (4.1) скалярно на $x^mU = x^m(u + \partial_{0t}^{\alpha}u)$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, x^mU\Big) = \Big(\big(x^mku_x\big)_x, U\Big) + \Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(x^m\eta u_x\big)_x, U\Big) +$$
$$+\Big(ru_x, x^mU\Big) - \Big(\int_0^s quds, x^mU\Big) + \Big(f, x^mU\Big). \tag{5.1}$$

Принимая во внимание преобразования (2.2)-(2.7), из (5.1) после несложных преобразований находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \big(k + \eta(x)\big)\partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}u_x)^2dx + c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 +$$
$$+c_0\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leqslant x^mU\Pi(x,t)|_0^l + M_7\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big) + M_8\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \tag{5.2}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.2), тогда имеем

$$x^mU\Pi(x,t)|_0^l = l^m\Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Pi(l,t) =$$
$$= l^m\Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu(t) - \beta_1(t)u(l,t) - \beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big) =$$
$$= l^mu(l,t)\mu(t) + l^m\mu(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - l^mu^2(l,t)\beta_1(t) - l^m\beta_1(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) -$$
$$-l^m\beta_2(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2 \leqslant -l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2 -$$
$$-\frac{l^m\beta_2(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t) + \varepsilon\big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)^2 + M_9\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 +$$

$$+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)+M_{10}\mu^2(t)\leq-\frac{l^m\beta_2(t)}{2}(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2-\frac{l^m\beta_2(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)+$$
$$+M_9\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)+M_{10}\mu^2(t). \tag{5.3}$$

Учитывая (5.3), из (5.2) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\int_0^l\big(k+\eta(x)\big)\partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}u_x)^2dx+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+$$
$$+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\leq M_{11}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{12}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2(t)\Big), \tag{5.4}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям неравенства (5.4) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant M_{13}D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{15}\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\|x^{\frac{m}{2}}u_0\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big). \tag{5.5}$$

На основании **леммы 2** из (5.5) получаем искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant M\left(D_{0t}^{-\alpha}(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2^2(t))+\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{5.6}$$

где $M-$ положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (4.1)–(4.4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

Теорема 3. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.5), тогда для решения задачи (4.1)–(4.4) справедлива априорная оценка (5.6).*

Из априорной оценки (5.6) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2=\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big).$$

6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4.1)–(4.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\bar{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x_{i-0.5}^m\gamma_i y_{\bar{x},i})_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)+$$
$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big)-\sum_{s=0}^{i}d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar+\varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau} \tag{6.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_1 y_{\bar{x},0}\Big)=\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0+0.5hd_0^j y_0^{(\sigma)}\Big)-\tilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big)=\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}+0.5h\sum_{s=0}^{N}d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar+\tilde{\beta}_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\tilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{6.4}$$

где

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\varkappa}\beta_1(t_{j+\sigma}),\ \tilde{\beta}_2 = \tilde{\varkappa}\beta_2 + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0^j, \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\varkappa}\mu(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j,$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k_{0.5}^{j+\sigma}}},\ \text{если}\ r_0^{j+\sigma} \leqslant 0, \quad \varkappa_N = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}},\ \text{если}\ r_N^{j+\sigma} \geq 0,$$

$$r = r^+ + r^-,\ |r| = r^+ - r^-,\ r^+ = 0.5\Big(r+|r|\Big) \geq 0,\ r^- = 0.5\Big(r-|r|\Big) \leqslant 0,$$

$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}),\ \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}),\ b_i^{\pm j} = \frac{\bar{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},\ d_i^j = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma},\ i = \overline{1, N-1}, \\ q_i^{j+\sigma},\ i = 0, N, \end{cases}$$

$$\varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma},\ i = 1, N-1, \\ f_i^{j+\sigma},\ i = 0, N, \end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases} 0.5h,\ i = 0, \\ h,\ i = \overline{1, N-1}, \end{cases} \qquad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},$$

$$\tilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},\ \varkappa_i = \frac{1}{1+R_i},\ R_i = \frac{0.5h|r_i|\bar{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}}.$$

Найдем априорную оценку методом энергетических неравенств, для этого перепишем (6.1)–(6.4) в операторном виде

$$\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \bar{\delta}y + \bar{\Phi}, \tag{6.5}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{6.6}$$

где

$$\bar{\bar{\varkappa}} = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i,\ x \in \omega_h, \\ 1,\ x = 0, l, \end{cases} \qquad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},$$

$$\bar{\delta}y = \begin{cases} \delta y_i = \frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\bar{x},i})_x,\ (x,t) \in \omega_{h,\tau} \\ \delta^- y_0 = \frac{m+1}{0.5h}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_1 y_{x,0}),\ x = 0, \\ \delta^+ y_N = -\frac{2}{h}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_N y_{\bar{x},N}) + \tilde{\varkappa}\beta_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\Big),\ x = l. \end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{\sigma} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big) + \\ \qquad\qquad + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_x^{(\sigma)}\Big) - \sum\limits_{s=0}^{i} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{m+1}{0.5h}\Big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - 0.5hd_0^j y_0^{(\sigma)}\Big),\ x = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{2}{h}\Big(\varkappa_N a_N y_{x,N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)} + 0.5h\sum\limits_{s=0}^{N} d_s^j y_s^{(\sigma)}\hbar\Big),\ x = l. \end{cases}$$

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{m+1}{0.5h}\tilde{\mu}_1,\ x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h}\tilde{\mu}_2,\ x = l. \end{cases}$$

Умножим теперь (6.5) скалярно на $x^m\bar{y} = x^m y^{(\sigma)} + x^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y$:

$$\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m\bar{y}\Big) = \Big(\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\Big] + \Big(\bar{\delta}y, x^m\bar{y}\Big] + \Big(\bar{\Phi}, x^m\bar{y}\Big], \tag{6.7}$$

где

$$(u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar,\ \|u]|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, i = 0, N \\ h, i \neq 0, N. \end{cases}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (6.7), пользуясь неравенством Коши с ε

$$\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m\bar{y}\Big) = \Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y, x^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y\Big] \geq$$

$$\geq \Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big] + \Big(\bar{\bar{\varkappa}}, \Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big], \tag{6.8}$$

$$\Big(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\Big] = \Big(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\Big) + 0.5h\Lambda^{+}y^{(\sigma)}_N x^m_N\bar{y}_N = \Big(\varkappa(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}})_x, \bar{y}\Big) +$$

$$+\Big(b^{-}(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}), \bar{y}\Big) + \Big(b^{+}(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}), \bar{y}\Big) - \Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s \hbar, x^m_i\bar{y}\Big) -$$

$$-x^m_N\bar{y}_N\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \tilde{\beta}_1 y^{(\sigma)}_N + 0.5h\sum_{s=0}^{N} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar\Big) = -\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\Big] +$$

$$+\Big(b^{-}(\bar{x}^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}), \bar{y}\Big) + \Big(b^{+}x^m_{i+0.5}a^{(+1)}, y^{(\sigma)}_x\bar{y}\Big) - \Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar, x^m\bar{y}\Big) - \tilde{\beta}_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar{y}_N -$$

$$-x^m_N 0.5h\bar{y}_N\sum_{s=0}^{N} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar + \Big(\bar{x}^m_N - x^m_N\Big)\bar{y}_N\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - x^m_{0.5}\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}\bar{y}_0. \tag{6.9}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (6.9):

$$-\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, (\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\Big] = -\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}\bar{y} + \varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\Big] = -\Big(\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\Big] -$$

$$-\Big(\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big] - \Big(\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa^{(-1)}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big] - \Big(\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa^{(-1)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x}}\Big] \leq$$

$$\leq \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|^2_0 + M^{\varepsilon}_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\Big) - \frac{1}{1+hM_2}\Big(\bar{x}^m a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\Big] -$$

$$-\frac{1}{2(1+hM_2)}\Big(\bar{x}^m a\varkappa, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y^2_{\bar{x}}\Big] \leqslant \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|^2_0 +$$

$$+M^{\varepsilon}_1\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\Big) - M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 - M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|^2_0. \tag{6.10}$$

$$\Big(b^{-}(\bar{x}^m a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}), \bar{y}\Big) + \Big(b^{+}x^m_{i+0.5}a^{(+1)}, y^{(\sigma)}_x\bar{y}\Big) = \Big(b^{-}\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^{-}\bar{x}^m a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big) + \Big(b^{+}x^m_{i+0.5}a^{(+1)}y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^{+}x^m_{i+0.5}a^{(+1)}y^{(\sigma)}_x, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|^2_0 + M^{\varepsilon}_5\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\Big). \tag{6.11}$$

$$-\Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar, x^m\bar{y}\Big) - \tilde{\beta}_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar{y}_N - x^m_N 0.5h\bar{y}_N\sum_{s=0}^{N} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar = -\Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar, x^m\bar{y}\Big] -$$

$$-\tilde{\beta}_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar{y}_N \leqslant -\Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar, x^m y^{(\sigma)}\Big] - \Big(\sum_{s=0}^{i} d^j_s y^{(\sigma)}_s\hbar, x^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big] - \tilde{\beta}_1 x^m_N(y^{(\sigma)}_N)^2 -$$

$$-\tilde{\beta}_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N \leqslant \varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|^2_0 + \varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2 +$$

$$+M^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}_6\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\Big). \tag{6.12}$$

Учитывая (6.9)-(6.12), из (6.9) получим

$$\Big(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m\bar{y}\Big] \leq \varepsilon_1\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|^2_0 + \varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2 +$$

$$+M^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}_7\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|^2_0 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\Big) - M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0 -$$

$$-M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|^2_0 + \Big(\bar{x}^m_N - x^m_N\Big)\bar{y}_N\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - x^m_{0.5}\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}\bar{y}_0. \tag{6.13}$$

$$\Big(\bar{\delta}y, x^m\bar{y}\Big] = \Big(\delta y, \bar{y}x^m\Big) + 0.5hx^m_N\bar{y}_N\delta^{+}y_N = \Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(\bar{x}^m\gamma y_{\bar{x}})_x, \bar{y}\Big) +$$

$$+0.5hx_N^m\bar{y}_N\delta^+y_N=-\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^m\gamma y_{\bar{x}},\bar{y}_{\bar{x}}\Big]+\bar{x}_N^m\gamma_N\bar{y}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x},N}-$$
$$-x_N^m\bar{y}_N\gamma_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x},N}-\tilde{\varkappa}\beta_2x_N^m\bar{y}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-x^m_{0.5}\bar{y}_0\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0}). \quad (6.14)$$

Преобразуем слагаемые в правой части (6.14):

$$-\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^m\gamma y_{\bar{x}},\bar{y}_{\bar{x}}\Big]=-\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^m\gamma y_{\bar{x}},y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big]-\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^m\gamma y_{\bar{x}},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar{x}}\Big]\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{c_0}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_x]|_0^2-c_0\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2. \quad (6.15)$$

$$-\tilde{\varkappa}\beta_2x_N^m\bar{y}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N=-\tilde{\varkappa}\beta_2x_N^my_N^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-\tilde{\varkappa}\beta_2x_N^m\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2. \quad (6.16)$$

Учитывая (6.15) и (6.16), из (6.14) получим

$$\Big(\bar{\delta}y,x^m\bar{y}\Big]\le-\frac{c_0}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2-c_0\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\bar{y}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})-$$
$$-x^m_{0.5}\bar{y}_0\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})-\tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2}x_N^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2-\tilde{\varkappa}x_N^m\beta_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2. \quad (6.17)$$

$$\Big(\bar{\Phi},x^m\bar{y}\Big]=\Big(\varphi,x^m\bar{y}\Big)+0.5hx_N^m\bar{y}_N\varphi^+=\Big(\varphi,x^m\bar{y}\Big)+x_N^m\tilde{\mu}^2\bar{y}_N=$$
$$=\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big)+\Big(\varphi,x^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big)+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N\leqslant\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+$$
$$+M_8^{\varepsilon_1}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_9^{\varepsilon_1}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N. \quad (6.18)$$

Принимая во внимание преобразования (6.8)–(6.18), из (6.7) получаем

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+M_{10}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+$$
$$+\Big(\bar{\bar{\varkappa}},\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+c_0\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\frac{\beta_2}{2}x_N^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2+$$
$$+\beta_2x_N^m\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\leqslant\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+$$
$$+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\Big(x_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})\Big)\bar{y}_N-x^m_{0.5}\bar{y}_0\Big(\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})\Big)+$$
$$+M_8(\varepsilon_1)\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N+M_{11}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \quad (6.19)$$

Рассмотрим третье, четвертое и шестое слагаемые в правой части (6.19)

$$\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\Big(\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_Ny_{\bar{x},N})\Big)\bar{y}_N-$$
$$-x^m_{0.5}\bar{y}_0\Big(\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1y_{x,0})\Big)+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N=$$
$$=x^m_{0.5}\bar{y}_0\Big(\tilde{\mu}_1-\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0+0.5hd_0^jy_0^{(\sigma)}\Big)+$$
$$+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\bar{y}_N\Big(\tilde{\mu}_2-\tilde{\beta}_1y_N^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)+$$
$$+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N=x^m_{0.5}y_0^{(\sigma)}\tilde{\mu}_1+x^m_{0.5}\tilde{\mu}_1\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0-$$
$$-\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y_0^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0-\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2-$$
$$-\frac{0.25h^2}{m+1}x^m_{0.5}y_0^{(\sigma)}d_0^jy_0^{(\sigma)}-\frac{0.25h^2}{m+1}x^m_{0.5}d_0^jy_0^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0+\bar{x}_N^my_N^{(\sigma)}\tilde{\mu}_2+\bar{x}_N^m\tilde{\mu}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-$$
$$-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_1(y_N^\sigma)^2-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_1y_N^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\tilde{\beta}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-$$
$$-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\le\varepsilon_3\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_4\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_{12}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\Big(\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)+$$

$$+M_{13}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0)^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)-\frac{h}{4(m+1)}x_{0.5}^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0^2-$$

$$-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\Big)^2-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_2\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2. \qquad (6.20)$$

Учитывая преобразования (6.20), из (6.19) находим при $\varepsilon_1=\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_2 x_N^m}{2}$, $\varepsilon_3=\frac{hx_{0.5}^m}{4(m+1)}$, $\varepsilon_4=(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}$

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+M_{10}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+$$

$$+c_0\|\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\frac{h}{4(m+1)}x_{0.5}^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+\big(\bar{x}_N^m-x_N^m\big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+$$

$$+\frac{0.5h}{2(m+1)}x_{0.5}^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0\Big)^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+\big(\bar{x}_N^m-x_N^m\big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2\leqslant M_{14}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+$$

$$+M_{15}\Big(\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)+M_{16}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2\Big). \qquad (6.21)$$

Преобразуем первое, четвертое, седьмое и девятое слагаемые в левой части (6.21) с учетом $x_{N-0.5}^m\geq\frac{1}{6}x_N^m$

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+\big(\bar{x}_N^m-x_N^m\big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+$$

$$+\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2=$$

$$=\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+\frac{0.5h}{2}x_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+$$

$$+\frac{0.5h}{2}x_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+\big(\bar{x}_N^m-x_N^m\big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+$$

$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2=\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+$$

$$+\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\overline{x}_N^m+\frac{0.5h}{2}\overline{x}_N^m\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+$$

$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\overline{x}_N^m+\frac{0.5h}{2}\overline{x}_N^m\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2\geq\frac{M_{17}}{2}\Big(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+$$

$$+\frac{h}{4}\overline{x}_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+\frac{M_{17}}{2}\Big(1,\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+$$

$$+\frac{h}{4}\overline{x}_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2\geq\frac{1}{4}\Big(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+\frac{0.5h}{12}x_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_N)^2+$$

$$+\frac{1}{4}\Big(1,\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+\frac{0.5h}{12}x_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N\Big)^2\geq$$

$$\geq\frac{1}{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\frac{1}{12}\|\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2, \qquad (6.22)$$

где

$$M_{17}=\begin{cases}1,\text{если } m=0, m\geq 1,\\ \frac{1}{2},\text{если } m\in(0,1),\ \ h\leq h_0=\sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}.\end{cases}$$

Учитывая (6.22), из (6.21) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_{18}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2+M_{19}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big), \qquad (6.23)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2=\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2$.

Повторяя рассуждения (3.18)-(3.27), из (6.23) находим искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}]|_1^2\leqslant M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0]|_1^2+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)\right), \qquad (6.24)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (1.4), (4.5), тогда существуют такие τ_0, h_0, что если $\tau\leqslant\tau_0, h\leqslant h_0$, то для решения разностной задачи (6.1)–(6.4) справедлива априорная оценка (6.24).*

Из априорной оценки (6.24) следуют единственность и устойчивость решения задачи (6.1)-(6.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи (4.1)–(4.4) $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (6.1)–(6.4). Для оценки точности разностной схемы (6.1)–(6.4) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (6.1)–(6.4), получаем задачу для функции z

$$\bar{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{1}{x_i^m}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x_{i-0.5}^m\gamma_i z_{\bar{x},i})_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)+$$
$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}\Big)-\sum_{s=0}^{i}d_s^j z_s^{(\sigma)}\hbar+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau} \qquad (6.25)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 z_{\bar{x},0}\Big)=\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0+0.5hd_0^j z_0^{(\sigma)}\Big)-\tilde{\nu}_1, \qquad (6.26)$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N z_{\bar{x},N}\Big)=\tilde{\beta}_1 z_N^{(\sigma)}+0.5h\sum_{s=0}^{N}d_s^j z_s^{(\sigma)}\hbar+\tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2, \qquad (6.27)$$

$$z(x,0)=0,\ x\in\overline{\omega}_h, \qquad (6.28)$$

где $\|x\Psi\|_0^2=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)-$ погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (4.1)–(4.4) разностной схемой (6.1)–(6.4) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (4.1)–(4.4) (см. [25] стр. 190–197).

Применяя априорную оценку (6.24) к решению задачи (6.25)–(6.28), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}]|_1^2\leqslant M\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big), \qquad (6.29)$$

где $M-$ положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\|xz^{j+1}]|_1^2\leqslant\overline{M}\max_{0\leqslant j'\leqslant j}\Big(\|x\Psi^{j'}\|_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big), \qquad (6.30)$$

где $\overline{M}-$ положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (6.30) следует сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$ в смысле нормы $\|xz^{j+1}]|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0,h_0, то при $\tau\leqslant\tau_0, h\leqslant h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x\big(y^{j+1}-u^{j+1}\big)]|_1\leqslant\overline{M}\big(h^2+\tau^2\big).$$

Следствие 2. *Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (4.1) имеет вид:*

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) +$$

$$+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^l q(x,t)u(x,t)dx + f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t\le T,$$

если потребовать выполнения условия $|q| \leqslant c_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* Физматлит. М. 2003.
2. Учайкин В.В. *Метод дробных производных.* Издательство «Артишок». Ульяновск. 2008.
3. B.B. Mandelbrot *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman and Company. New York. 1982.
4. Бегли Р.Л., Торвик П.Дж. *Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчёту конструкций с вязкоупругим демпфированием* // Аэрокосмическая техника. **2**:2, С. 84–93, (1984).
5. Федер Е. *Фракталы.* М. Мир. 1991.
6. Динариев О.Ю. *Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин* // Изв. АН СССР.сер. МЖГ.1990. 5, С. 66–70.
7. Нигматуллин Р.Р. *The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry* // Phys. Status solidi. B. 133, 425-430, (1986).
8. Кочубей А.Ю. *Диффузия дробного порядка* // Дифференц. уравнения. 1990. 26, С. 660–670.
9. Чукбар К.В. *Стохастический перенос и дробные производные* // ЖЭТФ. 1995. **5**:11 С. 1875–1884.
10. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах* // Прикладная математика и механика. 1960. **25**:5. С. 852–864.
11. Дзекцер Е.С. *Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах* // ДАН СССР. 1975. **220**:3, С. 540–543.
12. Hallaire M. *Эффективный потенциал воды при высыхании почвы* // Термодинамика почвенной влаги, Гидрометеоиздат, Л., (1966).
13. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. *Знерго и массообмен в системепочва растение-воздух.* Гидрометеоиздат, Л., 1975.
14. P.J. Chen, M.E. Curtin *On a theory of heat conduction involving two temperatures* // Jornal Angew. Math. Phys. 1968. 19, P. 614–627.
15. R.E. Showalter, T.W. Ting *Pseudoparabolic partial differential equations* // SIAM J. Math. Anal. 1970. **1**:1, P. 1–26.
16. Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. **18**:1, С. 3–50.
17. Свешников А.А., Альшин А.Б., Корпусов М.О. Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* Физматлит, М. 2007.
18. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения. 1982. **18**:4, С. 689–699.
19. Водахова В.А. *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева* //Дифференц. уравнения. 1983. **19**:1, С. 163–166.
20. Бештоков М.Х. *О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 2016. **52**:10, С. 1393–1406.
21. Бештоков М.Х. *Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами* // ЖВМ и МФ. 2016. **56**:10, С. 1780–1794.

22. Бештоков М.Х. *On a non-local boundary value problem for the third order pseudo-parabolic equation* // Computational Mathematics and Modeling. 2016. **27**:1, С. 60–79.
23. Бештоков М.Х. *The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation* // 11th International Conference on "Mesh methods for boundary-value problems and applications"IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 158, 2016, 012019 doi:10.1088/1757-899X/158/1/012019.
24. Бештоков М.Х. *Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации* // ЖВМ и МФ. 2017. **57**:12, С. 2021–2041.
25. Бештоков М.Х. *Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля* // Дифференц. уравнения. 2018. **54**:6, С. 763–778.
26. H. Caputo *Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent* // II Geophys J. Astronom. Soc. 1967. 13, P. 529–539.
27. Герасимов А.Н. *Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения* //АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. 12, С. 251–260.
28. Алиханов А.А. *Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка* // Дифференц. уравнения. 2010. **46**:5, С. 658–664.
29. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука. 1983.
30. A.A. Alikhanov *A new difference scheme for the time fractional diffusion equation* //Journal of Computational Physics. 2015. 280, P. 424–438.
31. D. Li, H. -L. Liao, W. Sun, J. Wang and J. Zhang *Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems* // Commun. Comput. Phys. **24**:86 (2018).

Мурат Хамидбиевич Бештоков,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ул.Шортанова, 89А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`