ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 3-18.

УДК 517.518

КОНФОРМНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ф.Г. АВХАДИЕВ, Р.Г. НАСИБУЛЛИН, И.К. ШАФИГУЛЛИН

Аннотация. Рассматриваются плоские области гиперболического типа и конформно инвариантные функционалы, определяемые как наилучшие константы в неравенствах типа Харди. Исследуется взаимосвязь между этими функционалами и оптимальными константами в гиперболических изопериметрических неравенствах. Изучаемые неравенства типа Харди содержат весовые функции, зависящие от гиперболического радиуса области, и являются конформно инвариантными. Доказано, что положительность констант в неравенствах типа Харди связана с существованием гиперболических изопериметрических неравенств специального вида. Доказана теорема сравнения констант Харди с различными числовыми параметрами. Изучена связь между линейным гиперболическим изопериметрическим неравенством в некоторой области и евклидовым максимальным модулем этой области. Существенную роль в доказательствах играют характеристики областей, имеющих равномерно совершенные границы. Кроме того, мы обобщаем некоторые результаты из следующих двух статей:

1) J.L. Fernández, J.M. Rodríguez, *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. V. 15. 1990. P. 165-183.

2) V. Alvarez, D. Pestana, J.M. Rodríguez, *Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type* // Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 15, № 2. 1999. P. 353-425.

Ключевые слова: метрика Пуанкаре, гиперболическое изопериметрическое неравенство, равномерно совершенное множество, неравенство типа Харди.

Mathematics Subject Classification: 30F45, 30A10

1. Введение

Пусть Ω — область гиперболического типа, т.е. область, содержащая не менее трех граничных точек на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в Ω. Если $\infty \in \Omega$, то гладкость $u(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $u(1/z)$ в точке $z = 0$.

В каждой точке $z = x + iy \in \Omega$ определим гиперболический радиус формулой

$$R(z, \Omega) = 1/\lambda_\Omega(z),$$

где λ_Ω — коэффициент метрики Пуанкаре области Ω с гауссовой кривизной $k = -4$ (см., например, [1], [2]).

Следуя Х. Поммеренке [3], будем говорить, что область гиперболического типа $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет равномерно совершенную границу, если $M(\Omega) < \infty$, где $M(\Omega)$ — точная верхняя граница модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих ее границу. Напомним, что модуль двусвязной области Ω' определяется следующим образом. Берется

F.G. Avkhadiev, R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin, Conformal invariants of hyperbolic planar domains.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00115).

Поступила 20 февраля 2019 г.

конформно эквивалентное области Ω' круговое кольцо A, определяемое неравенствами $r(A) < |z| < R(A)$. По определению, число

$$M(\Omega') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R(A)}{r(A)}$$

называется модулем двусвязной области Ω'. Мы говорим, что двусвязная область Ω' разделяет границу области Ω, если $\Omega' \subset \Omega$ и в каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \Omega'$ имеются точки $\partial\Omega$.

Кроме максимального модуля $M(\Omega)$ нам потребуется следующая числовая характеристика области Ω гиперболического типа:

$$h(\Omega) = \sup_G \iint_G \frac{1}{R^2(z,\Omega)} dxdy \left(\int_{\partial G} \frac{1}{R(z,\Omega)} |dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, ограниченным кусочно гладкими кривыми, и таким, что $\overline{G} \subset \Omega$. Попутно отметим, что гиперболическая площадь $\iint_G R^{-2}(z,\Omega) dxdy$ и гиперболическая длина $\int_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz|$ являются безразмерными величинами. Очевидно, условие $h(\Omega) < \infty$ означает, что в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет место линейное гиперболическое изопериметрическое неравенство.

Настоящая работа посвящена исследованию новых конформно инвариантных величин (функционалов), определяемых как точные константы в вариационных неравенствах специального вида для функций $u \in C_0^1(\Omega)$ в плоских областях гиперболического типа.

Основной конформно инвариантный функционал области $c_{p,q}(\Omega)$, который мы рассмотрим, определяется как максимальная из возможных постоянных в следующем вариационном неравенстве типа Харди

$$\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \right)^{1/p} \geq c_{p,q}(\Omega) \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)} \right)^{1/q}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{1}$$

где $1 < p \leqslant q < \infty$, $z = x+iy$, ∇u – градиент функции u. Таким образом, рассматриваемый нами функционал $c_{p,q}(\Omega)$ определяется формулой

$$c_{p,q}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \right)^{1/p} \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)} \right)^{-1/q}. \tag{2}$$

Конформная инвариантность функционала, определяемого формулой (2), легко проверяется. Действительно, пусть $F : \Omega \to \Omega_\zeta$ — однолистное конформное отображение области Ω на некоторую другую область $\Omega_\zeta \subset \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$\zeta = F(z) = \xi + i\eta \in \Omega_\zeta, U := u \circ F^{-1},$$

где $z = x + iy \in \Omega$ и функция $u \in C_0^1(\Omega)$. Тогда $U := u \circ F^{-1} \in C_0^1(\Omega_\zeta)$ и имеют место формулы

$$\lambda_\Omega(z)|dz| \equiv \lambda_{\Omega_\zeta}(z)|d\zeta|, \quad \lambda_\Omega^2(z) dxdy = \lambda_{\Omega_\zeta}^2(z) d\xi d\eta,$$

$$|F'(z)|^2 dxdy = d\xi d\eta, \quad \nabla U = 2\frac{\partial U\zeta}{\partial\overline{\zeta}} = 2\frac{\partial u(z)}{\partial\overline{z}}\overline{F'(z)} = (\nabla u)\overline{F'(z)}.$$

Определяя $c_{p,q}(\Omega_\zeta)$ формулой (2) с заменой области Ω на область Ω_ζ и функции u на функцию U, соответственно, получаем, что

$$c_{p,q}(\Omega) = c_{p,q}(\Omega_\zeta).$$

Базовыми для нас являются хорошо известные результаты Д. Салливана [4], Х.Л. Фернандеса [5], Х.Л. Фернандеса и Х.М. Родригеса [6] из спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

В этих статьях рассматривается частный случай неравенства (1), соответствующий случаю $p = q = 2$, а именно, неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq c_2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3}$$

где

$$c_2(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \left(\iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \right)^{-1}. \tag{4}$$

Очевидно, $c_2(\Omega) = c_{2,2}^2(\Omega)$. Известно (см. [4] и [5]), что $c_2(\Omega) = 1$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа, а также $c_2(\Omega) \in [0,1]$ для любой области гиперболического типа. Существуют области, для которых $c_2(\Omega) = 0$, т.е. при $p = q = 2$ существуют области, для которых неравенство (1) не является содержательным. Эти утверждения являются следствиями известных фактов гиперболической геометрии и формулы Элстродта-Паттерсона-Сулливана ([4], с. 333):

$$c_2(\Omega) = \{1 \text{ для } 0 \leqslant \beta \leqslant 1/2; \ \ 4\beta\,(1-\beta) \text{ для } 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1\},$$

где $\beta = \beta(\Omega)$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре-Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω.

В [5] Фернандес доказал, что условие $M(\Omega) < \infty$ влечет положительность величины $c_2(\Omega)$. Ключевым результатом статьи [6] Фернандеса и Родригеса являются оценки

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2 \leqslant c_2(\Omega) \leqslant 3/h(\Omega).$$

Ф.Г. Авхадиев [7]–[9] исследовал следующее обобщение (3):

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq c_p(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{5}$$

где $p \in [1,\infty)$ — фиксированное число и

$$c_p(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega), u \not\equiv 0} \iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy. \tag{6}$$

В [7]–[9] доказано, что условие $M(\Omega) < \infty$ влечет положительность величины $c_p(\Omega)$ при любом значении $p \in [1,\infty)$ и установлено равенство $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа при любом $p \in [1,\infty)$. Кроме того, в [9] доказаны оценки для константы $c_p(\Omega)$, зависящие от евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ и показателя $p \in [1,\infty)$. Отметим, что

$$M_0(\Omega) \leqslant M(\Omega) \leqslant M_0(\Omega) + 1/2$$

для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ (см. подробнее [2]) и

$$M_0(\Omega) \leqslant M(\Omega) \leqslant 2M_0(\Omega) + 1$$

для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in \Omega$ (см. [9]), где $M(\Omega)$ — максимальный модуль, определенный выше.

В настоящей статье мы получаем несколько новых оценок для константы $c_p(\Omega)$ и их обобщения для $c_{p,q}(\Omega)$ при $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. В частности, мы докажем, что для $p \in [1,2)$ константа $c_p(\Omega) > 0$ тогда и только тогда, когда является конечным коэффициент $h(\Omega)$ линейного изопериметрического неравенства для гиперболической метрики. Кроме того, мы докажем, что конечность величины

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_G \left(\iint_G \frac{1}{R^2(z,\Omega)} dxdy \right)^{1/q-1/p+1} \left(\int_{\partial G} \frac{1}{R(z,\Omega)} |dz| \right)^{-1}$$

при условии $1/p - 1/2 \leqslant 1/q \leqslant 1/p \leqslant 1$ влечет положительность константы $c_{p,q}(\Omega)$. Отметим, что некоторые результаты, касающиеся $c_p(\Omega)$ и приведенные здесь с полными доказательствами, были анонсированы нами ранее в кратком сообщении [10].

В случае когда $\infty \notin \Omega$, известны несколько критериев равномерной совершенности границ в терминах гиперболического радиуса $R(z,\Omega)$, его градиента $\nabla R(z,\Omega)$ и функции расстояния $dist(z,\partial\Omega)$ до границы области Ω (см. [3], [9]). Мы получим оценки $h(\Omega)$ через эти характеристики областей. Например, докажем, что

$$\sqrt{3}\sup_{z\in\Omega}|\nabla R(z,\Omega)| > 2\sqrt{h(\Omega)}.$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Весовые функции, рассматриваемые в данной статье, содержат гиперболический радиус $R(z,\Omega)$. Имеется множество близких работ, посвященных неравенствам типа Харди, когда весовая функция содержит дистанцию $dist(z,\partial\Omega)$ до границы области (см. [11]–[20]). Следует также отметить, что одномерные неравенства Харди не связаны с геометрией. Они воспринимаются как некоторый инструмент из теории функций, используемый в доказательствах теорем вложения функциональных пространств (см. монографии С.Л. Соболева [21] и В.Г. Мазьи [22]). В отличие от одномерного случая, неравенства типа Харди в областях на плоскости являются частью геометрического анализа, так как они существенно связаны с различными геометрическими характеристиками.

Для удобства читателя в следующем пункте приведем известные результаты, которые существенно используются нами в доказательствах.

2. Вспомогательные утверждения и определения

Существенную роль в доказательствах играет подход В.М. Миклюкова и М. Вуоринена [23], связанный с изопериметрическим профилем области.

Пусть Ω — область гиперболического типа на расширенной плоскости, и пусть $\alpha, \beta : \Omega \to (0,\infty)$ — некоторые непрерывные функции. Рассмотрим фиксированные параметры p и q, удовлетворяющие условию $1 < p \leqslant q < \infty$. На множестве областей $G \subset \Omega$, таких, что граница ∂G состоит из кусочно-гладких кривых и $\overline{G} \subset \Omega$, определим взвешенную площадь

$$V(G) = \iint_G \alpha(z)^q dxdy$$

и взвешенную длину

$$A(G) = \int_{\partial G} \beta(z)\alpha(z)^{(p-1)q/p}|dz|.$$

Изопериметрический профиль плоской области Ω является наилучшей (максимальной) функцией

$$\theta : [0, V(\Omega)) \to [0,\infty), \quad \theta(0) = 0,$$

удовлетворяющей следующему соотношению

$$\theta(V(G)) \leqslant A(G)$$

для любой допустимой области G, т.е. для любой области с кусочно-гладкой границей и такой, что $\overline{G} \subset \Omega$.

Приведем формулировку основного утверждения из статьи В.М. Миклюкова и М. Вуоринена [23] (с. 2746) в той общности, которая необходима для нас. Необходимо отметить, что в статье [23] указаны более специальные условия на функции α и β, которые не используются в доказательстве этой теоремы, но упрощают описание различных приложений.

Теорема A. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, и пусть Ω — область гиперболического типа на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Если для области Ω существует изопериметрический профиль, удовлетворяющий соотношению*

$$B := \sup_{r\in(0,V(\Omega))} r^{1/q}\left(\int_r^{V(\Omega)} \theta(t)^{-p/(p-1)}dt\right)^{(p-1)/p} < \infty,$$

то для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |\alpha(z)u(z)|^q dxdy\right)^{1/q} \leqslant \lambda\left(\iint\limits_{\Omega} (\beta(z)|\nabla u(z)|)^p dxdy\right)^{1/p},$$

где $z = x + iy$, λ — положительная постоянная, для которой справедливы оценки:

$$B \leqslant \lambda \leqslant Bq^{1/q}\left(q/(q-1)\right)^{(p-1)/p}.$$

Нам необходимы также три следующих теоремы Фернандеса и Родригеса.

Теорема B. (J.L. Fernández, J.M. Rodríguez [6], с. 166) *Пусть Ω — область гиперболического типа. Константа $h(\Omega) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c_2(\Omega) > 0$, более того,*

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2 \leqslant c_2(\Omega) \leqslant 3/h(\Omega).$$

В следующей теореме речь идет об областях с равномерно совершенными границами.

Теорема C. (J.L. Fernández, J.M. Rodríguez [6], с. 167) *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа такая, что $M(\Omega) < \infty$. Пусть $A \subset \Omega$ — множество, состоящее из конечного или счетного множества точек таких, что*

$$\inf_{z\in A, w\in A\setminus\{z\}} d_\Omega(z, w) > 0,$$

где $d_\Omega(z, w)$ — гиперболическое расстояние между точками $z, w \in \Omega$. Тогда

$$c_2(\Omega \setminus A) > 0.$$

Как указано в статье [24], в этой теореме в качестве множества A можно взять произвольное множество $A \subset \Omega$, состоящее их конечного числа точек.

Теорема D. (J.L. Fernández, J.M. Rodríguez [6], с. 167) *Пусть Ω плоская область, $\infty \in \Omega$ такая, что $c_2(\Omega) > 0$ и I — множество изолированных точек $\partial\Omega$. Тогда точки I равномерно отдалены друг от друга.*

В [24], Альварес, Пестана и Родригес получили утверждения, обобщающие соответствующие результаты Фернандеса и Родригеса из [6]. Отметим, что они распространили результаты из [6] на случай гиперболических римановых поверхностей, причем некоторые из этих результатов являются новыми для областей на плоскости. Приведем одно из таких утверждений.

Теорема E. (V. Alvarez, D. Pestana, J.M. Rodríguez, [24], стр. 362). *Пусть Ω — область гиперболического типа, I – замкнутое и счетное подмножество Ω и $R = \Omega \setminus I$. Неравенство $h(R) < \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $h(\Omega) < \infty$ и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и радиусом r_0. Более того, имеют место оценка*

$$h(R) \leqslant \frac{h(\Omega)}{\tanh^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2\pi}{r_0 \log \frac{\tanh r_0}{\tanh\left(\frac{r_0}{4}\right)}}.$$

Прежде чем сформулировать следующий результат Ф.Г. Авхадиева, из [9], введем некоторые обозначения. Евклидов максимальный модуль определяется равенством

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \log \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем кольцам A таким, что A разделяет границу Ω,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega \quad \text{и} \quad z_0 \in \partial\Omega.$$

Мы полагаем $M_0(\Omega) = 0$, если множество таких колец является пустым множеством.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема F. (Ф.Г. Авхадиев [9], с. 16) *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(x+iy,\Omega)} \geq \frac{1}{p^p \mu^p(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} \frac{|u|^p dxdy}{R^2(x+iy,\Omega)},$$

где

$$\mu(\Omega) = \begin{cases} \pi M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)/(4\pi^2), & \textit{если } \infty \notin \Omega, \\ 2\pi M_0(\Omega) + \pi + \Gamma^4(1/4)/(4\pi^2), & \textit{если } \infty \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера.

3. Основные результаты

Докажем сначала теорему сравнения для констант $c_r(\Omega)$ для различных r. Близкие результаты, относящиеся к неравенствам Харди другого типа, имеются в наших статьях [8] и [17].

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant r < \infty$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Тогда*

$$c_r(\Omega) \geq p^r \left[c_p(\Omega)\right]^{r/p} / r^r. \tag{7}$$

Доказательства теоремы 1. При $p = r$ соотношение (7) является тождеством. Поэтому рассмотрим лишь случай, когда $p < r$.

Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, и пусть $1 \leqslant p < r < \infty$. Определим новую функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ равенством $\varphi(z) \equiv |u(z)|^{r/p}$, $z = x + iy \in \Omega$. Очевидно, $\varphi \in C_0(\Omega)$.

Имеем

$$\nabla\varphi(z) = (r/p)|u(z)|^{r/p-1}(\operatorname{sign} u(z))\nabla u(x).$$

Так как $r/p - 1 > 0$ и функция $u \in C_0^1(\Omega)$, то функция φ является непрерывно дифференцируемой в тех точках $z \in \Omega$, где $u(z) \neq 0$. Если же $u(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in \Omega$, то ясно, что $\nabla\varphi(z_0) = 0$ и $\lim_{z\to z_0} \nabla\varphi(z) = 0$ с учетом соотношений $r/p - 1 > 0$ и $u \in C_0^1(\Omega)$. Поэтому имеем: $\varphi = |u|^{r/p} \in C_0^1(\Omega)$.

Применяя к функции φ неравенство (5), получаем

$$\frac{r^p}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^{r-p}|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq c_p(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^r}{R^2(z,\Omega)} dxdy, \quad u \in C_0^1(\Omega).$$

Оценим сверху интеграл из левой части этого неравенства, полагая

$$p_1 = \frac{r}{r-p},\ p_2 = \frac{r}{p},\ f_1 = \frac{|u|^{r-p}}{R^{2-2p/r}},\ f_2 = \frac{|\nabla u|^p}{R^{2p/r-p}},$$

и применяя неравенство Гельдера

$$\iint_\Omega f_1 f_2 dxdy \leqslant \left(\iint_\Omega f_1^{p_1} dxdy\right)^{1/p_1} \left(\iint_\Omega f_2^{p_2} dxdy\right)^{1/p_2}.$$

В результате будем иметь неравенство

$$\frac{r^p}{p^p}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1-p/r}\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)}\right)^{p/r} \geq c_p(\Omega)\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}.$$

Так как $u \in C_0^1(\Omega)$ и $u \not\equiv 0$, то это неравенство равносильно следующему

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq \frac{p^r[c_p(\Omega)]^{r/p}}{r^r}\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),\ u \not\equiv 0.$$

Отсюда и следует неравенство (7), так как с учетом определения (6) при $r = p$ постоянная $c_r(\Omega)$ является максимально возможной постоянной в неравенстве

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq c_r(\Omega)\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Следующие два утверждение являются обобщениями теоремы B Фернандеса и Родригеса. Мы получаем оценки конформно инвариантных величин $c_p(\Omega)$ и $c_{p,q}(\Omega)$ при некоторых ограничениях на параметры p и q. Напомним, что величины $c_p(\Omega)$ и $c_{p,q}(\Omega)$ сравнимы с константой $c_2(\Omega)$ при условии $p = q = 2$. В частности, при $p = 2$ следующая теорема 2 совпадает с теоремой B Фернандеса и Родригеса.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа с коэффициентом линейного изопериметрического неравенства, определенным равенством*

$$h(\Omega) = \sup_G \iint_G R^{-2}(z,\Omega)dxdy\left(\int_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz|\right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Справедливы следующие утверждения.

1) Если $h(\Omega) < \infty$, то постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом для любого $p \in [1,\infty)$ и имеет место оценка $c_p(\Omega) \geq 1/(ph(\Omega))^p$.

2) При любом $p \in [1,2]$ постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $h(\Omega) < \infty$. Кроме того, справедливы оценки

$$\frac{1}{h^p(\Omega)} \leqslant p^p c_p(\Omega) \leqslant \frac{12^{p/2}}{h^{p/2}(\Omega)}.$$

Доказательства теоремы 2. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Предположим, что $p \in (1,\infty)$ и $h(\Omega) < \infty$. В силу определения конформно инвариантной константы $h(\Omega)$ для любой области G, компактно вложенной в Ω и ограниченной кусочно гладкими кривыми, будем иметь

$$V(G) := \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant h(\Omega)\int_{\partial G}\frac{ds}{R(z,\Omega)}. \tag{8}$$

Далее мы применяем теорему В.М. Миклюкова и М. Вуоринена в приведенной выше форме (см. теорему A), полагая $q = p \in (1,\infty)$,

$$\alpha(z) = R^{-2/p}(z,\Omega), \quad \beta(z) = R^{-2/p+1}(z,\Omega).$$

Из определения изопериметрического профиля области Ω следует, что профиль удовлетворяет неравенству

$$\theta(t) \geq t/h(\Omega)$$

для любого $t \in (0, I_p)$, где $I_p = \sup_G V(G)$. Поэтому

$$B := \sup_{r\in(0,I_p)} r^{1/p} \left(\int_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} \leqslant$$

$$\leqslant h(\Omega) \sup_{r\in(0,\infty)} r^{1/p} \left(\int_r^{\infty} t^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} = h(\Omega)\,(p-1)^{1-1/p}.$$

Последнее равенство получено с помощью непосредственных вычислений.

В силу теоремы A, применяемой для параметров $q = p \in (1, \infty)$, имеем неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \lambda^{-p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{9}$$

где постоянная λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda \leqslant B\, p^{1/p} \left(p/(p-1)\right)^{(p-1)/p} \leqslant p h(\Omega). \tag{10}$$

Заметим теперь, что постоянная $c_p(\Omega)$ определена как максимальная постоянная в неравенстве вида (9). Следовательно,

$$c_p(\Omega) \geq \lambda^{-p}.$$

Эта оценка вместе с оценкой (10) приводит к неравенствам

$$c_p(\Omega) \geq 1/\left(p h(\Omega)\right)^p > 0.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано для любого $p \in (1, \infty)$.

Остается рассмотреть случай, когда $p = 1$. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ — фиксированная функция. Для этой функции при любом $p \in (1, \infty)$ будет справедливо неравенство (9) с постоянной λ, удовлетворяющей оценке (10). Поскольку интегралы в неравенствах (9) непрерывно зависят от параметра $p \in (1, \infty)$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, то мы можем перейти к пределу при $p \to 1$. Очевидно, предельный переход в (9) и (10) при $p \to 1$ приводит к оценке

$$c_1(\Omega) \geq 1/h(\Omega) > 0$$

с учетом определения $c_1(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Предположим, что $p \in [1, 2]$. Если $h(\Omega) < \infty$, то положительность $c_p(\Omega)$ и нижняя оценка для этой величины вытекают из первого утверждения теоремы.

Предположим теперь, что $c_p(\Omega) > 0$ для фиксированного $p \in [1, 2]$. Если $p = 2$, то неравенство $h(\Omega) < \infty$ и верхняя оценка

$$c_2(\Omega) \leqslant 3/h(\Omega)$$

доказаны Фернандесом и Родригесом (см. выше теорему B). Пусть теперь $p \in [1, 2)$ и $c_p(\Omega) > 0$. Применяя оценку (7) теоремы 1 при $r = 2$, имеем:

$$c_2(\Omega) \geq p^2 \left[c_p(\Omega)\right]^{2/p}/4 > 0.$$

Применяя эту оценку и теорему B, получаем, что $h(\Omega) < \infty$ и

$$c_p(\Omega) \leqslant \left(4c_2(\Omega)/p^2\right)^{p/2} \leqslant \left(12/(h(\Omega)p^2)\right)^{p/2}.$$

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Приведем несколько утверждений, получаемых как следствия теоремы 2 и указанных выше теорем Фернандеса, Родригеса и Ф.Г. Авхадиева.

Следствие 1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой является равномерно совершенной. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sqrt{h(\Omega)} < 2\sqrt{3}\mu(\Omega),$$

где

$$\mu(\Omega) = \begin{cases} \pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, & \text{если } \infty \notin \Omega, \\ 2\pi M_0(\Omega) + \pi + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, & \text{если } \infty \in \Omega, \end{cases}$$

Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. По теореме Ф.Г. Авхадиева (теореме F) для гиперболической области с равномерно совершенной границей получаем, что

$$c_p(\Omega) \geq \frac{1}{p^p\mu(\Omega)}.$$

По теореме 2 при $p \in [1, 2)$ имеем

$$\left(\frac{12}{p^2 h(\Omega)}\right)^{p/2} > c_p(\Omega) \geq \frac{1}{p^p\mu^p(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{h(\Omega)} < \sqrt{12}\mu(\Omega),$$

что и требовалось доказать.

В следующем утверждении величина $d_\Omega(z, w)$ обозначает гиперболическое расстояние между точками $z, w \in \Omega$.

Следствие 2. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, такая, что $M(\Omega) < \infty$, т.е. граница области Ω является равномерно совершенным множеством. Пусть $A \subset \Omega$ — множество, состоящее из конечного или счетного множества точек и $R = \Omega \setminus A$. Если A является счетным множеством, то предполагаем, что*

$$\inf_{z\in A, w\in A\setminus\{z\}} d_\Omega(z, w) > 0.$$

Тогда $c_p(R) > 0$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Из теоремы Фернандеса и Родригеса (см. [6]) следует, что константа $c_2(R) > 0$. Поэтому изопериметрическая постоянная $h(R) < \infty$ по теореме B.

Применяя теперь теорему 2, имеем

$$c_p(R) \geq \frac{1}{h(R)^p p^p} > 0,$$

для любого $1 \leqslant p < \infty$, что и требовалось показать.

Следствие 3. *Пусть $p \in [1, 2)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, $\infty \in \Omega$, и через I обозначим множество изолированных точек границы $\partial\Omega$. Предположим, что $c_p(\Omega) > 0$. Тогда точки множества I равномерно отдалены в гиперболической метрике области $G = \Omega \cup I$.*

Доказательство. По условию $c_p(\Omega) > 0$ при $p \in [1, 2)$. Применяя неравенство (7), получим, что также $c_2(\Omega) > 0$. Утверждение следствия следует из теоремы D Фернандеса и Родригеса.

Приведем утверждение, получаемое как следствия теоремы 2 и сформулированной выше теоремы Альвареса, Пестаны и Родригеса из [24].

Следствие 4. *Пусть $p \in [1, 2)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, $\infty \in \Omega$, I замкнутое счетное подмножество Ω и $R = \Omega \backslash I$. Тогда справедливы следующие утверждения*

1. *если $c_p(R) > 0$, то $h(\Omega) < \infty$, $c_p(\Omega) > 0$, и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и радиусом r_0;*
2. *если $c_p(\Omega) > 0$ и для некоторого фиксированного числа $r_0 > 0$ в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и радиусом r_0, то $h(R) < \infty$ и $c_p(R) > 0$. Более того, имеют место оценка*

$$c_p(R) \geq \left[\frac{\sqrt[p]{c_p(\Omega)}}{\tanh^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2p\pi}{r_0 \log \frac{\tanh r_0}{\tanh\left(\frac{r_0}{4}\right)}} \right]^{-p}.$$

Доказательство. Пусть $c_p(R) > 0$. Применяя теорему 2 при $p \in [1, 2)$, имеем $h(R) < \infty$. Далее, используя теорему Альвареса, Пестаны и Родригеса (т.е. теорему E), получим, что $h(\Omega) < \infty$, и что в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и фиксированным радиусом r_0. Остается еще раз применить теорему 2, чтобы получить неравенство $c_p(\Omega) > 0$.

Пусть теперь $c_p(\Omega) > 0$. Следовательно, по теореме 2 имеем неравенство $h(\Omega) < \infty$ и оценку

$$ph(\Omega) \geq [c_p(\Omega)]^{1/p}. \tag{11}$$

Так как в любой точке $t \in I$ существуют односвязные и попарно непересекающиеся гиперболические круги $B_\Omega(t, r_0)$ с центром в t и фиксированным радиусом $r_0 > 0$, то по теореме E получаем, что $h(R) < \infty$ и, кроме того, справедливы соотношения

$$h(R) \leqslant \frac{h(\Omega)}{\tanh^2\left(\frac{r_0}{4}\right)} + \frac{2\pi}{r_0 \log \frac{\tanh r_0}{\tanh\left(\frac{r_0}{4}\right)}}, \tag{12}$$

$$c_p(R) \geq \frac{1}{h(R)^p p^p} > 0. \tag{13}$$

Комбинируя неравенства (11), (12) и (13), получаем требуемое утверждение.

Замечание. Согласно теореме 2, если $p \in [1, 2]$ и $c_p(\Omega) > 0$, то коэффициент $h(\Omega)$ является конечной величиной. Остается открытым вопрос: гарантирует ли конечность коэффициента $h(\Omega)$ условие, что константа $c_p(\Omega)$ является положительным числом для некоторого $p \in (2, \infty)$. По-другому, эту проблему можно сформулировать следующим образом: существует ли такая область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа, что константа $c_2(\Omega) = 0$, но константа $c_p(\Omega)$ является положительным числом для некоторого $p \in (2, \infty)$.

Следующая теорема обобщает первое утверждение теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа, числа $p \in [1, \infty)$ и $q \in [1, \infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам $1/p - 1/2 \leqslant 1/q \leqslant 1/p$, величина $h_{p,q}(\Omega)$ определена равенством:*

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_G \left(\iint_G R^{-2}(z, \Omega) dxdy \right)^{1/q - 1/p + 1} \left(\int_{\partial G} R^{-1}(z, \Omega) |dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Если $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, то константа $c_{p,q}(\Omega)$ является положительным числом. Кроме того, имеют место оценки:

$$c_{p,q}(\Omega) \geq \frac{q^{1/p-1/q-1}}{h_{p,q}(\Omega)} \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \quad \text{для случая} \quad p > 1,$$

$$c_{1,q}(\Omega) \geq \frac{1}{q^{1/q} h_{1,q}(\Omega)} \quad \text{для случая} \quad p = 1.$$

Доказательства теоремы 3. Мы применяем тот же метод, который был использован при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы.

Определим непрерывные функции $\alpha : \Omega \to (0,\infty)$ и $\beta : \Omega \to (0,\infty)$ равенствами $\alpha(z) = R^{-2/q}(z,\Omega)$ и $\beta(z) = R^{-2/p+1}(z,\Omega)$, где $z = x + iy \in \Omega$.

Пусть G — область, ограниченная кусочно-гладкой кривой и удовлетворяющая условию $\overline{G} \subset \Omega$. Пользуясь определениями В.М. Миклюкова и М. Вуоринена для выбранных нами функций α и β, получаем следующие формулы для взвешенной площади области

$$V(G) = \iint\limits_G \alpha(z)^q dxdy = \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)}$$

и взвешенной длины границы

$$A(G) = \int\limits_{\partial G} \beta(z)\alpha(z)^{(p-1)q/p}|dz| = \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)}.$$

В силу условий теоремы для любой допустимой области имеем неравенство

$$V^\beta(G) \leqslant h_{p,q}(\Omega) A(G),$$

где величина $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, а число $\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2, 1]$. С другой стороны, изопериметрический профиль

$$\theta : [0, V(\Omega)) \to [0,\infty), \quad \theta(0) = 0,$$

области Ω является максимальной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$\theta(V(G)) \leqslant A(G)$$

на множестве всех допустимых областей G. Следовательно,

$$\theta(t) \geq t^\beta / h_{p,q}(\Omega).$$

Предположим, что

$$p \in (1,\infty), I_p = \sup_G V(G),$$

и применим теорему Миклюкова-Вуоринена. Так как

$$\beta p/(p-1) = 1 + p/(q(p-1)),$$

то для любого положительного числа r

$$\left(\int_r^\infty t^{-\beta p/(p-1)} dt\right)^{(p-1)/p} = (q(1-1/p))^{(p-1)/p} \frac{1}{r^{1/q}}.$$

Характеристика Миклюкова-Вуоринена B допускает оценку

$$B \leqslant \sup_{r\in(0,I_p)} r^{1/q} \left(\int_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt\right)^{(p-1)/p} \leqslant$$

$$\leqslant h_{p,q}(\Omega) \sup_{r\in(0,\infty)} r^{1/q} \left(\int_r^\infty t^{-\beta p/(p-1)} dt\right)^{(p-1)/p} = h_{p,q}(\Omega) \left(\frac{q(p-1)}{p}\right)^{(p-1)/p}.$$

Следовательно, по теореме A имеет место следующее неравенство

$$\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}\right)^{1/p} dxdy \geq \frac{1}{\lambda}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{1/q}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{14}$$

Константа в последнем неравенстве удовлетворяет соотношению

$$\lambda \leqslant Bq^{1/q}\left(\frac{q}{q-1}\right)^{(p-1)/p} \leqslant h_{p,q}(\Omega)q^{1/q-1/p+1}\left(\frac{q(p-1)}{p(q-1)}\right)^{(p-1)/p}. \tag{15}$$

Поскольку постоянная $c_{p,q}(\Omega)$ определена как максимальная в неравенстве вида (14), то имеет место оценка $c_{p,q}(\Omega) \geq \lambda^{-1}$. Привлекая оценку (15), получаем доказываемое неравенство для $c_{p,q}(\Omega)$ в случае $p > 1$.

Случай $p = 1$ получается предельным переходом так же, как и при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы, так как в неравенствах (14) и (15) можно перейти к пределу при $p \to 1$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Таким образом, теорема 3 доказана полностью.

Приведем одно следствие теоремы 3, соответствующее случаю $p = 1$.

Следствие 5. *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Если $1 \leqslant q \leqslant 2$ и $h_{1,q}(\Omega) < \infty$, то*

$$h_{1,q}(\Omega)q^{1/q}\iint_\Omega \frac{|\nabla u|}{R(z,\Omega)}dxdy \geq \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{1/q}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Кроме коэффициента $h(\Omega)$ и евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ в дальнейшем нам потребуются некоторые другие числовые характеристики области гиперболического типа, а именно, величины $\alpha(\Omega)$, $\gamma(\Omega)$ и $C(\Omega)$, определения которых приведем ниже.

Эти характеристики взаимосвязаны между собой . Известно (см., например, [2], [3], [7]–[9]), что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа имеет равномерно совершенную границу тогда и только тогда, когда

$$M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow \alpha(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow \gamma(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow C(\Omega) > 0,$$

где

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z\in\Omega} \frac{dist(z,\partial\Omega)}{R(z,\Omega)}, \qquad \gamma(\Omega) := \sup_{z\in\Omega}|\nabla R(z,\Omega)|,$$

$$C(\Omega) := \inf\left\{\frac{cap(\{|z-z_0| \leqslant r\}) \cap (\mathbb{C}\setminus\Omega)}{r} : z_0 \in \partial\Omega, 0 < r < \infty\right\}.$$

Через $cap\ E$ обозначена логарифмическую емкость множества E (см., например, [3]).

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной. Тогда*

$$\sqrt{h(\Omega)} \leqslant \sqrt{3}\left(\log\frac{1}{C(\Omega)} + \frac{\Gamma^4(1/4)}{2\pi^2}\right),$$

$$\sqrt{h(\Omega)} \leqslant \frac{\sqrt{3}\gamma(\Omega)}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{h(\Omega)} < \frac{\sqrt{3}}{\alpha(\Omega)}.$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство теоремы 4. В наших обозначениях для $C(\Omega)$ справедливо неравенство

$$M_0(\Omega) \leqslant \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{C(\Omega)} \leqslant 2M_0(\Omega) + \frac{4\log 2}{\pi}.$$

(см. подробнее [3], [7]).

Используя последнее соотношение и следствие 1, получаем, что

$$\sqrt{h(\Omega)} \leqslant 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{C(\Omega)} + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}\right).$$

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной, то

$$\gamma(\Omega) := \sup_{z\in\Omega} |\nabla R(z,\Omega)| < \infty$$

и для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство (см. [9], Следствие 4.1.)

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p dxdy}{R^{2-p}(x+iy,\Omega)} \geq \frac{4^p}{p^p\gamma^p(\Omega)} \iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^p dxdy}{R^2(x+iy,\Omega)}.$$

Следовательно, используя теорему 2 и определение константы $c_p(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве, получим

$$\left(\frac{12}{p^2 h(\Omega)}\right)^{p/2} \geq c_p(\Omega) \geq \frac{4^p}{p^p\gamma^p(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{3}\gamma(\Omega)/2 \geq \sqrt{h(\Omega)}.$$

Комбинируя это неравенство с неравенством Осгуда (см., [2], гл. 3 и [9])

$$\gamma(\Omega) \leqslant 2/\alpha(\Omega),$$

получаем последнее из требуемых неравенств

$$\sqrt{3}/\alpha(\Omega) \geq \sqrt{h(\Omega)}.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

4. Некоторые примеры

В теореме 3 предполагается, что параметры $p \in [1,\infty)$ и $q \in [1,\infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам

$$1/p - 1/2 \leqslant 1/q \leqslant 1/p.$$

Как следствие, получаем, что

$$\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2,\, 1].$$

Такой выбор ограничений на параметры p и q обусловлен тем, что для заданной области неравенство $h_{p,q}(\Omega) < \infty$ может выполняться не для всех значений параметров, удовлетворяющих условию $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

Покажем, что $h_{p,q}(\Omega) = \infty$ для любой односвязной области Ω гиперболического типа при условии $\beta \notin [1/2,\, 1]$. В силу конформной инвариантности $h_{p,q}(\Omega)$ достаточно рассмотреть случай, когда Ω — некоторый круг.

Пример 1. Пусть $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Рассмотрим круги

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

радиуса $r \in (0,1)$. Поскольку

$$R(z,D) = 1 - |z|^2,$$

то гиперболическая площадь $V(\mathbb{D}_r)$ круга $\mathbb{D}_r$ и гиперболическая длина $A(\mathbb{D}_r)$ окружности $|z| = r$ вычисляются явно. Имеем:

$$V(\mathbb{D}_r) = 4\pi r^2(1-r^2)^{-1}$$

и
$$A(\mathbb{D}_r) = 4\pi r(1-r^2)^{-1}.$$
Следовательно,
$$\frac{V^\beta(\mathbb{D}_r)}{A(\mathbb{D}_r)} = (4\pi)^{\beta-1} r^{2\beta-1}(1-r^2)^{1-\beta}.$$
Если $\beta \notin [1/2,\, 1]$, то изучаемое отношение
$$V^\beta(\mathbb{D}_r)/A(\mathbb{D}_r) \quad (0<r<1)$$
не ограничено сверху либо в окрестности точки $r=0$, либо в окрестности точки $r=1$. Таким образом,
$$sup_{r\in(0,1)} V^\beta(\mathbb{D}_r)/A(\mathbb{D}_r) = \infty$$
при условии $\beta \notin [1/2,\, 1]$.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, граница которой является равномерно совершенной, то $c_p(\Omega) > 0$ для любого $p \in [1,\infty)$. Как было указано выше, при $p = 2$ этот факт впервые доказан Фернандесом [5], а в общем случае Ф.Г. Авхадиевым (см. [7]–[9]). Если граница области не является равномерно совершенной, то вопрос о положительности константы $c_p(\Omega)$ оказывается сложным. А именно, существуют области Ω_0 и Ω_1, границы которых не являются равномерно совершенными и обладающими свойствами: $c_p(\Omega_0) > 0$ и $c_p(\Omega_1) = 0$. Подходящие для нас примеры областей Ω_0 и Ω_1 имеются в [6]. Для полноты картины опишем кратко эти примеры.

Пример 2. Пусть
$$\Omega_0 = \mathbb{D} \setminus \{1 - 1/2^n\}_{n=1}^{\infty},$$
где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (см. [6]). Известно, что в единичном круге гиперболическое расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n)$ между точками $z_m, z_n \in \mathbb{D}$ определяется формулой
$$d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) = \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left|\frac{z_n - z_m}{1-\overline{z}_n z_m}\right|.$$
Поэтому расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n)$ между точками $z_m = 1 - 1/2^m$ и $z_n = 1 - 1/2^n$ при $n \geq m+1$ дается формулой
$$d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) = \frac{1}{2}\log\frac{1 - z_n z_m + z_n - z_m}{1 - z_n z_m - z_n + z_m} =$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-(1-1/2^m)(1-1/2^n) - 1/2^n + 1/2^m}{1-(1-1/2^m)(1-1/2^n) + 1/2^n - 1/2^m} = \frac{1}{2}\log\frac{2^{n+1}-1}{2^{m+1}-1}.$$
Следовательно, имеем
$$\inf_{n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}, n\neq m} d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) \geq \frac{1}{2}\log 2 > 0.$$
На основании следствия 2 мы можем утверждать, что при любом $p \in [1,\infty)$ константа $c_p(\Omega_0)$ является положительным числом.

Этот пример интересен в сравнении со следующим примером, рассмотренным также в статье [6].

Пример 3. Пусть
$$\Omega_1 = \mathbb{D} \setminus \{0\} \setminus \{1/2^n\}_{n=1}^{\infty},$$
где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Гиперболическое расстояние $d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n)$ между точками $z_m = 1/2^m$ и $z_n = 1/2^n$ при $m \geq n+1$ вычисляется явно по формуле
$$d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) = \frac{1}{2}\log\frac{1 - z_n z_m + z_n - z_m}{1 - z_n z_m - z_n + z_m} = \frac{1}{2}\log\frac{2^{m+m} + 2^m - 2^n + 1}{2^{m+n} - 2^m + 2^n + 1}, \quad n < m.$$

Как и в предыдущем случае, имеем

$$\inf_{n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N},n\neq m} d_{\mathbb{D}}(z_m, z_n) \geq \frac{1}{2}\log 2 > 0.$$

Имеется и отличие от предыдущего случая, связанное с особой точкой $0 \in A$. Поскольку расстояние между точками 0 и z_n дано формулой

$$d_{\mathbb{D}}(0, z_n) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z_n}{1-z_n},$$

то, очевидно, будем иметь: $d_{\mathbb{D}}(0, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. точка $0 \in \mathbb{D}$ является точкой сгущения последовательности. Следовательно,

$$\inf_{z\in A, w\in A\setminus\{z\}} d_\Omega(z, w) = 0, \quad A = \{0\} \cup \{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

В отличие от предыдущего случая, мы не можем применить следствие 2 и получить неравенство $c_p(\Omega_1) > 0$. Напротив, как показано в статье [6], имеет место равенство $c_2(\Omega_1) = 0$. Используя теорему 1, получаем, что $c_p(\Omega_1) = 0$ и при любом $p \in [1, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.V. Ahlfors *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory.* New Yourk: McGraw-Hill, 1973. 160 p.
2. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag. 2009. 156 p.
3. Ch. Pommerenke *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric* // Arch. Math., V. 32, Is. 1. 1979. P. 192–199.
4. D. Sullivan *Related aspects of positivity in Riemannian geometry* // J. Differential Geom., V. 25, Is. 3. 1987. P. 327–351.
5. J.L. Fernández *Domains with Strong Barrier* // Revista Matemática Iberoamericana. V. 5, Is. 2. 1989. P. 47–65.
6. J.L. Fernández, J.M. Rodríguez *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. V. 15. 1990. P. 165–183.
7. F.G. Avkhadiev *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math., V. 21. 2006. P. 3–31.
8. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. матем. инст. им. В.А. Стеклова, Т. 255. 2006. С. 8–18.
9. Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Матем. сб., Т. 206, вып. 12. 2015. С. 3–28.
10. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *L_p-версии одного конформно инвариантного неравенства* // Изв. вузов. Матем., № 8. 2018. С. 88–92.
11. M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal., V. 189, Is. 2. 2002. P. 539–548.
12. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech., V. 87, Is. 8-9. 2007. P. 632–642.
13. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Weighted Hardy inequalities with sharp constants* // Lobachevskii J. Math., V. 31, Is. 1. 2010. P. 1–7.
14. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. V. 18, Is. 4. 2011. P. 723–736.
15. F.G. Avkhadiev,K.-J. Wirths *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls* // J. Math. Analysis and Applications. V. 396, Is. 2. 2012. P. 473–480.
16. F.G. Avkhadiev, I.K. Shafigullin *Sharp estimates of Hardy constants for domains with special boundary properties* // Russian Mathematics. V. 58, Is. 2. 2014. P. 58–61.
17. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* // Сиб. матем. журн., Т. 55, № 2. 2014. С. 191–200.

18. A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*, Universitext, Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London, 2015.
19. Насибуллин Р.Г. *Точные интегральные неравенства типа Харди с весами, зависящими от функции Бесселя* // Уфимск. матем. журн., Т. 9, Вып. 1. 2017. С. 89–97; Ufa Math. J., V. 9, Is. 1. 2017. P. 89–97.
20. Шафигуллин И.К. *Нижняя оценка константы Харди для произвольной области в* $\mathbb{R}^n$ // Уфимск. матем. журн., Т. 9, Вып. 2. 2017. С. 104–111; Ufa Math. J., V. 9, Is. 2. 2017. P. 102–108.
21. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, М.: Наука. 1988. 254 с. ISBN 5-02000052-3.
22. V.G. Maz'ya *Sobolev spaces*, Springer. 1985. 488 p.
23. V.M. Miklyukov, M.K. Vuorinen *Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}$*-functions on Riemanni an manifolds* // Proc. Amer. Math. Soc. V. 127, No. 9. 1999. P. 2745–2754.
24. V. Alvarez, D. Pestana, J.M. Rodríguez *Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type* // Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 15, № 2. 1999. P. 353–425.

Фарит Габидинович Авхадиев,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кремлевская, 18
420008, г. Казань, Россия
E-mail: avkhadiev47@mail.ru

Рамиль Гайсаевич Насибуллин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кремлевская, 18
420008, г. Казань, Россия
E-mail: NasibullinRamil@gmail.com

Ильнар Касыймович Шафигуллин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Кремлевская, 18
420008, г. Казань, Россия
E-mail: shafigullin.ik@gmail.com