ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 19-25.

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Б.В. ВИННИЦКИЙ, В.Л. ШАРАН, И.Б. ШЕПАРОВИЧ

Аннотация. Хорошо известны условия разрешимости интерполяционной задачи $f(n) = d_n$, $n \in \mathbb{N}$ в классе целых функций, удовлетворяющих условию $|f(z)| \le e^{\pi|Imz|+o(|z|)}, z \to \infty$. В представленной статье исследуется интерполяционная задача $f(\lambda_n) = d_n$ в классе функций экспоненциального типа в полуплоскости. Найдены достаточные условия разрешимости расматриваемой задачи. В частности, обобщена достаточная часть интерполяционной теоремы Карлесона и найден аналог классического интерполяционного условия в виде

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mathrm{Re}\left(-\xi_j \frac{\lambda_k^2 - 1}{\lambda_k + \overline{\lambda_j}}\right) \le c_3, \quad \xi_j := \frac{\mathrm{Re}\lambda_j}{1 + |\lambda_j|^2}.$$

Обсуждается также вопрос о необходимости достаточных условий. Результаты применены к исследованию одной задачи о расщеплении и поиску аналога равенства $2\cos z = \exp(-iz) + \exp(iz)$ для каждой функции экспоненциального типа в полуплоскости. Доказано, что каждая голоморфная в правовой полуплоскости функция f, для которой в этой полуплоскости выполняется оценка $|f(z)| \le O(\exp(\sigma|Imz|))$, представима в виде $f = f_1 + f_2$, и при этом гололомофные в этой же полуплоскости функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям $|f_1(z)| \le O(\exp(|z|h_-(\varphi)))$ и $|f_2(z)| \le O(\exp(|z|h_+(\varphi)))$, где $\sigma \in [0; +\infty)$, $z = re^{i\varphi}$,

$$h_+(\varphi) = \begin{cases} \sigma|\sin\varphi|, \varphi \in [0; \pi/2], \\ 0, \varphi \in [-\pi/2; 0], \end{cases} \quad h_-(\varphi) = \begin{cases} 0, \varphi \in [0; \pi/2], \\ \sigma|\sin\varphi|, \varphi \in [-\pi/2; 0]. \end{cases}$$

В работе используются методы из работ Карлесона, Джонса П., Казаряна К., Малютина К. и других математиков.

Ключевые слова: голоморфные функции экспоненциального типа в полуплоскости, интерполяция, расщепление голоморфных функций.

Mathematics Subject Classifcation: 30E05, 30D15

1. Введение

Известно, что для каждой последовательности $d = (d_n) \in l^\infty$ существует такая целая функция f, что (см. [1], c.155)

$$f(n) = d_n, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{1.1}$$

$$|f(z)| \le e^{\pi|Imz|+o(|z|)}, \quad z \to \infty. \tag{1.2}$$

При этом в (1.2) "$o(|z|)$"опустить нельзя (см. [1], c.157, а также [2]). Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

B.V. Vynnyts'kyi, V.L. Sharan, I.B. Sheparovych, On an interpolation problem in the class of functions of exponential type in a half-plane.

Поступила 1 июня 2017 г.

Теорема 1. *Для каждой последовательности $(d_n) \in l^\infty$ существует такая голоморфная в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$ функция f, что выполняется (1.1) и (здесь и далее через c_j обозначаем положительные постоянные)*

$$|f(z)| \le c_1 e^{\pi|Imz|}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{1.3}$$

Пусть $h \in C[-\pi/2; \pi/2]$, $\sigma \in [0; +\infty)$, $h_0(\varphi) = \sigma|\sin\varphi|$,

$$h_+(\varphi) = \begin{cases} \sigma|\sin\varphi|, \varphi \in [0; \pi/2], \\ 0, \varphi \in [-\pi/2; 0], \end{cases}, \quad h_-(\varphi) = \begin{cases} 0, \varphi \in [0; \pi/2], \\ \sigma|\sin\varphi|, \varphi \in [-\pi/2; 0]. \end{cases}$$

и $H^\infty(\mathbb{C}_+; h)$ – пространство функций f, голоморфных в $\mathbb{C}_+$, для которых $\|f\| := \sup\left\{|f(z)|e^{-rh(\varphi)} : z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+\right\} < +\infty$. Теорему 1 и ее модификации мы применяем для доказательства следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\sigma \in [0; +\infty)$. Тогда каждая функция $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ представима в виде*

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_-), \quad f_2 \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+). \tag{1.4}$$

Задача о расщеплении (1.4), которая является аналогом равенства $\cos\sigma z = \frac{1}{2}e^{i\sigma z} + \frac{1}{2}e^{-i\sigma z}$, возникает при поисках аналогов теоремы Пэли-Винера для некоторых весовых пространств и исследовании некоторых уравнений типа свертки (см. [3, 4]). Она исследовалась в работах В.М. Дильного [5, 6]. Однако положительные решения известны, в основном, для пространств, определяемых L_2-метрикой. Для пространства $H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ вопрос оставался открытым. Теорема 2 является его положительным решением. Более сложный и важный аналогичный вопрос для пространства функций экспоненциального типа в полуплоскости, определяемого L_1-метрикой, продолжает оставаться открытым.

Пусть $\lambda = (\lambda_n) = (|\lambda_n|e^{i\varphi_n})$ – произвольная последовательность различных комплексных чисел из полуплоскости $\mathbb{C}_+$, $l^\infty(h; \lambda)$ – пространство последовательностей d, для которых $\|d\| := \sup\left\{|d_n|e^{-|\lambda_n|h(\varphi_n)} : n \in \mathrm{N}\right\} < +\infty$. Пусть $S(r) := \sum\limits_{1<|\lambda_k|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_k|^2} - \frac{1}{r^2}\right) \mathrm{Re}\lambda_k$. Различные интерполяционные задачи в классах функций, голоморфных в полуплоскости, рассматривались во многих работах (см. [7 – 9] и указанную там литературу). Однако критерий разрешимости интерполяционной задачи

$$f(\lambda_n) = d_n, n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

в классе $H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ не известен.

Мы воспользуемся некоторыми соображениями из [7 – 9] и получим сформулированные выше теоремы на основании следующего утверждения, которое, фактически, содержит достаточную часть интерполяционной теоремы Карлесона (ее элементарное доказательство для полуплоскости содержится, например, в [9]).

Теорема 3. *Пусть (λ_k) – последовательность различных комплексных чисел из полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$ таких, что*

$$\sum_{|\lambda_k|\le 1} Re\lambda_k < +\infty, \tag{1.6}$$

$$\sup\left\{S(r) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r : r \in [1; +\infty)\right\} < +\infty, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=k}^{\infty} Re\left(-\xi_j \frac{\lambda_k^2 - 1}{\lambda_k + \overline{\lambda_j}}\right) \le c_3, \quad \xi_j := \frac{Re\lambda_j}{1 + |\lambda_j|^2}. \tag{1.8}$$

Пусть, кроме того, последовательность (λ_k) является подпоследовательностью нулей такой голоморфной в $\mathbb{C}_+$ функции Ω, что

$$\left|\frac{\Omega(z)\left(z+\overline{\lambda_k}\right)}{(z-\lambda_k)Re\lambda_k\Omega'(\lambda_k)}\right| \le c_0 e^{rh_0(\varphi)}e^{-|\lambda_k|h_0(\varphi_n)},$$
$$z = x+iy = re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+,\quad k\in\mathrm{N}. \tag{1.9}$$

Тогда для каждой последовательности $d\in l^\infty(h_0;\lambda)$ *существует функция* $f\in H^\infty(\mathbb{C}_+;h_0)$, *удовлетворяющая условию (1.5).*

Замечание 1. *Если* $\sigma=0$, *то условия (1.6) и (1.7) равносильны условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Re\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}<+\infty,$$

и если $\Omega(z)=B(z)$ *– произведение Бляшке для* $\mathbb{C}_+$, *то условие (1.9) равносильно условию Карлесона* $\inf\left\{\left|\prod\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n+\overline{\lambda_k}}\right| : n\in\mathrm{N}\right\}\ge\delta>0$, *а из последнего условия уже вытекает (1.8) (см., например, [9]). Вопрос о необходимости условий (1.8) и (1.9) для нас остается открытым. Некоторые замечания по этому поводу приведены в конце статьи.*

2. Доказательство теоремы 3.

Пусть $s_0(t)=\sum\limits_{1<|\lambda_k|\le t}\mathrm{Re}\lambda_k$. Поскольку $\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4s^2}\right)$, если $|t|\leqslant|s|$, то

$$s_0(r)\le r^2\sum_{1<|\lambda_k|\le r}\frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2}\le r^2\frac{4}{3}\sum_{1<|\lambda_k|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\mathrm{Re}\lambda_k\le$$
$$\le r^2\frac{4}{3}\sum_{1<|\lambda_k|\le 2r}\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\mathrm{Re}\lambda_k=\frac{4}{3}r^2S(2r).$$

Поэтому из условий (1.6) и (1.7) вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}\right)^2$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\lambda_j\left(1+|\lambda_j|^2\right)^{-3/2}$. Следовательно, $\xi_j\to 0$. Поэтому, при доказательстве теоремы 3 можем, как и в [7 – 9], считать, что последовательность (ξ_j) невозрастающая. Пусть $\Psi_j(z)=-\xi_j\frac{z^2-1}{z+\overline{\lambda_j}}$ и $F_k(z)=\exp\left(-\sum\limits_{j=k}^{\infty}\Psi_j(z)\right)$. Последний ряд сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}_+$. Покажем, что искомой является функция

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\frac{\Omega(z)\left(z+\overline{\lambda_k}\right)}{(z-\lambda_k)\Omega'(\lambda_k)2\mathrm{Re}\lambda_k}\left(\frac{1+z}{1+\lambda_k}\right)^2\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k}{z+\bar{\lambda}_k}\right)^2\frac{e^{\xi_k\lambda_k}}{e^{\xi_k z}}\frac{F_k(z)}{F_k(\lambda_k)}.$$

Действительно, $\frac{z^2-1}{z+\overline{\lambda_j}}=z-\frac{1+z\overline{\lambda_j}}{z+\overline{\lambda_j}}$, $\mathrm{Re}\frac{1+z\overline{\lambda_j}}{z+\overline{\lambda_j}}=\frac{\left(1+|z|^2\right)\mathrm{Re}\lambda_j+\left(1+|\lambda_j|^2\right)\mathrm{Re}z}{\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}$ и

$$\mathrm{Re}\Psi_j(z)=\frac{\left(1+|z|^2\right)\mathrm{Re}^2\lambda_j}{\left(1+|\lambda_j|^2\right)\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}+\frac{\mathrm{Re}\lambda_j\mathrm{Re}z}{\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}-\xi_j\mathrm{Re}z.$$

Поэтому,

$$|F_k(z)|\le\exp\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left(-\frac{\left(1+|z|^2\right)\mathrm{Re}^2\lambda_j}{\left(1+|\lambda_j|^2\right)\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}+\xi_j\mathrm{Re}z\right)\right)\le$$
$$\le\exp\left(\xi_k\mathrm{Re}z\right)\exp\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left(-\frac{\left(1+|z|^2\right)\mathrm{Re}^2\lambda_j}{\left(1+|\lambda_j|^2\right)\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}\right)\right).$$

Кроме того (см. [9]),

$$\left|\frac{2\mathrm{Re}\lambda_j}{1+\lambda_j}\frac{z+1}{z+\overline{\lambda_j}}\right|^2 \le 4\frac{\mathrm{Re}\lambda_j}{\left(1+|\lambda_j|^2\right)\left|z+\overline{\lambda_j}\right|^2}\left(\left(|z|^2+1\right)\mathrm{Re}\lambda_j+\left(1+|\lambda_j|^2\right)\mathrm{Re}z\right) = 4\mathrm{Re}\frac{\mathrm{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}\frac{1+z\overline{\lambda_j}}{z+\overline{\lambda_j}}.$$

К тому же, согласно условию (1.8),

$$|F_k(\lambda_k)| = \exp\left(-\sum_{j=k}^{\infty}\mathrm{Re}\left(-\xi_j\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k+\overline{\lambda_j}}+\xi_j\frac{1}{\lambda_k+\overline{\lambda_j}}\right)\right) \ge c_2.$$

Следовательно,

$$\left|d_k\frac{\Omega(z)\left(z+\overline{\lambda_k}\right)}{(z-\lambda_k)\Omega'(\lambda_k)2\mathrm{Re}\lambda_k}\left(\frac{1+z}{1+\lambda_k}\right)^2\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k}{z+\bar{\lambda}_k}\right)^2\frac{e^{\xi_k\lambda_k}}{e^{\xi_k z}}\frac{F_k(z)}{F_k(\lambda_k)}\right| \le$$

$$\le c_3\left|\left(\frac{1+z}{1+\lambda_k}\right)^2\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k}{z+\bar{\lambda}_k}\right)^2\frac{e^{\xi_k\lambda_k}}{e^{\xi_k z}}\frac{F_k(z)}{F_k(\lambda_k)}\right| \le$$

$$\le c_4\frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}\mathrm{Re}\frac{1+z\overline{\lambda_k}}{z+\overline{\lambda_k}}\exp\left(-\sum_{j\ge k}\left(\frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}\mathrm{Re}\frac{1+z\overline{\lambda_k}}{z+\overline{\lambda_k}}\right)\right).$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|\exp\left(-\sum\limits_{j=k}^{\infty}|a_j|\right) < 1$, то приходим к утверждению теоремы 3.

3. Доказательство теоремы 1

Лемма 3.1. *Пусть* $\sigma \in [0;+\infty)$, *функция* $\Omega \in H^\infty(\mathbb{C}_+;h_0)$ *имеет нули в точках* $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$, $\tilde{\Omega}_k(z) = \frac{\Omega(z)(z+\overline{\lambda_k})}{z-\lambda_k}$ *и* $\tau_k = \frac{\delta_k}{1+\sqrt{1+\delta_k^2}}$, *где* $\delta_k = 1$, *если* $Re\lambda_k < 1$ *или если* $\sigma = 0$, *и* $\delta_k = (Re\lambda_k)^{-1}$, *если* $\sigma > 0$ *и* $Re\lambda_k \ge 1$. *Тогда* $\left|\tilde{\Omega}_k(z)\right| \le c_2\exp(\sigma|y|)/\tau_k$, *если* $z\in\mathbb{C}_+$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Действительно, поскольку $\tau_k \in (0;1)$ и $\delta_k = \frac{2\tau_k}{1-\tau_k^2}$, то круги

$$U_k := \left\{\varsigma\in\mathbb{C} : \left|\frac{\varsigma-\lambda_k}{\varsigma+\overline{\lambda_k}}\right| < \tau_k\right\} = \left\{\varsigma = \xi+i\eta\in\mathbb{C} : \left(\xi-\frac{1+\tau_k^2}{1-\tau_k^2}\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2+(\eta-Im\lambda_k)^2 < \left(\frac{2\tau_k\mathrm{Re}\lambda_k}{1-\tau_k^2}\right)^2\right\}$$

содержатся в $\mathbb{C}_+$. Далее, $\left|\tilde{\Omega}_k(z)\right| \le |\Omega(z)|/\tau_k \le c_1\exp(\sigma|y|)/\tau_k$, если $\left|\frac{z-\lambda_k}{z+\overline{\lambda_k}}\right| \ge \tau_k$. Если же $\left|\frac{z-\lambda_k}{z+\overline{\lambda_k}}\right| < \tau_k$, то, используя принцип максимума модуля, получаем

$$\left|\tilde{\Omega}_k(z)\right| \le \max\left\{\frac{c_1e^{\sigma|Im\varsigma|}}{\tau_k} : \left|\frac{\varsigma-\lambda_k}{\varsigma+\overline{\lambda_k}}\right| = \tau_k\right\} \le \frac{1}{\tau_k}e^{\sigma|y|+2\sigma\delta_k\mathrm{Re}\lambda_k}.$$

Поскольку $\sigma\delta_k\mathrm{Re}\lambda_k \le \sigma$, то приходим к завершению доказательства леммы. □

Отметим, что $\tau_k \ge 1/3\mathrm{Re}\lambda_k$, если $\sigma > 0$ и $\mathrm{Re}\lambda_k \ge 1$. Следовательно, из доказанной выше леммы вытекает, что последовательность $\lambda = (k)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 для $\sigma = \pi$, и при этом можно взять $\Omega(z) = \sin\pi z$. К тому же, $l^\infty \subset l^\infty(h_0;\lambda)$, если $\lambda = (k)$. Поэтому теорема 1 – следствие теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 2

Лемма 4.1. *Пусть* (λ_k) – *последовательность различных комплексных чисел из полуплоскости* $\mathbb{C}_+ = \{z : Re z > 0\}$ *таких, что выполняется (1.6), (1.8) и*

$$\sup\left\{S(r) - \frac{\sigma}{2\pi}\ln r : r \in [1; +\infty)\right\} < +\infty.$$

Пусть, кроме того, (λ_k) *является подпоследовательностью нулей такой голоморфной в* $\mathbb{C}_+$ *функции* Ω, *что*

$$\left|\frac{\Omega(z)\left(z + \overline{\lambda_k}\right)}{(z - \lambda_k) Re\lambda_k \Omega'(\lambda_k)}\right| \leq c_0 e^{rh_-(\varphi)} e^{-|\lambda_k| h_-(\varphi_n)}, z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+, k \in \mathrm{N}.$$

Тогда для каждой последовательности $(d_k) \in l^\infty(h_+; \lambda)$ *существует голоморфная в* $\mathbb{C}_+$ *функция* $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+)$, *удовлетворяющая условию (1.5).*

Доказательство этой леммы в точности повторяет доказательство теоремы 3.

Лемма 4.2. *Пусть* $\sigma \in [0; +\infty)$, *функция* $\Omega \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+)$ *имеет нули в точках* $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$ *и* $\tilde{\Omega}_k(z) = \frac{\Omega(z)(z+\overline{\lambda_k})}{z-\lambda_k}$. *Тогда* $\left|\tilde{\Omega}_k(z)\right| \leq c_2 \exp\left(rh_+(\varphi)\right)/\tau_k$, *если* $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2. Будем считать, что $\sigma = \pi$. Пусть $\Omega(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(z-1)} \sin\frac{\pi}{2}(z-1)$. Эта функция имеет в $\mathbb{C}_+$ нули в точках $\lambda_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, и $\Omega \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+)$. При этом, $|\Omega'(\lambda_k)| = \pi/2$, и согласно лемме 4.2 последовательность $\lambda_k = 2k-1$ удовлетворяет всем условиям леммы 4.1. Пусть $d_k = f(\lambda_k)$. Тогда $(d_k) \in l^\infty(h_+; \lambda)$. Поэтому, согласно лемме 4.1, существует функция $f_0 \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+)$ такая, что $f_0(\lambda_k) = f(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{f}(z) = \frac{f(z) - f_0(z)}{\Omega(z)}$. Поскольку (см.[10]) $\left|\sin\frac{\pi}{2}(z-1)\right| \geq c_0 \exp\left(\frac{\pi}{2}|Imz|\right)$ вне кругов $|z - \lambda_k| \leq \varepsilon$, и, следовательно, вне этих кругов справедлива оценка $\left|\tilde{f}(z)\right| \leq c_5 \exp\left(rh_-(\varphi)\right)$, $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Поэтому, используя принцип максимума, убеждаемся, что $\tilde{f} \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_-)$. Кроме того,

$$f(z) = \tilde{f}(z)\,\Omega(z) + f_0(z) = \frac{1}{2i}\tilde{f}(z) + f_0(z) - \frac{1}{2i}e^{-i\pi z}\tilde{f}(z).$$

Поскольку $f_1(z) := \frac{1}{2i}\tilde{f}(z) \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_-)$ и $f_2(z) := f_0(z) - \frac{1}{2i}e^{-i\pi z}\tilde{f}(z) \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_+)$, то теорема 2 доказана.

5. Дополнения и замечания

Условия (1.6) и (1.7) необходимы для справедливости утверждения теоремы 3. Действительно, пусть $Q(z) = f(z)\frac{z-\lambda_1}{z+\overline{\lambda_1}}$, где $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ такая функция, что $f(\lambda_1) = 1$ и $f(\lambda_k) = 0$, если $k \neq 1$. Тогда $Q \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ и (λ_k) – подпоследовательность нулей функции Q. Поэтому из обобщенной формулы Карлемана [11] получаем [12] (1.6) и (1.7). Если последовательность (λ_k) удовлетворяет условиям (1.6) и (1.7), то [10] существует функция $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$, для которой она является последовательностью нулей. Каждая функция $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$, $f \neq 0$, представляется в виде [11]

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z}\tilde{B}(z)\tilde{T}(z), \tag{5.1}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ – постоянные,

$$Q_1(t;z) = \frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

$$\tilde{T}(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t;z)\left(\ln|f_0(it)|dt + dh(t)\right)\right\}, \quad \tilde{B}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} W_j(z),$$

$f_0(it) = f(it)$ – угловые граничные значения $f(z)$ на $\partial\mathbb{C}_+$, $h(t)$ – невозрастающая функция (сингулярная граничная функция функции f), производная которой равна 0 почти везде, $W_j(z) = \frac{z-\lambda_j}{z+\overline{\lambda_j}}$, если $|\lambda_j| \le 1$, и $W_j(z) = \frac{1-z/\lambda_j}{1+z/\overline{\lambda_j}} \exp\left(\frac{z}{\lambda_j} + \frac{z}{\overline{\lambda_j}}\right)$, если $|\lambda_j| > 1$. В [13] содержится следующее

Утверждение 1. *Если $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ и $f \not\equiv 0$, то: 1_a) $\log|f_0| \in L_1^{loc}(i\mathbb{R})$, 2_a) $f_0(iy)\exp(-\sigma|y|) \in L^\infty(\mathbb{R})$, 1_b) $\sup\{K(r) : r \in [1;+\infty)\} < +\infty$, и выполняется (1.6), где*

$$K(r) := K_Z(r) + K_S(r) + K_B(r), \quad K_Z(r) := 2\sum_{1<|\lambda_k|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2} - \frac{1}{r^2}\right) Re\lambda_k,$$

$$K_S(r) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{|t|^2} - \frac{1}{r^2}\right) dh(t),$$

$$K_B(r) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{|t|^2} - \frac{1}{r^2}\right)\log|f_0(it)|\,dt.$$

Наоборот, если последовательность (λ_k) точек полуплоскости $\mathbb{C}_+$, функция $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и невозрастающая функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, производная которой равна 0 почти везде, являются такими, что выполняются условия 1_a), 2_a), 1_b) и (1.6), то функция f, определенная равенством (5.1), будет голоморфной в $\mathbb{C}_+$ и будет удовлетворять там оценки $|f(z)| \le c_1\exp(\sigma|y| + c_1 x)$. При этом, если в произведении $\tilde{B}(z)$ некоторую часть сомножителей опустить, то приведенная выше оценка сохранится, и постоянная c_1 не увеличится.

Используя это утверждение и некоторые соображения из доказательства необходимой части интерполяционной теоремы Карлесона (см. [14]), можно убедиться, что каждое из следующих условий

$$\prod_{j\in\mathbb{N}, j\ne k} |W_j(\lambda_k)| \ge c_3\exp\left(-c_3\mathrm{Re}\lambda_k\right), \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}, j\ne k}\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k\mathrm{Re}\lambda_j}{\left|\lambda_k + \overline{\lambda_j}\right|^2} - \frac{2\mathrm{Re}\lambda_k\mathrm{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}\right) \le c_4\mathrm{Re}\lambda_k, \quad k\in\mathbb{N},$$

является необходимым для разрешимости в классе $H^\infty(\mathbb{C}_+; h_0)$ интерполяционной задачи (1.5) для каждой последовательности $d \in l^\infty(h_0;\lambda)$. Однако, доказать необходимость условий (1.8) и (1.9) не удается. В этой связи полезно обратить внимание на неравенство

$$\sum_{j=k}^{\infty}\mathrm{Re}\left(-\xi_j\frac{\lambda_k^2 - 1}{\lambda_k + \overline{\lambda_j}}\right) = \sum_{j=k}^{\infty}\left(\xi_j\frac{\left(1+|\lambda_k|^2\right)\mathrm{Re}\lambda_j + \left(1+|\lambda_j|^2\right)\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_k + \overline{\lambda_j}\right|^2} - \xi_j\mathrm{Re}\lambda_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=k}^{\infty}\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k\mathrm{Re}\lambda_j}{\left|\lambda_k + \overline{\lambda_j}\right|^2} - \frac{\mathrm{Re}\lambda_k\mathrm{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Levin *Lectures on entire functions* – AMS, 1996. –248 p.
2. Y. Lyubarskii, K. Seip *Complete interpolating sequences for Paley-Wiener spaces and Muckenhoupt's (Ap) condition* // Rev. Matem. Iberoamer. 13:2, 361–376 (1997).
3. Винницький Б.В. *Про узагальнення теореми Пелі-Вінера* // Мат. студії. Т.4. 1995. С. 37–44.
4. Винницький Б.В. *Про розв'язки однорідного рівняння згортки водному класі функцій, аналітичних в півсмузі* // Матем. студії. Т.'7, № 1. 1997. С. 41–52.
5. V.N. Dilnyi *Splitting of some spaces of analitic functions* Ufa Mathematical Journal. V. 6, № 2. 2014. P. 26–35.
6. Винницький Б., Дільний В. *Про один аналог теореми Пелі-Вінера для вагових просторів Гарді* // Мат. студії. Т. 14. 2000. С. 35–40.
7. Малютин К.Г. *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Матем. сб. Т. 184, № 2. 1993. С. 129–144.
8. Малютин К.Г. *О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II* / / Известия АН России. Т. 59, № 5. 1995. С. 103–126.
9. Казарян К.Г. *Решение кратной интерполяционной залачи в класах H^∞ в полуплоскости и полосе* // Известия АН Арм.ССР.Математика. Т. XXV, № 1. 1990. 2014. С. 66–82.
10. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1983. – 176с.
11. Говоров Н. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М. : Наука, 1986. – 240 с.
12. Винницкий Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. Т. 46, № 5. 1994. С. 484–500.
13. B. Vynnytskyi, V. Sharan *On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane* // Мат. студ. Т. 14. 2000. С. 41–48.
14. Гофман К. *Банаховы пространства аналитических функций* – М., ИЛ, 1963. С. 35–40.

Богдан Васильевич Винницкий,
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3,
82100, г. Дрогобыч, Украина
E-mail: vynnytskyi@ukr.net

Владимир Лукьянович Шаран,
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3,
82100, г. Дрогобыч, Украина
E-mail: volsharan@ukr.net

Ирина Богдановна Шепарович,
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3,
82100, г. Дрогобыч, Украина
E-mail: isheparovych@ukr.net