ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 68-71.

УДК 517.9

О ТЕОРЕМЕ БАРИ–СТЕЧКИНА

А.И. РУБИНШТЕЙН

Профессору Сергею Александровичу Теляковскому к его 85-летию.

Аннотация. В начале прошлого века Н.Н. Лузин доказал сходимость почти всюду несобственного интеграла, представляющего сопряженную функцию $\bar{f}$ к суммируемой с квадратом 2π-периодической $f(x)$. Несколькими годами позже И.И. Привалов доказал аналогичный факт для просто суммируемой функции. В.И. Смирнов показал, что если $\bar{f}$ суммируема, то ее ряд Фурье является сопряженным к ряду Фурье для $f(x)$. Достаточно очевидно, что если $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$, то и $\bar{f}(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$. Преобразование Гильберта для $f(x)$ отличается от $\bar{f}(x)$ на ограниченную функцию и имеет более простое ядро. Нетрудно показать, что и преобразование Гильберта для $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$, также принадлежит $\operatorname{Lip}\alpha$. В 1956 г. Н.К. Бари и С.Б. Стечкин нашли необходимое и достаточное условие на модуль непрерывности $f(x)$, что $\bar{f}(x)$ имеет тот же модуль непрерывности. Автор в 2016 г. ввел понятие сопряженной функции как преобразования Гильберта для функций, определенных на диадической группе. В предлагаемой работе показано, что для такой сопряженной функции не имеет места аналог теоремы Бари–Стечкина (и Привалова).

Ключевые слова: двоичная группа, сопряженная функция, модуль непрерывности, теорема Бари–Стечкина.

Mathematics Subject Classification: 42A50

Как известно (см., например, [1], глава VIII), интегральный оператор

$$(\Phi f)(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg} t/2}dt \tag{1}$$

сопоставляет каждой 2π-периодической функции $f(x) \in L(-\pi;\pi)$ функцию $\widetilde{f}(x)$, называемую сопряженной к $f(x)$, представляющую мнимую часть степенного ряда на окружности $|z|=1$. Интеграл (1) существует почти всюду на $[-\pi;\pi]$ для всех $f(x) \in L_2(-\pi;\pi)$ — Н.Н. Лузин [2] и для $f(x) \in L(-\pi;\pi)$ — И.И. Привалов [3].

В [3] И.И. Привалов показал, что если $|f(x+h)-f(x)| \leqslant C\cdot|h|^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, то есть $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$, то всюду

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg} t/2}dt \tag{2}$$

и $\widetilde{f}(x)$ тоже принадлежит $\operatorname{Lip}\alpha$.

В [4] Н.К. Бари показала, что если для непрерывной монотонно возрастающей функции $\varphi(\delta)$ выполнены условия: существует постоянная $C>1$ такая, что

$$1 < \varliminf_{\delta\to0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant \varlimsup_{\delta\to0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < C, \tag{3}$$

то из условия

$$\omega(\delta,f) = \sup_{|h|\leqslant\delta, x\in[-\pi;\pi]} |f(x+h)-f(x)| = O(\varphi(\delta)) \tag{4}$$

A.I. Rubinshtein, On Bary–Stechkin theorem.

Поступила 18 августа 2017 г.

следует, что

$$\omega(\delta,\widetilde{f}) = O(\varphi(\delta)). \tag{5}$$

В [5] Н.К. Бари и С.Б. Стечкин показали, что если к условию монотонности $\varphi(\delta)$ дополнительно потребовать, чтобы $\dfrac{\varphi(\delta)}{\delta}$ не возрастало, то (3) является и необходимым для выполнения (5). То есть установлен критерий (3) принадлежности функций $f(x)$ и $\widetilde{f}(x)$ одному классу — имели одинаковую "гладкость".

Многократно (начиная с Н.Н. Лузина) указывалось, что вместо функции $\widetilde{f}(x)$, (1), (2), удобнее рассматривать функцию

$$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt, \tag{6}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Почти дословным повторением рассуждений на стр. 561–562 в [1] можно получить, что если $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, то и $F(x)$ из (6) принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$.

Пусть G — множество последовательностей из нулей и единиц, в котором введена операция "$\dot{+}$" покоординатного сложения по модулю 2, то есть

$$\begin{cases} G = \bigl\{x=(x_1,x_2,\dots), x_k\in\{0;1\}\bigr\},\\ x\dot{+}y=(x_1,x_2,\dots)\dot{+}(y_1,y_2,\dots)=z=(z_1,z_2,\dots),\ \text{где } z_k=(x_k+y_k)(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно по (7), что G является абелевой (коммутативной) группой и становится топологической коммутативной группой, если топологию определить с помощью системы окрестностей нулевого элемента $O=(0,0,\dots)$ группы G:

$$U_{k-1} = \Bigl\{x=(\underbrace{0,\dots,0}_{k-1},x_k,\dots)\Bigr\},\quad k=1,2,\dots. \tag{8}$$

Легко видеть, что множества U_{k-1} из (8) являются подгруппами G, причем

$$G=U_0\supset U_1\supset\dots,\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}U_{k-1}=\{O\}. \tag{9}$$

Если определить меру μ так, что

$$\mu\bigl(U_{k-1}\bigr)=2^{-(k-1)},\quad k=1,2,\dots, \tag{10}$$

то стандартным образом μ оказывается нормированной инвариантной относительно групповой операции "$\dot{+}$" мерой — мерой Хаара–Лебега на G (см., например [6] или [7]). Естественно возникает интеграл Лебега–Хаара по мере μ для функций $f:G\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

$$\int_G f(x)\,d\mu$$

и пространства $L_p(G)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Системой понтрягинских характеров группы G оказывается система Уолша–Пэли $W=\{w_n(x); x\in G, n=0,1,\dots\}$ $(w_n(x\dot{+}y)=w_n(x)\cdot w_n(y))$. "Гладкость" функции $f(x)\in L_p(G)$ определяется модулем непрерывности

$$\omega_p(f)=\left\{\omega_n^{(p)}(f)=\sup_{h\in U_n}\Bigl(\int_G|f(x\dot{+}y)|^p d\mu(x)\Bigr)^{1/p},\ n=0,1,\dots;\ 1\leqslant p\leqslant\infty\right\}. \tag{11}$$

В [8] и [9] показано, что для любой последовательности

$$\omega_0\geqslant\omega_1\geqslant\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\omega_n=0 \tag{12}$$

и любого $p\in[1;\infty]$ найдётся функция $f(x)\in L_p(G)$ такая, что

$$\omega_n^{(p)}(f)=\omega_n,\quad n=0,1,\dots. \tag{13}$$

Аналогом функции $\dfrac{1}{x}$ на $(0;\pi)$ для случая G можно считать функцию

$$K(x) = 2^k, \quad x \in U_{k-1} \setminus U_k,\ k = 1, 2, \dots . \tag{14}$$

Очевидно, что функция $F(x)$ из (6) может быть записана в виде

$$F(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{f(x+t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt. \tag{15}$$

Следовательно, естественно рассматривать оператор

$$(Kf)(x) = -\lim_{m\to\infty} \int_{G\setminus U_m} \big(f(x \dotplus t) - f(x)\big) K(t)\,d\mu(t), \tag{16}$$

для $f : G \to \mathbb{R}$ ($K(t)$ определяется (14), а знак минус — по аналогии с (1), (2)). И естественно задать вопрос о связи $\omega_p(f)$ и $\omega_p(Kf)$ — справедливы ли теоремы Привалова из [3] и Бари–Стечкина из [5]?

Оператор Kf из (16) рассматривался автором в [10], [11]. В [10] было установлено, что если

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n\geqslant 0} \sum_{2^n\leqslant k\leqslant 2^{n+1}-1} c_k w_k(x), \quad c_k = c_k(f) = \int_G f(x) w_k(x)\,d\mu(x), \tag{17}$$

то

$$(Kf)(x) \sim \sum_{n\geqslant 0} (n+2) \sum_{2^n\leqslant k\leqslant 2^{n+1}-1} c_k w_k(x). \tag{18}$$

Пусть

$$g(x) = A_0 + \sum_{n\geqslant 0} A_n \sum_{2^n\leqslant k\leqslant 2^{n+1}-1} w_k(x). \tag{19}$$

В [12] (лемма 3, А.И. Рубинштейн) показано, что

$$\omega_n^{(p)}(g) = \begin{cases} \sup\limits_{k\geqslant n} \Big\{ 2 \sum\limits_{s\geqslant k+1} \Big| \sum\limits_{k+1\leqslant\nu\leqslant s} 2^\nu (A_{\nu-1} - A_\nu) \Big|^p \cdot 2^{-(s+1)} \Big\}^{1/p} & \text{при } 1 \leqslant p < \infty \\ \sup\limits_{n\leqslant k\leqslant l} \Big| \sum\limits_{k+1\leqslant\nu\leqslant l} 2^\nu (A_{\nu-1} - A_\nu) \Big| & \text{при } p = \infty. \end{cases} \tag{20}$$

Пусть $p = \infty$ и $A_\nu \searrow 0$. Тогда

$$\omega_n^{(\infty)}(g) = \sum_{\nu\geqslant n+1} 2^\nu (A_{\nu-1} - A_\nu)$$

и

$$\omega_n^{(\infty)}(g) - \omega_{n+1}^{(\infty)}(g) = 2^{n+1}(A_n - A_{n-1}),$$

откуда

$$A_n = \sum_{k\geqslant n} 2^{-(k+1)} \big(\omega_k^{(\infty)}(g) - \omega_{k+1}^{(\infty)}(g)\big).$$

Таким образом, по [11] (см. (18))

$$\omega_n^{(\infty)}(Kg) = \sum_{\nu\geqslant n+1} 2^\nu (A_{\nu-1}\log(\nu-1) - A_\nu \log\nu). \tag{21}$$

Соотношения (21) показывают, что существуют функции из $L_\infty(g)$, для которых теоремы Привалова и Бари–Стечкина не имеют места в пространстве $L_\infty(g)$.

Рассмотрим другой крайний случай — $p = 1$. Тогда при $A_\nu \searrow 0$

$$\omega_n^{(1)}(g) = A_n$$

(обязательно $A_n = o\big((\log n)^{-1}\big)$) и

$$\omega_n^{(1)}(Kg) = A_n \log n.$$

То есть теоремы Привалова и Бари–Стечкина и для $L_1(G)$ не имеют места.

Рассмотрим случай $p = 2$. В [13] показано, что для любой функции $f(x) \in L_2(G)$ с рядом Фурье–Уолша–Пэли вида (17)

$$\left(\sum_{k\geqslant 2^n}\left|c_k(f)\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_n^{(2)}(f),$$

причем найдется функция $g(x) \in L_2(G)$, для которой

$$\left(\sum_{k\geqslant 2^n}\left|c_k(g)\right|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_n^{(2)}(g). \tag{22}$$

Ранее для тригонометрического случая эти факты установлены Н.И.Черных в [14].

Из (22) и (18) следует, что теоремы Привалова и Бари–Стечкина не имеют места и для $L_2(G)$.

При достаточно быстром стремлении к нулю последовательности $\{A_\nu\}$ для любого $p \in [1;\infty]$ по (20) можно получить, что теоремы Привалова и Бари–Стечкина не имеют места в $L_p(G)$.

Частично результаты данной заметки анонсированы в [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* М.: ГИФМЛ, 1961.
2. Лузин Н.Н. *Интеграл и тригонометрический ряд.* М.: ГИФМЛ, 1915.
3. Привалов И.И. *Интеграл Cauchy.* Саратов, 1919.
4. Бари Н.К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций* // ИАН, 1955, Т. 19, С. 285–302.
5. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // ТММО. 1956, Т. 5, С. 485–522.
6. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М.,Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах.* Баку: ЭЛМ, 1981.
7. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша.* М.: Наука, ГРФМЛ, 1981.
8. Рубинштейн А.И. *О модулях непрерывности функций, определенных на нульмерной группе* // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 3. С. 379–388.
9. S. Fridli *On modulus of continuity with respect to functions defined on Vilenkin groups* // Acta Math. Hungar. 1985. V. 45. P. 393–396.
10. A.I. Rubinstein *About functions on the dyadic group and Walsh series* // Analysis Mathematica. 2015. V. 41. No. 1–2. P. 73–81.
11. A.I. Rubinstein *On a certain integral operator acting on functions defined on the dyadic group.* // Eurasian Mathematical Journal. 2016. V. 7, No. 1. P. 68–73.
12. Тиман М.Ф.,Рубинштейн А.И. *О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах.* // Известия ВУЗов, Математика. 1980. № 8. С. 66–76.
13. Виленкин Н.Я.,Рубинштейн А.И. *Одна теорема С.Б. Стечкина об абсолютной сходимости и ряды по системам характеров нуль-мерных групп.* // Известия ВУЗов, Математика. 1975. № 9, С. 3–9.
14. Черных Н.И. *О неравенстве Джексона в L_2.* // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88, С. 71–74.
15. A.I. Rubinstein *On the Analog of the Bary–Stechkin Theorem of the Conjugate Functions for the Dyadic Group.* // Sixth international conference "The problems of Mathematical Physics and Mathematical modelling", Book of abstracts, 2017, Moscow, Russia, P. 210–211.

Александр Иосифович Рубинштейн,
НИЯУ МИФИ,
Каширское ш., 31,
115409, г. Москва, Россия
E-mail: `rubinshtein_aleksandr@mail.ru`