УДК 517.95

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СТУПЕНЬКЕ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА

Р.Ч. КУЛАЕВ, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. В данной работе изучается система уравнений цепочки Вольтерра с начальными условиями в виде ступеньки. Решения задачи Коши ищутся в классе положительных функций. Качественно рассматриваемая задача перекликается с задачей о распаде разрыва для уравнения Кортевега–де Фриза. Показывается, что решение задачи Коши для цепочки Вольтерра можно строить в виде рядов Тейлора. Для ограниченных начальных данных получены оценки, из которых следует, что радиус сходимости ряда больше нуля. Формулируется локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши с ограниченными начальными данными.

Рассматривается специальное условие замыкания (обрыва) цепочки Вольтерра: $b_n b_{n+1} = 1$, $n \geq N \geq 2$. Для замыкания цепочки даются уточнённые оценки решений. Доказывается, что при условиях замыкания решения цепочки определены при всех положительных временах. Также для замкнутой цепочки устанавливаются два закона сохранения. Один из законов сохранения является следствием самого условия замыкания цепочки, а второй следует из лагранжевости цепочки.

Ключевые слова: цепочка Вольтерра, ленгмюровская цепочка, интегрируемые системы, законы сохранения, задача о распаде начального разрыва.

Mathematics Subject Classification: 34A12, 34A55, 35Q53, 37K40

Введение

В настоящей работе изучаются уравнения цепочки Вольтерра [1]:

$$\dot{b}_n = b_n(b_{n+1} - b_{n-1}), \quad b_n = b_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Системе (1) посвящено множество работ (см., например, [2]–[5] и библиографию там же). Такой интерес вызван не только её разнообразными приложениями, но и тем, что цепочка Вольтерра представляет собой интересный пример интегрируемой дифференциально-разностной модели, допускающей исследование в рамках метода обратной задачи рассеяния. Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать задачу Коши для бесконечной цепочки Вольтерра в случае быстроубывающих начальных данных (см. [4]) и в периодическом случае (см. [6]).

Основное внимание в данной работе уделяется изучению свойств *положительных* решений задачи Коши для цепочки Вольтерра с начальными данными в виде ступеньки:

$$b_n(0) = \begin{cases} a, & n < 0; \\ c, & n = 0; \\ b, & n > 0. \end{cases} \tag{2}$$

R.Ch. Kulaev, A.B. Shabat, Conservation laws for Volterra chain with initial step-like condition.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

Поступила 27 сентября 2018 г.

где a, b, c – заданные неотрицательные числа и её частному случаю на полуоси:

$$
\begin{gathered}
b_0(t) = 0; \quad \dot{b}_n = b_n(b_{n+1} - b_{n-1}), \quad t > 0, \\
b_n(0) = 1, \ n \geq 1,
\end{gathered} \tag{3}
$$

соответствующему выбору $a = c = 0$. Обсуждаются вопросы существования решения и условия замыкания цепочки Вольтерра. Отметим, что цепочка Вольтерра является разностным аналогом уравнения Кортевега–де Фриза, и в континуальном пределе переходит в него [7, Гл. 1, §7]. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными в виде ступеньки изучалась в работе А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского [8] в рамках исследования нестационарной структуры бесстолкновительной ударной волны. Дальнейшее развитие и плоды этой теории можно найти в работе Б.А. Дубровина и С.П. Новикова [9] в разделе, посвящённом распаду разрыва в теории КдФ и асимптотике при $t \gg 1$ решений КдФ с начальным условием вида ступеньки.

Рассматривая положительные решения системы (1), мы учитываем, что отказ от условия положительности приводит, как показывают численные эксперименты, к тому, что решение задачи Коши (1), (2) (или задачи (3)) разрушается за конечное время. Положительность решений системы (1) позволяет нам ввести новые динамические переменные $y_n(t) = \log b_n(t)$ и записать цепочку Вольтерра в виде

$$
\dot{y}_n = e^{y_{n+1}} - e^{y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}
$$

Решение задачи Коши для уравнений (4) с заданными начальными условиями $y_n(0)$ можно представить в виде степенного ряда[1]

$$
y_n(t) = y_n(0) + \frac{y_n^{(1)}(0)}{1!}t + \cdots + \frac{y_n^{(k)}(0)}{k!}t^k + \ldots, \tag{5}
$$

однако для этого степенного ряда неясным пока остаётся вопрос о радиусе сходимости, аналитическом продолжении и характере особых точек на границе его круга сходимости. Поэтому более подходящим методом доказательства разрешимости задачи Коши нам видится метод последовательных приближений. Структура правых частей дифференциальных уравнений цепочки (4) позволяет сформулировать теорему о локальной разрешимости задачи Коши для бесконечной системы (4) с начальными условиями $\{y_n(0)\} \in l^\infty$.

На сегодняшний день имеются различные условия обрыва цепочки (1), сохраняющие свойства интегрируемости. Так, например, в работе [3] рассматривался обрыв, совместимый с законами сохранения, а в [10] – с высшими симметриями. В данной статье рассматривается замыкание цепочки (3), задаваемое условиями

$$
b_n b_{n+1} = 1, \quad n \geq N,
$$

при некотором фиксированном $N \geq 2$. Например, в простейшем случае $N = 2$ система уравнений (1) принимает вид

$$
\dot{b}_1 = b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = 1 - b_1 b_2, \quad t > 0,
$$

и сводится к уравнению Риккати

$$
\dot{b}_1 + b_1^2 = (t+2) b_1,
$$

решение которого определено на всей полуоси и выражается через интеграл вероятности. При $N > 2$ для замкнутой цепочки (3) устанавливаются два закона сохранения, один из которых является следствием условия замыкания, а второй следует из лагранжиана замкнутой системы. Кроме того, первый закон сохранения гарантирует возможность продолжения на всю полуось решений замкнутой цепочки (3) в общем случае $N \geq 2$. Вообще же, как показывают численные эксперименты, в задаче (3) можно выделить три отрезка времени: 1) начальный $0 \leq t < R$, где R – радиус сходимости ряда Тейлора (5); 2) период линейного роста $b_1(t)$; 3) промежуток квазистационарного роста – когда $\dot{b}_1(t) \approx 0$ и $b_1(t) \approx 4$ (см. п. 13).

[1]Верхний индекс обозначает порядок производной

1. Разрешимость задачи Коши

В данном пункте рассматривается вопрос о разрешимости задачи Коши:

$$\dot{y}_n = e^{y_{n+1}} - e^{y_{n-1}}, \quad y_n(0) = y_{n,0}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение функцию двух переменных $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1} - e^{x_2}$, заданную в квадрате $\Pi = \{x : -\rho \le x_1, x_2 \le \rho\}$. Очевидно, что

$$M = \max_{x \in \Pi} |f(x)| = e^{\rho} - e^{-\rho}. \tag{7}$$

Также, поскольку

$$\max_{x \in \Pi} |\nabla f(x)| = \sqrt{2} e^{\rho},$$

то функция f удовлетворяет в Π условию Липшица

$$|f(x^*) - f(x)| \le \sqrt{2} e^{\rho} \left(|x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2|\right).$$

Возвращаясь к задаче Коши (6), введем обозначения

$$\mathbf{y}(t) = \{y_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \qquad \mathbf{y}_k = \{y_{k,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}},$$
$$F(\mathbf{y}) = \{F_n(\mathbf{y})\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f(y_{n+1}, y_{n-1})\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Тогда задача Коши для системы (6) принимает вид

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = F(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{8}$$

Обозначим через $C[(\xi, \eta); l^{\infty}]$ множество функций $\mathbf{y} : (\xi, \eta) \to l^{\infty}$ таких, что $y_n(t) \in C(\xi, \eta)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Здесь через l^{∞} обозначено пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел. Каждой функции $\mathbf{y} \in C[(\xi, \eta); l^{\infty}]$ соответствует вещественнозначная функция

$$||\mathbf{y}(t)|| := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |y_n(t)| < \infty,$$

определенная на том же промежутке (ξ, η).

Легко видеть, что задача Коши (8) эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t F(\mathbf{y}(s)) ds. \tag{9}$$

Мы считаем, что решение интегрального уравнения (9) существует, если существует интервал $(\xi, \eta) \ni 0$ и функция $\mathbf{y} \in C[(\xi, \eta); l^{\infty}]$, удовлетворяющая уравнению (9).

Теорема 1. *Для любых $\rho > 0$ и $\mathbf{y}_0 \in l^{\infty}$ существует единственное решение интегрального уравнения (9), определенное, по крайней мере, на промежутке $(-h, h)$, где $h = \frac{\rho}{M}$, и такое, что $\sup\limits_{|t|<h} ||\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0|| \le \rho$.*

Доказательство. Теорема доказывается по стандартной схеме с помощью метода последовательных приближений. Задача Коши (8) сводится к задаче с нулевыми начальными данными. Поэтому условие $\mathbf{y}_0 \in l^{\infty}$ позволяет, не ограничивая общности, считать, что $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$.

Учитывая свойства функции F, легко видеть, что если $\sup\limits_t ||\mathbf{y}^*(t)|| \le \rho$, $\sup\limits_t ||\mathbf{y}(t)|| \le \rho$, то для каждого $n \in \mathbb{Z}$ выполнено условие Липшица

$$|F_n(\mathbf{y}^*(t)) - F_n(\mathbf{y}(t))| \le L \left(|y_{n+1}^*(t) - y_{n+1}(t)| + |y_{n-1}^*(t) - y_{n-1}(t)|\right), \quad L = \sqrt{2} e^{\rho}.$$

Оно позволяет ввести последовательность приближений

$$\mathbf{y}_k(t) = \int_0^t F(\mathbf{y}_{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и повторить для них «классические» рассуждения:

Шаг 1. Корректность итераций. Если теперь ограничить наши рассмотрения промежутком $-h < t < h$, где $h = \rho/M$, где величина M определена формулой (7), то процедура построения последовательных приближений корректна ввиду оценок

$$|y_{k,n}(t)| \leq \left| \int_0^t |F_n(\mathbf{y}_{k-1}(s))|\, ds \right| \leq M|t|.$$

Шаг 2. Построение мажорантного ряда. Привлекая условие Липшица, имеем

$$|y_{1,n}(t)| \leq \left| \int_0^t |F_n(\mathbf{0})|\, ds \right| \leq h,$$

$$|y_{k+1,n}(t) - y_{k,n}(t)| \leq \left| \int_0^t |F_n(\mathbf{y}_k(s)) - F_n(\mathbf{y}_{k-1}(s))|\, ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_0^t |y_{k,n+1}(s) - y_{k-1,n+1}(s)| + |y_{k,n-1}(s) - y_{k-1,n-1}(s)|\, ds \right| \leq 2h \frac{L^k |t|^k}{k!}.$$

Шаг 3. Доказательство единственности. Если $\hat{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{y}$ – два решения, то, используя условие Липшица, получим

$$||\hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)|| \leq 2\rho \frac{L^k |t|^k}{k!}$$

для любых $t \in (-h, h)$ и $k \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *В случае ступеньки* (2) *при достаточно малых временах сумма первых производных функций* b_n*, удовлетворяющих системе уравнений* (1)*, постоянна и равна*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{b}_n = b^2 - a^2. \tag{10}$$

2. Замыкание цепочки Вольтерра и законы сохранения

Рассмотрим цепочку Вольтерра (3). Дополним её условием обрыва, определяемым для некоторого фиксированного $N > 1$ равенствами

$$b_n(t) b_{n+1}(t) = 1, \quad n \geq N. \tag{11}$$

Условие обрыва цепочки легко даёт соотношение

$$\dot{b}_1 + \cdots + \dot{b}_N = 1, \quad N \geq 2, \tag{12}$$

из которого сразу получается один закон сохранения:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_N = N + t. \tag{13}$$

Из равенства (13), в частности, следуют двусторонние оценки (см. пункт 3)

$$1 \leq b_1(t) < N + t,$$
$$0 < b_n(t) < N - 1 + t, \quad 2 \leq n \leq N,$$

позволяющие уточнить значение h в теореме 1 и сформулировать следующее утверждение.

Предложение 1. *Существует единственное решение задачи* (3), (11)*, продолжимое на всю полуось* $t > 0$.

Далее мы покажем, что при $N > 2$ система уравнений (3) сводится к деформации экспоненциальных систем серии A с положительно определённой квадратичной формой в лагранжиане.

Для упрощения записей введем обозначение $\beta_n = b_n b_{n+1}$ и перепишем задачу (6) в терминах β_n. Используя соотношения (3), (11), имеем

$$(\log\beta_1)_t = \frac{\dot b_1}{b_1} + \frac{\dot b_2}{b_2} = b_3 + b_2 - b_1,$$
$$(\log\beta_n)_t = \frac{\dot b_n}{b_n} + \frac{\dot b_{n+1}}{b_{n+1}} = b_{n+1} - b_{n-1} + b_{n+2} - b_n, \quad 1 < n < N,$$
$$(\log\beta_n)_t = 0, \quad n \ge N.$$

Отсюда и из (11) получим конечную систему уравнений второго порядка

$$(\log\beta_n)_{tt} = \begin{cases} -2\beta_n + \beta_{n+2}, & n = 1, 2; \\ \beta_{n-2} - 2\beta_n + \beta_{n+2}, & 2 < n < N-2; \\ \beta_{n-2} - 2\beta_n + 1, & n = N-2, N-1. \end{cases} \tag{14}$$

Можно заметить, что уравнения, содержащие производные функций $\log\beta_n$ с нечётными индексами, образуют полноценную самостоятельную систему. Поэтому, вводя обозначения $z_k = \log\beta_{2k-1}$ и $n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot z_1 = -2e^{z_1} + e^{z_2}, \\ \ddot z_2 = e^{z_1} - 2e^{z_2} + e^{z_3}, \\ \ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \ddot z_{n-1} = e^{z_{n-2}} - 2e^{z_{n-1}} + e^{z_n}, \\ \ddot z_n = e^{z_{n-1}} - 2e^{z_n} + 1. \end{cases}$$

Переписав эту систему в виде

$$\ddot{\mathbf z} + A_n \exp\mathbf z = \mathbf e_n, \tag{15}$$

где A_n – трёхдиагональная матрица с 2 на главной диагонали и -1 на смежных; $\exp\mathbf z = (e^{z_1}, \dots, e^{z_n})^T$ и $\mathbf e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$; получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Лагранжиан системы* (15) *записывается в виде*

$$L_n(\mathbf z, \dot{\mathbf z}) = \frac12 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot z_i \dot z_j + \sum_{i=1}^n \gamma_i z_i - \sum_{i=1}^n e^{z_i}, \tag{16}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – элементы обратной к A_n матрицы:

$$A_n^{-1} = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = \frac{i(n-j+1)}{n+1}, \quad 1 \le i \le j \le n;$$

а числа $\gamma_i = i/(n+1)$ являются компонентами вектора $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$, удовлетворяющего алгебраической системе уравнений $A_n\gamma = \mathbf e_n$.

Пример 1. При $n = 3$ мы получаем:

$$\ddot z_1 = -2\beta_1 + \beta_3, \quad \ddot z_2 = \beta_5 - 2\beta_3 + \beta_1, \quad \ddot z_3 = 1 - 2\beta_5 + \beta_3. \tag{17}$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид:

$$L_3(\mathbf z, \dot{\mathbf z}) = \frac{3\dot z_1^2 + 4\dot z_2^2 + 3\dot z_3^2}{8} + \frac{2\dot z_1\dot z_2 + \dot z_1\dot z_3 + 2\dot z_2\dot z_3}{4} + \frac{z_1 + 2z_2 + 3z_3}{4} - \left(e^{z_1} + e^{z_2} + e^{z_3}\right).$$

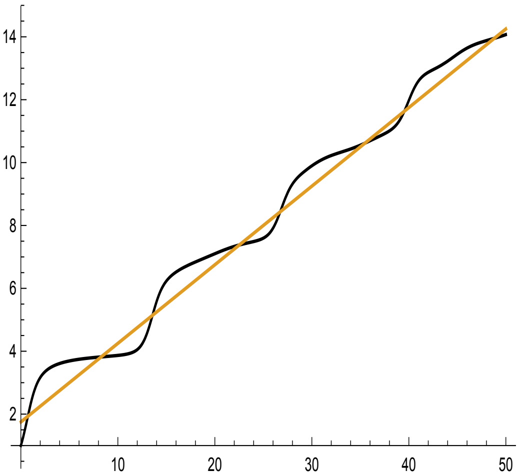
В дополнение к лемме 1 отметим, что $\det A_n = n+1$ и что $A_n^{-1} \to A$ при $n \to \infty$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}, \quad \mathrm{diag}A = (1, 2, 3, 4, 5, \ \dots)$$

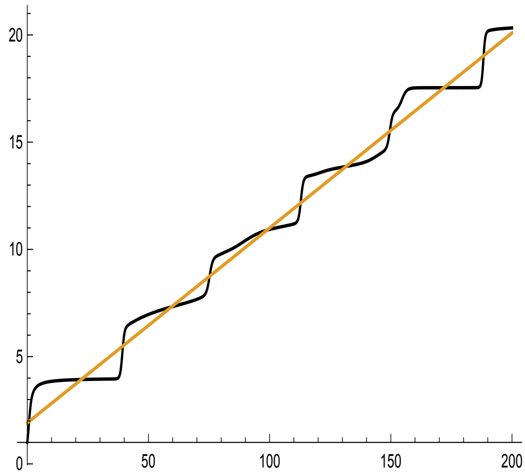
Отметим также, что обрезанная условием (11) система (3) не только сохраняет лагранжеву структуру, но и хорошо согласуется с бесконечной цепочкой (3), если решать обе системы методом итераций. Именно, если мы сведем и дифференциальную систему (3), и её замыкание к системам интегральных уравнений в переменных $y_n = \log b_n$, а затем начнём решать их методом итераций, то в k-ом приближении $\mathbf{y}_k = \{y_{k,1}, y_{k,2}, \ldots, y_{k,n}, \ldots\}$ для обеих систем при $n > k$ будут выполняться равенства $y_{k,n} = 0$. Такая «треугольность» итераций у двух систем приводит к тому, что их первые $N-1$ итераций $\mathbf{y}_k$ у них совпадают.

3. Графики

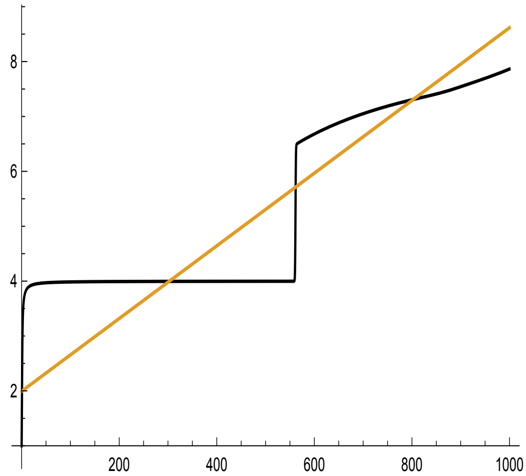
Ниже приводятся графики функции b_1 для замкнутой цепочки, отвечающие значениям $N = 5, 7, 101$. Во всех случаях график функции b_1 сравнивается с прямой $f(t) = (t+N)\big/\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$.



$N = 7$.



$N = 21$.



$N = 301$.

Как видно из приведенных графиков, при увеличении N «первая ступень» графика решения b_1 замкнутой цепочки неограниченно расширяется, приближаясь значениями к 4. Это вместе с замечанием, сделанным в конце пункта 2, даёт основание предполагать, что решение b_1 бесконечной цепочки (3) асимптотически стремится к 4 при $t \to +\infty$.

4. Заключение

Открытым пока остаётся вопрос о возможности продолжения решения задачи Коши (1), (2) на всю числовую прямую. Интерес также представляет и вопрос о существовании решения системы (1) с неограниченными начальными данными. Экспериментируя с разными начальными условиями, можно построить примеры, когда соответствующие ряды Тейлора имеют нулевой радиус сходимости. Мы надеемся, что изучение этих вопросов окажется плодотворным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. *Матем. теория борьбы за существование.* М.: Наука, 1976. 288 с.
2. B.G. Konopelchenko, G. G.Ortenzi *Parabolic regularization of the gradient catastrophes for the Burgers-Hopf equation and Jordan chain* // J. Phys. A: Math. Theor. 2018, V. 51. No. 27. P. 201–220
3. Гарифуллин Р.Н., Шабат А.Б. *О структуре полиномиальных законов сохранения* // Теор. матем. физ. 2009. Т. 161. № 3. С. 1589–1597.
4. Верещагин В.Л. *Асимптотическое разложение решения задачи Коши для цепочки Вольтерра со ступенеобразным началом* // Теор. матем. физ. 1997. Т. 111. № 3. С. 335–344.
5. Козлов В.В., Трещёв Д.В. *Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 3. С. 537-556.
6. Аптекарев А.И. *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода* // Матем. сб. 1989. Т. 125(167). № 2(10). С. 231–258.
7. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука, 1980. 319 с.
8. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
9. Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток: Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория* // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 6. С. 35–124.
10. I.T. Habibullin *Symmetries of boundary problems* // Phys. Lett. A. 1993. V. 178. No. 5. P. 369–375.

Руслан Черменович Кулаев,
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46,
362025, г. Владикавказ, Россия

Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kulaev@smath.ru`

Алексей Борисович Шабат,
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
просп. Академика Семенова, д. 1-А,
142432, МО., г. Черноголовка, Россия

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `shabatab@mail.ru`