ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 87-98.

УДК 517.958

ПРОСТЫЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Модели сплошной среды гидродинамического типа допускают 11-мерную алгебру Ли группы Галилея расширенную равномерным растяжением всех независимых переменных. С точностью до внутренних автоморфизмов перечислены все подалгебры этой алгебры Ли. Для подалгебр малой размерности от 1 до 3 рассмотрены инвариантные подмодели. Для 4-мерных подалгебр инвариантные решения – простые решения, зависящие от конечного числа постоянных. Ставится задача нахождения частично инвариантных решений минимального ранга. Для всех 48 типов 4-мерных подалгебр вычислены базисы точечных инвариантов в удобных для дальнейших вычислений переменных. Это позволяет рассмотреть простейшие частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. При этом получаются как регулярные, так и нерегулярные частично инвариантные подмодели.

Рассмотрены три 4-мерные подалгебры, производящие регулярные частично инвариантные решения в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно. Получено решение, зависящее от произвольной функции двух переменных в декартовых координатах. В цилиндрических координатах подмодель сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. В сферических координатах обобщаются инвариантные решения сферического вихря, построенного на группе вращений.

Рассмотрены две 4-мерные подалгебры, производящие нерегулярные частично инвариантные решения. Возникающие переопределенные системы дифференциальных уравнений приводятся в инволюцию. Условия совместности порождают серии точных решений, зависящих от произвольных функций, так называемые простые волны. Получены решения с поверхностями уровня инвариантных функций в виде двигающихся плоскостей с постоянной нормальным вектором, но переменной скоростью. Для стационарных движений с вращением получены серии точных решений, зависящие от произвольных функций.

Ключевые слова: система гидродинамического типа, инварианты подалгебры, частично инвариантные решения, простые решения.

Mathematics Subjects Classifications: 35B35, 35B06

Введение

Уравнения механики сплошной среды допускают группу Галилея, расширенную растяжением. Алгебра Ли этой группы 11-мерна. Групповой анализ уравнений предполагает перечисление всех подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов [1]. Для подалгебр малой размерности от 1 до 3 рассматривают инвариантные подмодели [2,3,4]. Для 4-мерных подалгебр инвариантные решения задаются конечными формулами с ограниченным числом существенных постоянных. Такие решения называют простыми [5]. Простыми

S.V. Khabirov, Simple partially invariant solutions.

Работа поддержана средствами госбюджета по госзаданию 0246-2019-0052 и при поддержке гранта РФФИ 18-29-10071.

Поступила 10 октября 2018 г.

будут решения некоторых инвариантных подмоделей, если подалгебра подмодели вложена в 4-мерную надалгебру [6]. Простые решения можно обобщить, рассмотрев частично инвариантные решения для 4-мерных подалгебр наименьшего дефекта [7]. Для уравнений гидродинамического типа время t, пространственные переменные $\vec{x}$ – независимые переменные, $\vec{u}$ – скорость, p – давление, ρ – плотность. Для подалгебр с одним инвариантом из независимых переменных одна функция будет общего вида и можно рассмотреть регулярную частично инвариантную подмодель ранга 1 дефекта 1. Остальным подалгебрам соответствуют либо простые инвариантные, либо обобщенные простые нерегулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1, которые могут редуцироваться к некоторым инвариантным подмоделям. Ставится задача рассмотреть все возможные простые частично инвариантные решения. Первый шаг состоит в нахождении инвариантов 4-мерных подалгебр, которых 48 классов [2]. Далее по представлению частично инвариантного решения получают переопределенную систему уравнений подмодели, которую надо изучать на совместность. Условия совместности определяют подмодель или точные простые решения.

1. Инарианты 4-мерных подалгебр

Модель механики сплошной среды симметрична относительно преобразований группы Галилея расширенной растяжением. Этой группе соответствует 11-мерная алгебра Ли L_{11} с базисом операторов дифференцирования первого порядка

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z, X_4 = t\partial_x + \partial_u,$$

$$X_5 = t\partial_y + \partial_v, X_6 = t\partial_z + \partial_w, X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$$

$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,$$

$$X_{10} = \partial_t, X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \tag{1.1}$$

где t – время, x, y, z – декартовы независимые переменные, u, v, w – координаты скорости. Термодинамические величины p – давление, ρ – плотность, S – энтропия связаны уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ и являются инвариантами алгебры L_{11}. Подалгебр размерности 4 в L_{11} 48 классов с точнстью до внутренних автоморфизмов [1,2,4]. Инварианты подалгебр удобно вычислять в специальных системах координат для компактности записи инвариантов и простоты вычисления подмоделей. Общепринятые системы координат (СК): декартова (D), цилиндрическая (C) и сферическая (S). Иногда удобно выбрать дополнительные замены переменных, которые возникают при вычислении инвариантов. Инарианты приведены в таблице: в первой колонке номер подалгебры $n.k$, где n – размерность подалгебры, k – порядковый номер подалгебры в данной размерности; в третьей колонке указана система координат, в которой вычислялись инварианты; в четвертой приведены собственно инварианты, в пятой указана дополнительная замена. Во второй колонке приведен базис подалгебры, где вместо операторов X_i стоят их номера i, постоянные a, b – инварианты группы автоморфизмов.

Приведем некоторые величины, используемые в таблице.

Декартова система координат (D): $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ортонормированный базис,

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}, v = q\cos\vartheta_D, w = q\sin\vartheta_D. \tag{1.2}$$

Цилиндрическая система координат (C): $y = r\cos\theta_C$, $y = r\sin\theta_C$,

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r, \quad r \geq 0, \quad 0 \leqslant \theta_C < 2\pi,$$

$$\vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_r = \vec{j}\cos\theta_C + \vec{k}\sin\theta_C, \quad \vec{e}_{\theta_C} = -\vec{j}\sin\theta_C + \vec{k}\cos\theta_C,$$

$$\vec{u} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_{\theta_C}, \quad V = q_C\cos\vartheta_C, \quad W = q_C\sin\vartheta_C, \quad \vartheta_D = \vartheta_C + \theta_C,$$

$$u = U, \quad v = V\cos\theta_C - W\sin\theta_C, \quad W = V\sin\theta_C + W\cos\theta_C. \tag{1.3}$$

Сферическая система координат (S): $x = r_S\sin\theta_S\cos\varphi$, $y = r_S\sin\theta_S\sin\varphi$, $z = r_S\cos\theta_S$, $r_S \geq 0$, $0 \leqslant \theta_C \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

$$\vec{x} = r_S\vec{e}_{r_S}, \quad \vec{u} = U\vec{e}_{r_S} + V\vec{e}_{\theta_S} + W\vec{e}_{\varphi},$$

$$\vec{e}_{r_S} = \vec{i}\sin\theta_S\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta_S\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta_S, \quad \vec{e}_{\theta_S} = \vec{i}\cos\theta_S\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta_S\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta_S,$$

$$\vec{e}_{\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi,$$

$$u = (U\sin\theta_S + V\cos\theta_S)\cos\varphi - W\sin\varphi,$$

$$v = (U\sin\theta_S + V\cos\theta_S)\sin\varphi + W\cos\varphi, \quad w = U\cos\theta_s - V\sin\theta_S,$$

$$q_S^2 = |\vec{u}|^2 = U^2 + V^2 + W^2, \quad |\vec{x}| = r_S, \quad \vec{u}\cdot\vec{x} = q_S r_S\cos\vartheta_S. \tag{1.4}$$

Дополнительные замены (ДЗ), используемые в таблице,

$$v = yt^{-1} + \bar{q}\cos\bar{\vartheta}, w = zt^{-1} + \bar{q}\sin\bar{\vartheta}; \tag{1.5}$$

$$v = \frac{z + ty}{1 + t^2} + \bar{q}\cos\bar{\vartheta}, w = \frac{zt - y}{1 + t^2} + \bar{q}\sin\bar{\vartheta}. \tag{1.6}$$

Таблица инвариантов 4-мерных подалгебр

№	Базис	СК	Инварианты (p,ρ – общие)	ДЗ
4.1	7,8,9,11	S	$r_S t^{-1}$, q_S, ϑ_S	
4.2	7,8,9,10	S	r_S, q_S, ϑ_S	
4.3	1,a4+7,10,b4+11	C	$U - a\theta_C - b\ln r$, q_C, ϑ_C	
4.4	5,6,a4+7,b4+11	D	$u - xt^{-1}$, $\bar{q}$, $a\vartheta - xt^{-1} + b\ln\|t\|$	(1.5)
4.5	1,4,7,11	C	rt^{-1}, q_C, ϑ_C	
4.6	2,3,a4+7,b4+11	D	$u - xt^{-1}$, q, $a\vartheta_D - xt^{-1} + b\ln\|t\|$	
4.7	1,4,10,7+a11	C	$r\exp(-a\theta_C)$, q_C, ϑ_C	
4.8	2,3,10,7+a11	C	q_C, U, $\vartheta_C + \theta_C - a^{-1}\ln\|x\|$	
4.9	2,3,7,10	C	x, q_C, U	
4.10	2,3,1+7, 10	C	q_C, U, $\vartheta_C + \theta_C - x$	
4.11	2,3,a1+7,4+10	C	q_C, $U - t$, $x - 2^{-1}t^2 - a(\vartheta_C + \theta_C)$	
4.12	1,4,10,11	D	yz^{-1}, v, w	
4.13	2,3,10,a5+11	D	u, $v - a\ln\|x\|$, w	
4.14	2,3,10,11	D	u, v, w	
4.15	4,5,6,7+a11	D	$\bar{q}$, $u - xt^{-1}$, $a\vartheta - \ln\|t\|$	(1.5)
4.16	4,5,6,7	D	t, $\bar{q}$, $u - xt^{-1}$	(1.5)
4.17	a1+4,3+5,2-6,b1+7	D	t, $\bar{q}$, $u - (t+a)^{-1}(x - b\vartheta)$	(1.6)
4.18	a1+4,5,6,b1+7,$a^2+b^2=1$	D	t, $\bar{q}$, $u - (t+a)^{-1}(x - b\vartheta)$	(1.5)
4.19	1,5,6,b4+7+a11	D	$\bar{q}$, $u - b\vartheta$, $a\vartheta - \ln\|t\|$	(1.5)
4.20	1,3+5,2-6,a4+7	D	t, $\bar{q}$, $u - a\vartheta$	(1.6)
4.21	2,3,4, 7+a11	C	q_C, $U - xt^{-1}$, $a(\vartheta_C + \theta_C) - \ln\|t\|$	
4.22	2,3,4,1+7	C	t, q_C, $U - xt^{-1} + t^{-1}(\vartheta_C + \theta_C)$	
4.23	1,2,3,b4+7+a11	C	q_C, $U - ba^{-1}\ln\|t\|$, $a(\vartheta_C + \theta_C) - \ln\|t\|$	
4.24	1,2,3,a4+7	C	t, q_C, $U - a(\vartheta_C + \theta_C)$	
4.25	1,2,3,a4+7+10	C	q_C, $U - at$, $\vartheta_C + \theta_C - t$	
4.26	4,5,6,11	D	$u - xt^{-1}$, $v - yt^{-1}$, $w - zt^{-1}$	
4.27	1, a4+5,6,b4+11	D	$u - ayt^{-1} - b\ln\|t\|$, $v - yt^{-1}$, $w - zt^{-1}$	
4.28	1,5,6,a4+11	D	$u - a\ln\|t\|$, $v - yt^{-1}$, $w - zt^{-1}$	
4.29	1, 4,6,a5+11	D	$yt^{-1} - a\ln\|t\|$, $v - yt^{-1}$, $w - zt^{-1}$	
4.30	2,3,a4+6,b4+c5+11	D	$u - xt^{-1}$, $v - c\ln\|t\|$, $aw - xt^{-1} + b\ln\|t\|$	
4.31	2,3,4,a5+11	D	$u - xt^{-1}$, $v - a\ln\|t\|$, w	
4.32	2,3,4,11	D	$u - xt^{-1}$, v, w	
4.33	1,2,3,a4+11	D	$u - a\ln\|t\|$, v, w	
4.34	1,2,3,11	D	u, v, w	
4.35	2,3,a1+5,4+b6+10	D	$u - t$, $av - x + 2^{-1}t^2$, $w - bt$	
4.36	2,3,a1+5,6+10	D	u, $av - x$, $w - t$	
4.37	2,3,1+5,10	D	u, $v - x$, w	
4.38	2,3,5,10	D	x, u, w	
4.39	1,2,3,4+10	D	$u - t$, v, w	
4.40	1,2,3,10	D	u, v, w	
4.41	1,a2+b3+4,c3+5, d2+6,$a^2+b^2+(c+d)^2=1$	D	t, $(v + (bt - ac)u + cy - tz)(t^2 + cd)^{-1}$, $w + ((at + bd)u + az - ty)(t^2 + cd)^{-1}$	
4.42	1,4,3+5,2-6	D	t, $v - (z + ty)(t^2+1)^{-1}$, $w + (y - tz)(t^2+1)^{-1}$	
4.43	1,4,5,6	D	t, $v - yt^{-1}$, $w - zt^{-1}$	
4.44	2,1+a3,3+5,6	D	t, u, $v + ax - z + tw$	
4.45	2,3,1+5,6	D	t, u, $v - x$	
4.46	2,3,5,6	D	t, x, u	
4.47	1+a3,2,5,6	D	t, u, $w + (ax - z)t^{-1}$	
4.48	1,2,3,4	D	t, v, w	

2. Простые регулярные частично инвариантные решения

Уравнения гидродинамического типа в декартовой системе координат имеют вид [1,2,4]

$$
\begin{gathered}
u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0,\\
v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0,\\
w_t + uw_x + vu_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0,\\
\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0,\\
S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0, p = f(\rho, S).
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Подалгебра 4.48 имеет инварианты (см. табл.), с помощью которых представление регулярного частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 1 имеет вид

$$
u = u(t,x,y,z), v = v(t), w = w(t), p = p(t), \rho = \rho(t). \tag{2.2}
$$

Подстановка представления (2.2) в систему (2.1) дает

$$
\begin{gathered}
v' = 0, \quad w' = 0, \quad S' = 0 \Rightarrow v = v_0, w = w_0, S = S_0,\\
u_t + uu_x + v_0u_y + w_0u_z = 0, \quad \rho u_x + \rho' = 0 \Rightarrow\\
\rho = \frac{\rho_0}{1-kt}, \quad u = \frac{-kx + U(y - v_0t, z - w_0t)}{1-kt}.
\end{gathered}
$$

Постоянные k, v_0, w_0 не существены. Их можно убрать преобразованиями, допускаемыми системой (2.1), а именно: галилеевыми переносами (X_5, X_6), растяжением (X_{11}) и переносом (X_{10}). Получим решение

$$
u = t^{-1}(x + U(y,z)), \quad \rho = \rho_0 t^{-1}, \quad p = f(\rho_0 t^{-1}, S_0),
$$

с произвольной функцией $U(y,z)$.

Уравнения гидродинамического типа в цилиндрической системе координат имеют вид (индекс C опущен)

$$
\begin{gathered}
DU + \rho^{-1}p_x = 0,\\
DV + \rho^{-1}p_r = r^{-1}W^2,\\
DWw + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta = -r^{-1}VW,\\
D\rho + \rho(U_x + V_r + r^{-1}W_\theta + r^{-1}V) = 0,\\
DS = 0, \quad p = f(\rho, S),
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

где $D = \partial_t + U\partial_x + V\partial_r + r^{-1}W\partial_\theta$.

Подалгебра 4.7 имеет инварианты (см. табл.), которые определяют представление регулярного частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 1 $U = U(t, \vec{x})$, p, ρ, q, ϑ – функции инвариантной переменной $s = re^{-a\theta}$.

Подстановка представления в (2.2) дает соотношения

$$
\begin{gathered}
U_t + UU_x + q(\cos\vartheta U_r + r^{-1}\sin\vartheta U_\theta) = 0,\\
(q\cos\vartheta)'q(\cos\vartheta - a\sin\vartheta) + \rho^{-1}p' = s^{-1}q^2\sin^2\vartheta,\\
(q\sin\vartheta)'q(\cos\vartheta - a\sin\vartheta) - a\rho^{-1}p' = -s^{-1}q^2\sin\vartheta\cos\vartheta,\\
\rho^{-1}\rho'q(\cos\vartheta - a\sin\vartheta) + U_xe^{a\theta} + (q(\cos\vartheta - a\sin\vartheta))' + s^{-1}q\cos\vartheta = 0,\\
S'q(\cos\vartheta - a\sin\vartheta) = 0, \quad p = f(\rho, S).
\end{gathered}
$$

Если $q = 0$, то получим решение

$$
V = W = 0, \quad p = p_0, \quad U = U(r,\theta), \quad \rho = \rho(s)
$$

с двумя произвольными функциями. Уравнение состояния определяет энтропию.

Если $\cot\vartheta = a$, то $a = 0$, $\vartheta = \pi/2$, $p' = \rho r^{-1}q^2$, $U = U(r\theta - tq, r)$, $q(r)$, $\rho(r)$ – произвольные функции.

Рассмотрим случай $q \neq 0$, $\cot\vartheta \neq a \Rightarrow S = S_0$ – постоянная. Из уравнений (2.3) следует интеграл Бернулли

$$V^2 + W^2 + 2i(\rho) = B^2,$$

где $i = \int \rho^{-1} dp$ – энтальпия, и замкнутая система уравнений подмодели

$$s(aV + W)' + W = 0,$$

$$G'(V - aW) = G(G + as^{-1}W), \tag{2.4}$$

где $G = \rho^{-1}\rho'(V - aW) + (V - aW)' + s^{-1}V$.

Функция U определяется из равенств

$$U = -Gxe^{-a\theta} + \tilde{U}(t, r, \theta),$$

$$\tilde{U}_t + V\tilde{U}_r + r^{-1}W\tilde{U}_\theta = \tilde{U}Ge^{-a\theta}.$$

При $a = 0$ система (2.4) сводится к одному уравнению

$$\rho^{-1}\rho'(B^2 - C^2s^{-2} - 2i - f_\rho) = s\rho(B^2 - C^2s^{-2} - 2i) - C^2s^{-3}.$$

Уравнения гидродинамического типа в сферической системе координат имеют вид (индекс S опущен)

$$DU + \rho^{-1}p_r = r^{-1}(V^2 + W^2),$$

$$DV + (r\rho)^{-1}p_\theta = r^{-1}(-UV + W^2\cot\theta),$$

$$DW + (r\rho\sin\theta)^{-1}p_\varphi = -r^{-1}W(U + V\cot\theta),$$

$$D\rho + \rho(U_r + r^{-1}V_\theta + (r\sin\theta)^{-1}W_\varphi + r^{-1}V_\theta + 2r^{-1}U + r^{-1}\cot\theta V) = 0,$$

$$DS = 0, \quad p = f(\rho, S), \tag{2.5}$$

где $D = \partial_t + U\partial_r + r^{-1}V\partial_\theta + (r\sin\theta)^{-1}W\partial_\varphi$.

Подалгебра 4.2 имеет инварианты (см. табл.), которые определяют представление регулярного частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 1

$$U = q\cos\vartheta, \quad H = q\sin\vartheta, \quad V = H\cos\lambda, \quad W = H\sin\lambda, \quad \lambda = \lambda(t, \vec{x}),$$

p, ρ, q, ϑ, U, H – функции одной переменной r.

Подстановка представления в (2.5) дает соотношения

$$UU' + \rho^{-1}p' = r^{-1}H^2,$$

$$U(rH)' = 0, \quad US' = 0, \quad p = f(\rho, S), \tag{2.6}$$

$$rH^{-1}(\lambda_t + U\lambda_r) + \cos\lambda\lambda_\theta + \frac{\sin\lambda}{\sin\theta}\lambda_\varphi + \sin\lambda\cot\theta = 0,$$

$$-\sin\lambda\lambda_\theta + \frac{\cos\lambda}{\sin\theta}\lambda\varphi + \cot\theta\cos\lambda + rUH^{-1}(\ln(\rho Ur^2)' = 0. \tag{2.7}$$

Если $U = 0$, $H \neq 0$, то система (2.7) несовместна.

Если $U \neq 0$, $H = 0$, то получим обобщено радиальное движение, заданное интегралами

$$S = S_0, \quad \rho Ur^2 = C, \quad U^2 + 2\int \rho^{-1}dp = B^2, \quad \lambda = \lambda(t - \int U^{-1}dr),$$

где S_0, C, B – постоянные, $\lambda(s)$ – произвольная функция.

При $U \neq 0$, $H \neq 0$ справедливы интегралы

$$S = S_0, \quad Hr = H_0, \quad U^2 + \int \rho^{-1}dp + H_0r^{-2} = B^2. \tag{2.8}$$

Условие совместности системы (2.7)

$$r^2UH_0^{-1}h' = h^2 + 1, \quad h = r^2UH_0^{-1}(\ln(\rho Ur^2))' \tag{2.9}$$

задает подмодель. Поведение интегральных кривых изучались в [8].

В новых переменных $I = t - \int U^{-1}dr$, $h \tan n$, $n' = H_0 r^{-2} U^{-1}$ переопределенная система (2.7) в инволюции и принимает вид

$$\lambda_\theta + \cos\lambda\lambda_n = \tan n \sin\lambda,$$

$$\lambda_\varphi + \lambda_n \sin\lambda \sin\theta + \tan n \cos\lambda \sin\theta + \tan n \cos\lambda \sin\theta + \cos\theta = 0. \tag{2.10}$$

Интегралы характеристической системы первого уравнения таковы

$$\varphi, \quad D = \cos n \sin\lambda, \quad E = \theta - \arcsin(\sin n(1 - D^2)^{-1/2}), \quad I.$$

Последний интеграл можно представить в других видах

$$\sin\theta\cos n\cos\lambda - \cos\theta\sin n = \sqrt{1 - D^2}\sin E = K,$$

$$\cos\theta\cos n\cos\lambda + \sin\theta\sin n = \sqrt{1 - D^2}\cos E = \tilde{K}.$$

Общее решение первого уравнения системы (2.10) представим в виде $K = G(\varphi, I, D)$. Тогда второе уравнение системы (2.10) принимает вид

$$G_\varphi - G_D\sqrt{1 - K^2 - G^2} = 0. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что K интеграл характеристического уравнения второго уравнения системы (2.10). Общее решение (2.11) таково

$$K = G(I, \varphi + \arcsin\frac{D}{\sqrt{1 - K^2}}),$$

где $m(K, I)$ – произвольная функция. Если $G_D = 0$, то $G_\varphi = 0$.

Итак, общее решение системы (2.6), (2.7) запишем в неявной форме

$$\cos n \sin\lambda = \sqrt{1 - K^2}\sin(m(K, I) - \varphi),$$

$$K = \cos n \sin\theta \cos\lambda - \cos\theta \sin n, \quad I = t - \int U^{-1}dr, \quad n' = H_0 r^{-2} U^{-1},$$

или

$$K = G(I)$$

с произвольной функцией $G(I)$.

3. Простые нерегулярные частично инвариантные решения

Подалгебры 4.40 и 4.34 задают нерегулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1, которое называется простой волной в газовой динамике [4]. Поверхности уровня инвариантных функций – плоскости.

Рассмотрим автомодельную простую волну на подалгебре 4.26. Инварианты задают представление решения

$$\vec{u} = t^{-1}\vec{x} + \vec{u}_1(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad \alpha = \alpha(t, \vec{x}).$$

Уравнения (2.1) принимают вид

$$\vec{u}_1'(D\alpha + t^{-1}\vec{x}\cdot\bigtriangledown\alpha) + t^{-1}\vec{u}_1 + \rho^{-1}p'\bigtriangledown\alpha = 0,$$

$$\rho'(D\alpha + t^{-1}\vec{x}\cdot\bigtriangledown\alpha) + \rho(\vec{u}_1'\cdot\bigtriangledown\alpha + 3t^{-1}) = 0,$$

$$S'(D\alpha + t^{-1}\vec{x}\cdot\bigtriangledown\alpha) = 0, \quad p = f(\rho, S), \tag{3.1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}_1\cdot\bigtriangledown$.

Если $S' \neq 0$, то $p' \neq 0$,

$$\bigtriangledown\alpha = -\frac{\rho}{tp'}\vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1' \times \vec{u}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1' = \beta(\alpha)\vec{u}_1;$$

$$\alpha_t = \frac{\rho}{tp'}(t^{-1}\vec{x} + \vec{u}_1)\cdot\vec{u}_1.$$

Совместность приводит к условию $\beta = 0$, $\vec{u}_1 = \vec{u}_0$ – постоянная инвариантная скорость. Тогда для энтальпии и скорости получаем формулы

$$i = \int \rho^{-1} dp = -t^{-1}\vec{u}_0 \cdot \vec{x} + \vec{u}_0^2 \ln|t| + i_0, \quad \vec{u} = t^{-1}\vec{x} + \vec{u}_0. \tag{3.2}$$

При этом энтропия и плотность – произвольные функции параметра α. Поверхность уровня инвариантных функций – плоскость с нормалью $\vec{u}_0$, двигающаяся в направлении нормали с переменной скоростью и ускорением.

При изэнтропическом движении $S = S_0$ система (3.1) имеет два уравнения

$$\alpha_t = -3\rho(t\rho')^{-1} - (\vec{u}_1 + t^{-1}\vec{x} + \rho(\rho')^{-1}\vec{u}_1') \cdot \nabla\alpha,$$
$$\rho(\rho')^{-1}\vec{u}_1'(3t^{-1} + \vec{u}_1' \cdot \nabla\alpha) = t^{-1}\vec{u}_1 + p'\rho^{-1} \nabla \alpha.$$

Скалярное умножение второго уравнения на $\vec{u}_1'$ дает

$$\vec{u}_1' \cdot \nabla\alpha(\vec{u}_1^2 - p'\rho'\rho^{-2}) = t^{-1}(\rho'\rho^{-1}\vec{u} \cdot \vec{u}_1' - 3\vec{u}_1'^2).$$

При $\vec{u}_1^2 \neq p'\rho'\rho^{-2}$ получим

$$\nabla\alpha = t^{-1}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' \times \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\vec{A} = \vec{A}_0 m'(\alpha)^{-1}, \quad m(\alpha) = t^{-1}\vec{A}_0 \cdot \vec{x},$$
$$\alpha_t = -t^{-1}(3\rho\rho'^{-1} + (\vec{u}_1 + t^{-1}\vec{x} + \rho\rho'^{-1}\vec{u}_1') \cdot \vec{A}) \quad \Rightarrow$$
$$3\rho + (\rho\kappa)' = 0 \tag{3.3}$$

где $\kappa = \vec{A}_0 \cdot \vec{u}_1$, $\vec{u}_1'^2 \neq p'\rho'\rho^{-2}$,

$$\vec{A} = -\frac{\rho}{p'}\vec{u}_1 + \vec{u}_1' \frac{\rho p'^{-1}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1' - 3}{\vec{u}_1'^2 - p'\rho'\rho^{-2}}. \tag{3.4}$$

Можно считать $m' = 1$. Поверхность уровня – плоскость с нормалью $\vec{A}_0$. Условия совместности принимают вид

$$\vec{A}_0\left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{\rho''}{\rho'} + \frac{\rho'}{3\rho}(\vec{u}_1 + \frac{\rho}{\rho'})' \cdot \vec{A}\right) = 0. \tag{3.5}$$

Если $\vec{A} = 0$, то из (3.3) следует решение системы (3.1):

$$\alpha = t, \quad \rho = \rho_0 t^{-3}, \quad \vec{u}_1 = \vec{u}_0 t^{-1}, \quad p = f(S_0, \rho_0 t^{-1}). \tag{3.6}$$

При $\vec{A}_0 \neq 0$ умножим скалярно (3.4) на $\vec{A}_0$

$$(\kappa' + 3)\vec{u}_1'^2 = \rho^{-1}\rho'(p'\rho^{-1}\kappa' + \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1').$$

В силу этого равенства (3.4) принимает вид

$$(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1' - 3\rho^{-1}p')((p'\rho^{-1}\vec{A}_0 + \vec{u}_1)\rho'\rho^{-1} - \vec{u}_1'(\kappa' + 3)) = 0.$$

Если обнуляем первый сомножитель, то в силу (3.4), (3.3) получим решение

$$\vec{u}_1 = -\vec{A}_0 A_0^{-2}\alpha, \quad \alpha = t^{-1}\vec{A}_0 \cdot \vec{x}, \quad \rho = \rho_0\alpha^2, \quad p = p_0 + \frac{3\rho_0}{4A_0^2}\alpha^4. \tag{3.7}$$

Обнуляем второй сомножитель, получим решение

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\kappa' + 3}{\kappa}, \quad A_0^2\frac{p'}{\rho} = -\kappa(\kappa\kappa' + 1), \quad \vec{u}_1 = A_0^{-2}\vec{A}_0\kappa + \vec{B}_0 \exp(-\int \kappa^{-1} d\alpha). \tag{3.8}$$

Осталось рассмотреть случай $\vec{u}_1'^2 = p'\rho'\rho^{-2}$. Удобно ввести энтальпию $i = \int \rho^{-1} dp$ и вместо параметра α плотность $\rho(\alpha)$. Система уравнений (3.1) принимает вид

$$\rho\vec{u}_{1\rho}^2 = i_\rho, \quad \vec{u}_1^2 = 6i, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_{1\rho} = 3i_\rho,$$
$$\rho\vec{u}_{1\rho}(3t^{-1} + \vec{u}_{1\rho} \cdot \nabla\rho) = t^{-1}\vec{u}_1 + i_\rho \nabla \rho,$$
$$\rho_t + (\vec{u}_1 + \rho\vec{u}_{1\rho} + t^{-1}\vec{x}) \cdot \nabla\rho = -3t^{-1}\rho. \tag{3.9}$$

Замена переменных

$$\vec{X} = t^{-1}\vec{x}, \quad t^3\rho = R(t, \vec{X})$$

приводит систему (3.9) к простому виду

$$\begin{gathered} R_t + (R\vec{u}_1)_R \cdot \bigtriangledown R = 0, \\ i_R \bigtriangledown R + \vec{u}_1 = R\vec{u}_{1R}(3 + \vec{u}_{1R} \cdot \bigtriangledown R), \\ R\vec{u}_{1R}^2 = i_R, \quad \vec{u}_1^2 = 6i, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_{1R} = 3i_R. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Условия совместности векторного уравнения в (3.10) имеет вид нулевого смешанного произведения

$$(\vec{u}_{1RR}, \vec{u}_{1R}, \vec{u}_1) = 0,$$

которое равносильно системе уравнений

$$\vec{u}_{1RR} = a\vec{u}_{1R} + b\vec{u}_1, \quad R\vec{u}_{1R}^2 = i_R, \quad \vec{u}_1^2 = 6i, \tag{3.11}$$

где

$$a = \frac{i_{RR}(i - 3Ri_R) + (i_R - R^{-1}i)i_R}{i_R(2i - 3Ri_R)}, \quad b = \frac{ii_{RR} + 3^{-1}R^{-1}i_R}{2(2i - 3Ri_R)}.$$

Общее решение первого уравнения системы (3.10)

$$R = \varphi(\vec{I}), \quad \vec{I} = \vec{X} - t(R\vec{u}_1)_R$$

подставляем во второе векторное уравнение

$$i_R \bigtriangledown \varphi - R\vec{u}_{1R}(\vec{u}_{1R} \cdot \bigtriangledown\varphi) = (3R\vec{u}_{1R} - \vec{u}_1)(1 + t \bigtriangledown \varphi \cdot (\vec{u}_1 R)_{RR}).$$

Здесь переменная t свободная, от нее искомая функция φ не зависит. Значит, коэффициент при t нужно занулить и тем самым получить условие совместности системы (3.10)

$$\bigtriangledown\varphi \cdot (\vec{u}_1 R)_{RR} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bigtriangledown R \cdot (\vec{u}_1 R)_{RR} = 0.$$

Скалярное умножение векторного уравнения в (3.10) на $\vec{u}_1$ дает еще одно уравнение для определения величин

$$\vec{u}_{1R} \cdot \bigtriangledown R = \frac{3Rb(2i - 3Ri_R)}{i_R(3R^2b + Ra + 2)} = \beta, \quad \vec{u}_1 \cdot \bigtriangledown R = -\beta\frac{2 + Ra}{Rb}.$$

Подстановка этих выражений в (3.10) дает совместную систему равенств

$$R_t = \beta(Rb)^{-1}(2 + Ra - R^2b) = N(R), \quad \bigtriangledown R = i_R^{-1}(-\vec{u}_1 + R\vec{u}_{1R}(3 + \beta)) = \vec{n}_0 e^{k(R)},$$

где $\vec{n}_0$ – постоянный вектор. Общее решение каждого из уравнений имеет вид

$$\int N(R)^{-1}dR = t + f(\vec{x}), \quad \int e^{-k(R)}dr = \vec{n}_0 \cdot \vec{X} + m(t).$$

Поскольку эти равенства задают одно и то же решение, то

$$f(\vec{X}) = \vec{n}_0 \cdot \vec{X}, \quad m(t) = t, \quad N = e^{k(R)}.$$

Итак, получили решение

$$\int e^{-k(R)}dR = t + \vec{n}_0 \cdot \vec{X}$$

с произвольной функцией $i(\rho)$, и инвариантной скоростью, удовлетворяющей (3.11).

Рассмотрим стационарную простую волну на подалгебре 4.10. Инварианты задают представление решения в цилиндрической системе координат

$$U = U(\alpha), \quad q_C = q(\alpha), \quad \vartheta_C = x - \theta + \vartheta(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad \alpha = \alpha(t, \vec{x}).$$

Система (2.2) принимает вид

$$U'D\alpha + \rho^{-1}p'\alpha_x = 0,$$

$$
\begin{gathered}
q' D\alpha + \rho^{-1} p' \partial_c \alpha = 0, \\
q(\vartheta' D\alpha + U) + \rho^{-1} p' \partial_s \alpha = 0, \\
\rho' D\alpha + \rho(U'\alpha_x + q'\partial_c\alpha + q\vartheta'\partial_s\alpha) = 0, \\
S' D\alpha = 0,
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

где $D = \partial_t + U\partial_x + q\partial_c$, $\partial_c = \cos\vartheta_C\partial_r + r^{-1}\sin\vartheta_C\partial_\theta$, $\partial_s = -\sin\vartheta_C\partial_r + r^{-1}\cos\vartheta_C\partial_\theta$.

Пусть $S' \neq 0$, $p' = 0$. Тогда $D\alpha = 0$, $qU = 0$.

При $U = 0$ из (3.12) имеем переопределенную систему

$$
\alpha_t + q\partial_c\alpha = 0, \quad q'\partial_c\alpha + q\vartheta'\partial_s\alpha = 0. \tag{3.13}
$$

Общее решение первого уравнения системы (3.13)

$$
qt + r\cos\vartheta_C + \varphi(x, \alpha, I), \quad I = r\sin\vartheta_C
$$

подставим во второе уравнение системы (3.13)

$$
q' = q\vartheta'\varphi_I \quad \Rightarrow \quad \varphi = q'(q\vartheta')^{-1} I + \psi(x, \alpha).
$$

Таким образом, общее решение (3.13) имеет вид

$$
qt = r\cos\vartheta_C + q'(q\vartheta')^{-1} r\sin\vartheta_c + \psi(x, \alpha), \quad \vartheta_c = x - \theta + \vartheta(\alpha). \tag{3.14}
$$

При $q = 0$ система (3.12)

$$
\alpha_t + U\alpha_x = 0, \quad U'\alpha_x = 0
$$

имеет решение

$$
U = U_0, \quad \alpha = \alpha(x - U_0 t, r, \theta)
$$

или

$$
\alpha = \alpha(r, \theta) \quad \text{при} \quad U' \neq 0.
$$

При $S' \neq 0$, $p' \neq 0$ система (3.12) противоречива.

Пусть $S' = 0$, $U' \neq 0$, $i' = \rho^{-1}p' \neq 0$. Тогда из (3.12) следует

$$
\begin{gathered}
\alpha_x = A(\alpha) = q^2 U U' \vartheta' i'^{-1} (U'^2 + q'^2 + q^2\vartheta'^2 - \rho^{-1}\rho' i')^{-1}, \\
\alpha_t = -k(\alpha) A, \quad k(\alpha) = U + U'^{-1}(i' + qq'), \\
\partial_c\alpha = q'U'^{-1}A, \quad \partial_s\alpha = q\vartheta'U'^{-1}A - qUi'^{-1}.
\end{gathered} \tag{3.15}
$$

Изучение совместности приводит к равенству $Ak' = 0$.

Случай $A = 0$ приводит к противоречию.

При $k = k_0$ – постоянная справедлив интеграл Бернулли

$$
U^2 + q^2 + 2i = 2k_0 U + B_0.
$$

Если $\vartheta' = 0$, то решений нет.

При $\vartheta' \neq 0$ система (3.15) принимает вид

$$
\alpha = \alpha(s, r, \theta), \quad s = x - k_0 t,
$$

$$
\alpha_s = A(\alpha), \quad \vartheta_C = s - \theta + \vartheta + k_0 t,
$$

$$
q'U'^{-1}A = \partial_c\alpha, \quad q(-Ui'^{-1} + \vartheta'U'^{-1}A) = \partial_s\alpha.
$$

Дифференцирование по t дает

$$
k_0\partial_s\alpha = 0, \quad k_0\partial_c\alpha = 0.
$$

При $k_0 \neq 0$ получим решение

$$
q = q_0 \neq 0, \quad i' = U'(k_0 - U), \quad \rho(k_0 - U) = \rho_0,
$$

$$
k_0 \int U^{-1} d\vartheta - \vartheta = x - k_0 t. \tag{3.16}
$$

При $k_0 = 0$ получим соотношения

$$\vartheta_C = x - \theta + \vartheta(\alpha), \quad \alpha_t = 0, \quad \int A^{-1} d\alpha = x + \varphi(r, \theta),$$

$$q' U'^{-1} = \partial_C \varphi, \quad q A^{-1}(-U i'^{-1} + \vartheta' A U'^{-1}) = \partial_S \varphi. \tag{3.17}$$

Дифференцирование (3.17) по x дает уравнения совместности

$$q' U'^{-1} = a_0 \sin \sigma(\alpha), \quad q A^{-1}(U i'^{-1} - \vartheta' A U'^{-1}) = a_0 \cos \sigma(\alpha),$$

$$\sigma + \vartheta = -\int A^{-1} d\alpha = -x - \varphi.$$

Уравнения (3.17) переписываются в виде

$$-a_0 \cos \varphi = \sin \theta \varphi_r + r^{-1} \cos \theta \varphi_\theta,$$

$$-a_0 \sin \varphi = \cos \theta \varphi_r - r^{-1} \sin \theta \varphi_\theta.$$

В декартовых координатах $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ уравнения принимают вид

$$\varphi_y = -a_0 \sin \varphi, \quad \varphi_z = -a_0 \cos \varphi.$$

Условия совместности таково $a_0 = 0$. Значит, $\varphi = 0$, $q' = 0$, $U'^2 = \rho^{-1} \rho' i'$, и решение

$$\int \rho \vartheta' U' U^{-1} \rho'^{-1} d\alpha = x,$$

редуцируется к инвариантному на подалгебре 3.33 [4].

Случай $U' \neq 0$, $p' = 0$, $S' = 0$ сводится к одномерной простой изобарической волне

$$p = p_0, \quad S = S_0, \quad V = W = 0, \quad x - tU = F(U, r, \theta). \tag{3.18}$$

Случай $S = S_0$, $U = U_0$, $p = p_0$ – постоянные, дает решение

$$q_0 t + \psi(x, x + \vartheta) = r \cos(x + \vartheta - \theta),$$

где $q = q_0$ – постоянная, $\psi(x, I)$ – произвольная функция.

В случае $S = S_0$, $p = p_0$, $q' \neq 0$, $U = 0$ имеем переопределенную систему

$$\alpha_t + q \partial_c \alpha = 0, \quad q' \partial_c \alpha + q \vartheta' \partial_s \alpha = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$r(q' \sin \vartheta_C + q \vartheta' \cos \vartheta_C) = \varphi(t, x, \alpha). \tag{3.19}$$

Первое уравнение определяет функцию φ

$$\varphi_t = q^2 \vartheta' \quad \Rightarrow \quad \varphi = q^2 t \vartheta' + \psi(x, \alpha).$$

Получаем решение в неявном виде $U = 0$,

$$r(q' \sin(x - \theta + \vartheta) + q \vartheta' \cos(x - \theta + \vartheta)) = q^2 t \vartheta' + \psi(x, \alpha), \tag{3.20}$$

где $q(\alpha)$, $\vartheta(\alpha)$ – произвольные функции, $p_0 = f(\rho_0, S_0)$. Решение с произволом в две функции $q(\alpha)$ и $\psi(x, \vartheta)$.

Случай $S = S_0$, $U = U_0$, $p' \neq 0$ приводит к противоречию, т.е. к отсутствию решения.

Итак, на подалгебре (4.10) получили серию простых волн, которые задаются формулами (3.14), (3.16), (3.18), (3.20).

4. Заключение

Простые решения на 4-мерных подалгебрах являются регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Для их классификации вычислены базисы точечных инвариантов для всех 48 классов подалгебр из оптимальной системы неподобных подалгебр 11-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями механики сплошной среды. Для модели гидродинамического типа найдены новые простые волны для трех подалгебр с регулярными частично инвариантными решениями и для двух подалгебр с нерегулярными частично инвариантными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабиров С.В., Чиркунов Ю.А. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.
2. Овсянников Л.В. *Программа "Подмодели". Газовая динамика*// ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
3. Мамонтов Е.В. *Инвариантные решения ранга два уравнений газовой динамики*// ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 50–55.
4. Хабиров С.В. *Лекции. Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: БГУ, 2013. 224 с.
5. Овсянников Л.В. *О "простых"решениях уравнений динамики политропного газа*// ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
6. Хабиров С.В. *Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений*// СМЖ. 2013. Т. 54, № 6. С. 1396-1406. S.V. Khabirov, *A hierarchy of submodels of differential equations*// Siberien Mathematical Journal. 2013. Vol. 54, No. 6. Pp. 1111-1120.
7. Л.В. Овсянников, *Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения.* Доклады РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
8. Черевко А.А., Чупахин А.П. *Стационарный вихрь Овсянникова.* Препринт ИГиЛ №1-2005. Новосибирск. 2005. 51 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru