ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 26-38.

УДК 517.9

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x),\ f_2 = g_2v(t,x)$

**М.В. ДОНЦОВА**

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$. Исследование разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Получены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$, при которых решение имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции задачи Коши. Сформулирована теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши. Приведено доказательство теоремы о локальном существовании и единственности решения задачи Коши. Теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$ доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Получены достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$. Сформулирована теорема о нелокальном существовании и единственности решения задачи Коши. Приведено доказательство теоремы о нелокальном существовании и единственности решения задачи Коши. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$ опирается на глобальные оценки.

**Ключевые слова:** уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

**Mathematics Subject Classification:** 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

## 1. Введение

В работе [1] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x))\partial_x u(t,x) = 0, \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x))\partial_x v(t,x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

M.V. Dontsova, Solvability of Cauchy problem for a system of first order quasilinear equations with right-hand sides $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$.



Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

*Поступила 10 мая 2018 г.*

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $a, c, b, g$ – известные положительные константы, $(t,x) \in \Omega_T$, где $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$ с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – известные функции.

В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1 u(t,x) + b_1 v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2 v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1 u(t,x) + g_1 v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $a_1,\ b_i,\ c_1,\ g_1,\ i = 1,2$ – известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ – известные константы, $(t,x) \in \Omega_T$ с начальными условиями (2).

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{4}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $a_2,\ g_2$ – известные константы,

$a_1(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ c_1(t),\ g_1(t)$ – известные функции.

Примем, что $a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T]$.

Для исследования систем квазилинейных уравнений первого порядка применялись самые разнообразные подходы. В [3] содержится анализ разрешимости систем квазилинейных уравнений первого порядка на основе классического метода характеристик.

В рамках классического метода характеристик исследование сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где присутствует суперпозиция неизвестных функций. И найдя решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи требуется перейти от характеристических переменных к переменным $(t,x)$. Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [3].

В работе [4] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$, и указаны границы интервала разрешимости.

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента для системы вида (4) с начальными условиями (2) на $\Omega_T$ определяем достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции задачи Коши, и достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0,T]$). Будут сформулированы и доказаны теоремы о локальном и нелокальном существовании и единственности решений задачи Коши.

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (4), (2) расширенную характеристическую систему [2], [5]–[9]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a_1(s)u(s,\eta_1(s,t,x)) + b_1(s)v(s,\eta_1(s,t,x)), \tag{5}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c_1(s)u(s,\eta_2(s,t,x)) + g_1(s)v(s,\eta_2(s,t,x)), \tag{6}$$

$$\frac{du(s,\eta_1(s,t,x))}{ds} = a_2 u(s,\eta_1(s,t,x)) + b_2(s)v(s,\eta_1(s,t,x)), \tag{7}$$

$$\frac{dv(s,\eta_2(s,t,x))}{ds} = g_2 v(s,\eta_2(s,t,x)), \tag{8}$$

$$\eta_1(t,t,x) = x,\ \eta_2(t,t,x) = x, \tag{9}$$

$$u(0,\eta_1(0,t,x)) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ v(0,\eta_2(0,t,x)) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{10}$$

Вводим новые неизвестные функции:
$w_1(s,t,x) = u(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_2(s,t,x) = v(s,\eta_2(s,t,x)),$
$w_3(s,t,x) = v(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_4(s,t,x) = u(s,\eta_2(s,t,x)).$
Тогда расширенная характеристическая система примет вид:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a_1(s)w_1(s,t,x) + b_1(s)w_3(s,t,x), \tag{11}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c_1(s)w_4(s,t,x) + g_1(s)w_2(s,t,x), \tag{12}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = a_2 w_1(s,t,x) + b_2(s)w_3(s,t,x), \tag{13}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = g_2 w_2(s,t,x), \tag{14}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{15}$$

$$\eta_1(t,t,x) = x,\ \eta_2(t,t,x) = x, \tag{16}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{17}$$

Неизвестные функции $\eta_i,\ w_j,\ i=1,2,\ j=\overline{1,4}$ зависят не только от $t$ и $x$, но и от дополнительного аргумента $s$. Интегрируя уравнения (11)–(14) по аргументу $s$, и учитывая условия (15)–(17), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau, \tag{18}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau, \tag{19}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s (a_2 w_1 + b_2(\tau)w_3)d\tau, \tag{20}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s g_2 w_2 d\tau, \tag{21}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1), \tag{22}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{23}$$

Подставим (18), (19) в (20)–(23), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau) + \int_0^s (a_2 w_1(\tau,t,x) + b_2(\tau)w_3(\tau,t,x))d\tau, \tag{24}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_2(\tau,t,x))d\tau) + \int_0^s g_2 w_2(\tau,t,x)d\tau, \tag{25}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \tag{26}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \tag{27}$$

Мы будем писать, что константы $K_0,\ K_1,\ K_2 \ldots$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедлива лемма:

**Лемма 1.** *Пусть функции $w_1(s,t,x)$, $w_2(s,t,x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (24)–(27), являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи (4) , (2) на $\Omega_{T_0}$, $T_0 \le T$, где $T_0$ – константа, определяемая через исходные данные.*

Лемма 1 составляет основу метода дополнительного аргумента. Лемма 1 доказывается так же, как в работах [2], [4], [5], [7]–[9].

## 2. Существование локального решения

Для доказательства существования решения задачи (4), (2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (24)–(27).

Обозначим $\Gamma_T = \{\,(s,t,x)|\, 0 \le s \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T > 0\}$,

$C_\varphi = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}$,

$l = \max\{\sup\limits_{[0,T]} a_1(t),\ \sup\limits_{[0,T]} b_1(t),\ \sup\limits_{[0,T]} b_2(t),\ \sup\limits_{[0,T]} c_1(t),\ \sup\limits_{[0,T]} g_1(t),\ |a_2|,\ |g_2|\}$,

$\|U\| = \sup\limits_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|\,,\ \|f\| = \sup\limits_{\Omega_T} |f(t,x)|$,

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной $t$, дважды дифференцируемых по переменной $x$, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на $\Omega_T$,

$\bar{C}^2(R)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на $R$,

$C([0,T])$ – пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$.

Введем условия, играющие ключевую роль в доказательстве нелокальной разрешимости задачи Коши (4), (2):

$$\begin{aligned} a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T], \\ \varphi_1'(x) \ge 0,\ \varphi_2'(x) \ge 0, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{28}$$

Справедлива теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (4), (2), при которых решение

$u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ имеет такую же гладкость по $x$, как и начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$, $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$ и выполняются условия (28). Тогда для любого $0 \le t \le T_2$, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, задача Коши (4), (2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_2})$, которое определяется из системы интегральных уравнений (24) - (27).*

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

**Лемма 2.** *Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$, $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$ и выполняются условия (28). Тогда система интегральных уравнений (24)–(27) имеет единственное решение $w_j \in \bar{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_2})$, где $j = \overline{1,4}$,*

$$T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l}).$$

*Доказательство.* Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [4]. Поэтому приведем только его ключевые пункты. Основная трудность состоит в том, что в системе (24)–(27) присутствует суперпозиция неизвестных функций. Для преодоления этой трудности используется «двухуровневый» алгоритм последовательных приближений.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (24)–(27) зададим равенствами:

$$w_{10}(s,t,x)=\varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x)=\varphi_2(x),\ w_{30}(s,t,x)=\varphi_2(x),\ w_{40}(s,t,x)=\varphi_1(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (24)–(27) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n=1,2,\ldots)$ :

$$w_{1n}(s,t,x)=\varphi_1(x-\int\limits_0^t(a_1(\tau)w_{1n}+b_1(\tau)w_{3n})d\tau)+\int\limits_0^s(a_2w_{1n}+b_2(\tau)w_{3n})d\tau, \tag{29}$$

$$w_{2n}(s,t,x)=\varphi_2(x-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4n}(\tau,t,x)+g_1(\tau)w_{2n}(\tau,t,x))d\tau)+\int\limits_0^s g_2w_{2n}(\tau,t,x)d\tau, \tag{30}$$

$$w_{3n}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1n}+b_1(\tau)w_{3n})d\tau), \tag{31}$$

$$w_{4n}(s,t,x)=w_{1(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4n}+g_1(\tau)w_{2n})d\tau). \tag{32}$$

Для системы уравнений (29)–(32) нулевое приближение определим равенствами:

$$w_{jn}^0=w_{j(n-1)},\ j=\overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (29)–(32) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w_{1n}^{k+1}(s,t,x)=\varphi_1(x-\int\limits_0^t(a_1(\tau)w_{1n}^k+b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau)+\int\limits_0^s(a_2w_{1n}^k+b_2(\tau)w_{3n}^k)d\tau, \tag{33}$$

$$w_{2n}^{k+1}(s,t,x)=\varphi_2(x-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4n}^k(\tau,t,x)+g_1(\tau)w_{2n}^k(\tau,t,x))d\tau)+\int\limits_0^s g_2w_{2n}^k(\tau,t,x)d\tau, \tag{34}$$

$$w_{3n}^{k+1}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1n}^k+b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau), \tag{35}$$

$$w_{4n}^{k+1}(s,t,x)=w_{1(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4n}^k+g_1(\tau)w_{2n}^k)d\tau). \tag{36}$$

Так же, как в [2], [4], установлено, что для всех $0\le t\le T_1$, где

$T_1=\min(\frac{1}{20C_\varphi l},\frac{1}{4l})$, последовательные приближения (33)–(36) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (29)–(32), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\partial_xw_{jn},\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки:

$$\|w_{jn}\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_xw_{1n}\|\le 4C_\varphi,$$

$$\|\partial_xw_{2n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_xw_{3n}\|\le 6C_\varphi,\ \|\partial_xw_{4n}\|\le 6C_\varphi.$$

Так же, как в [2], [4], установлено, что для всех $0\le t\le T_2$, где

$T_2=\min(\frac{1}{25C_\varphi l},\frac{1}{10l})$, последовательные приближения (29)–(32) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (24)–(27), у которого существуют непрерывные и рграниченные производные $\partial_xw_j,\ j=\overline{1,4}$. Справедливы оценки:

$$\|w_j\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4},\ \|\partial_xw_1\|\le 4C_\varphi,$$

$$\|\partial_xw_2\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_xw_3\|\le 6C_\varphi,\ \|\partial_xw_4\|\le 6C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j=\overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной $t$ на $\Gamma_{T_2}$. Единственность решения доказывается так же, как в статье [4]. □

**Лемма 3.** *Пусть* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$, $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$ *и выполняются условия* (28)*. Тогда функции* $\{w_j\}$, $j = \overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений* (24) - (27)*, имеют непрерывные и ограниченные производные* $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = \overline{1,4}$ *на* $\Gamma_{T_2}$, *где* $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$.

*Доказательство.* Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Поэтому приведем только его ключевые пункты. Дважды продифференцируем последовательные приближения (29)–(32) по $x$ и обозначим $\omega_j^n = w_{jnxx}$, $j = \overline{1,4}$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}\omega_1^n = -\varphi_1' \int_0^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n)d\tau + \int_0^s (a_2\omega_1^n + b_2(\tau)\omega_3^n)d\tau + \\ +\varphi_1'' \cdot (1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx})d\tau)^2,\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\omega_2^n = -\varphi_2' \int_0^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n)d\tau + \int_0^s g_2\omega_2^n d\tau + \\ +\varphi_2'' \cdot (1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx})d\tau)^2,\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}\omega_3^n = \omega_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx})d\tau)^2 - \\ -w_{2(n-1)x} \int_s^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n)d\tau,\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\omega_4^n = \omega_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx})d\tau)^2 - \\ -w_{1(n-1)x} \int_s^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n)d\tau.\end{gathered} \tag{40}$$

При выполнении условий (28) с учетом установленных выше оценок
$\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi$, $j = \overline{1,4}$, получаем
$|\int_s^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau| \le tl(||w_{1n}|| + ||w_{3n}||) \le 4tlC_\varphi \le \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \le 0.16,$
$|\int_s^t (c_1(\tau)w_{4n} + g_1(\tau)w_{2n})d\tau| \le tl(||w_{4n}|| + ||w_{2n}||) \le 4tlC_\varphi \le \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \le 0.16.$
Зафиксируем точку $x_0 \in R$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x \,|x_0 - 0.16 \le x \le x_0 + 0.16\}.$$

Так же, как в статье [2], доказано при выполнении условий (28) для всех $x_1, x_2 \in R$ справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|, \tag{41}$$

$$|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|, \tag{42}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}(\tau,t,x) + b_1(\tau)w_{3n}(\tau,t,x))d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau,t,x))d\tau.$$

В замкнутом ограниченном множестве $\Omega_{x_0}$ непрерывные вторые производные функций $\varphi_i$, $i = 1,2$ будут равномерно непрерывны. Так же, как в статье [2], доказано, что при выполнении условий (28) доказана равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n$, $\omega_2^n$ по $x$

при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по $x$ в выбранной произвольной точке $x_0 \in R$. Равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по $x$ используется для доказательства сходимости последовательных приближений $\omega_j^n,\ \ j=\overline{1,4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'(\eta_1(0,t,x))\int\limits_0^t(a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau + \int\limits_0^s(a_2\tilde{\omega}_1^n + b_2(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau +$$

$$+\varphi_1''\cdot(1-\int\limits_0^t(a_1(\tau)w_{1x}+b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'(\eta_2(0,t,x))\int\limits_0^t(c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau + \int\limits_0^s g_2\tilde{\omega}_2^n d\tau +$$

$$+\varphi_2''\cdot(1-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4x}+g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1x}+b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2 - w_{2x}(s,s,\eta_1(s,t,x))\int\limits_s^t(a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau,$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4x}+g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2 - w_{1x}(s,s,\eta_2(s,t,x))\int\limits_s^t(c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau.$$

Доказано, что при выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j,\ \ j=\overline{1,4}$, справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_1\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3\| \le 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\| \le 3C_\varphi.$$

Далее установлено, что при выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ прследовательные приближения $\omega_j^n$ сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j,\ \ j=\overline{1,4}$ при $n\to\infty$.

Получаем, что при выполнении условий (28) $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ $j=\overline{1,4}$ непрерывные и ограниченные на $\Gamma_{T_2}$.

Далее установлено, что при выполнении условий (28) существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t},\ \ j=\overline{1,4}$ на $\Gamma_{T_2}$. □

## 3. Существование нелокального решения

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t\in[0,T]$).

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi_1(x),\varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t) \in C([0,T])$ *и выполняются условия* (28).

*Тогда для любого* $T>0$ *задача Коши* (4), (2) *имеет единственное решение* $u(t,x),v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (24) - (27).

*Доказательство.* Продифференцируем систему уравнений (4) по $x$ и обозначим $p(t,x)=u_x(t,x)$, $q(t,x)=v_x(t,x)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\partial_t p + (a_1(t)u(t,x)+b_1(t)v(t,x))\partial_x p = -a_1(t)p^2 - b_1(t)pq + a_2 p + b_2(t)q,\\ \partial_t q + (c_1(t)u(t,x)+g_1(t)v(t,x))\partial_x q = -g_1(t)q^2 - c_1(t)pq + g_2 q.\\ p(0,x)=\varphi_1'(x),\quad q(0,x)=\varphi_2'(x).\end{cases} \tag{43}$$

Добавим к системе уравнений (18)–(23) два уравнения:

$$\begin{cases}\frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a_1(s)\gamma_1^2 - b_1(s)\gamma_1\gamma_2(s,s,\eta_1) + a_2\gamma_1 + b_2(s)\gamma_2(s,s,\eta_1),\\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g_1(s)\gamma_2^2 - c_1(s)\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2.\end{cases} \tag{44}$$

с условиями: $\gamma_1(0,t,x)=\varphi_1'(\eta_1),\qquad \gamma_2(0,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)$.

Перепишем систему уравнений (44) в следующем виде:

$$\begin{cases}\gamma_1(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)+\int\limits_0^s[-a_1(\tau)\gamma_1^2+(b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)+a_2\gamma_1]d\tau,\\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)+\int\limits_0^s[-g_1(\tau)\gamma_2^2-c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2+g_2\gamma_2]d\tau.\end{cases} \tag{45}$$

Существование непрерывного решения системы (45) на $\Gamma_{T_2}$, где

$T_2=\min(\frac{1}{25C_\varphi l},\frac{1}{10l})$ при выполнении условий (28) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\begin{cases}\gamma_1^{n+1}=\varphi_1'(\eta_1)+\int\limits_0^s[-a_1(\tau)(\gamma_1^n)^2+(b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1)+a_2\gamma_1^n]d\tau,\\ \gamma_2^{n+1}=\varphi_2'(\eta_2)+\int\limits_0^s[-g_1(\tau)(\gamma_2^n)^2-c_1(\tau)\gamma_1^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2^n+g_2\gamma_2^n]d\tau,\end{cases} \tag{46}$$

при этом $\gamma_1^0=\varphi_1'(\eta_1)$, $\gamma_2^0=\varphi_2'(\eta_2)$. При выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ справедливы оценки: $|\gamma_i^{n+1}|\le 2C_\varphi$,

Так же, как в статье [2], установлено, что для всех $0\le t\le T_2$, где

$T_2=\min(\frac{1}{25C_\varphi l},\frac{1}{10l})$, справедливо неравество:

$$\left\|\gamma_1^{n+1}-\gamma_1^n\right\|+\left\|\gamma_2^{n+1}-\gamma_2^n\right\|\le 0.52(\left\|\gamma_1^n-\gamma_1^{n-1}\right\|+\left\|\gamma_2^n-\gamma_2^{n-1}\right\|),$$

из которого следует, что последовательные приближения $\{\gamma_i^n\},\ i=1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (45) на $\Gamma_{T_2}$ при выполнении условий (28). Для решения будут справедливы оценки:

$$|\gamma_i|\le 2C_\varphi,\ i=1,2.$$

Продифференцируем по $x$ последовательные приближения (46):

$$\begin{cases}\gamma_{1x}^{n+1}=\varphi_1''(\eta_1)\eta_{1x}+\\ +\int\limits_0^s[(a_2-2a_1(\tau)\gamma_1^n-b_1(\tau)\gamma_2^n)\gamma_{1x}^n+(b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau,\\ \gamma_{2x}^{n+1}=\varphi_2''(\eta_2)\eta_{2x}+\\ +\int\limits_0^s[(g_2-2g_1(\tau)\gamma_2^n-c_1(\tau)\gamma_1^n)\gamma_{2x}^n-c_1(\tau)\gamma_2^n\gamma_{1x}^n(\tau,\tau,\eta_2)\eta_{2x}]d\tau,\end{cases} \tag{47}$$

где

$$\eta_{1x}(s,t,x)=1-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1x}+b_1(\tau)w_{3x})d\tau,$$

$$\eta_{2x}(s,t,x)=1-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4x}+g_1(\tau)w_{2x})d\tau.$$

При выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ справедливы оценки:

$$|\eta_{ix}|\le 1, |\ \gamma_{ix}^{n+1}|\le 5C_\varphi,\ i=1,2.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases}\omega_{21}=\varphi_1''(\eta_1)\eta_{1x}+\\ +\int\limits_0^s[(a_2-2a_1(\tau)\gamma_1-b_1(\tau)\gamma_2)\omega_{21}+(b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau,\\ \omega_{22}=\varphi_2''(\eta_2)\eta_{2x}+\\ +\int\limits_0^s[(g_2-2g_1(\tau)\gamma_2-c_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}-c_1(\tau)\omega_{21}(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau.\end{cases} \tag{48}$$

Докажем существования непрерывного решения системы (48) с помощью метода последовательных приближений:

$$\begin{cases} \omega_{21}^{n+1} = \varphi_1''(\eta_1)\eta_{1x} + \\ + \int\limits_0^s [(a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2)\omega_{21}^n + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau, \\ \omega_{22}^{n+1} = \varphi_2''(\eta_2)\eta_{2x} + \\ + \int\limits_0^s [(g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1)\omega_{22}^n - c_1(\tau)\omega_{21}^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau. \end{cases} \quad (49)$$

При выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ справедливы оценки:

$$\left\|\omega_{2i}^{n+1}\right\| \leq 5C_\varphi,\ i = 1, 2.$$

Из (49) следует, что

$$\left|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\right| \leq |\int\limits_0^s (a_2 - 2a_1(\tau)\gamma_1 - b_1(\tau)\gamma_2)(\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1})d\tau| +$$

$$+|\int\limits_0^s (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)(\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1) - \omega_{22}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_1))\eta_{1x}d\tau|,$$

$$\left|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\right| \leq |\int\limits_0^s (g_2 - 2g_1(\tau)\gamma_2 - c_1(\tau)\gamma_1)(\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1})d\tau| +$$

$$+|\int\limits_0^s c_1(\tau)\gamma_2(\omega_{21}^n(\tau,\tau,\eta_2) - \omega_{21}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_2))\eta_{2x}d\tau|.$$

По свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что справедливы следующие неравества:

$$\left|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\right| \leq l\int\limits_0^s (1 + 2|\gamma_1| + |\gamma_2|)\left|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right| d\tau +$$

$$+l\int\limits_0^s (1 + |\gamma_1|)\cdot|\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1) - \omega_{22}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_1)|\cdot|\eta_{1x}|d\tau,$$

$$\left|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\right| \leq l\int\limits_0^s (1 + 2|\gamma_2| + |\gamma_1|)\left|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\right| d\tau +$$

$$+l\int\limits_0^s |\gamma_2|\cdot|\omega_{21}^n(\tau,\tau,\eta_2) - \omega_{21}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_2)|\cdot|\eta_{2x}|d\tau.$$

Так как $|\gamma_i| \leq 2C_\varphi,\ i = 1, 2,\ \ |\eta_{1x}| \leq 1$, то

$$\left\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\right\| \leq (6ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right\| + (2ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\right\|.$$

Так как $|\gamma_i| \leq 2C_\varphi,\ i = 1, 2,\ \ |\eta_{2x}| \leq 1$, то

$$\left\|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\right\| \leq (6ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\right\| + 2ltC_\varphi\left\|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right\|.$$

Сложим последние неравенства , получим:

$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \leq$$
$$\leq (8ltC_\varphi + lt)||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + (8ltC_\varphi + 2lt)||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||.$$

Для всех $0 \leq t \leq T_2$, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, справедливо неравество:

$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \leq$$
$$\leq (\frac{8lC_\varphi}{25C_\varphi l} + \frac{l}{10l})||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + (\frac{8lC_\varphi}{25C_\varphi l} + \frac{2l}{10l})||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||,$$

$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \leq 0.42||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + 0.52||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||,$$
$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \leq 0.52(||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + ||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||).$$

Получаем, что при выполнении условий (28) последовательные приближения $\{\omega_{2i}^n\}$, $i=1,2$, сходятся к непрерывному решению системы (48) на $\Gamma_{T_2}$.

Из (47), (48) следует, что

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right\| \leq |\int\limits_0^s (a_2-2a_1(\tau)\gamma_1-b_1(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))(\gamma_{1x}^n-\omega_{21})d\tau|+$$

$$+|\int\limits_0^s (b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1)(\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)-\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1))\eta_{1x}d\tau|+|\sigma_{31}^n|,$$

$$\left\|\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}\right\| \leq |\int\limits_0^s (g_2-2g_1(\tau)\gamma_2-c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))(\gamma_{2x}^n-\omega_{22})d\tau|+$$

$$+|\int\limits_0^s (-c_1(\tau)\gamma_2)(\gamma_{1x}^n(\tau,\tau,\eta_2)-\omega_{21}(\tau,\tau,\eta_2))\eta_{2x}d\tau|+|\sigma_{41}^n|,$$

где $\sigma_{31}^n=\int\limits_0^s[(-2a_1(\tau)\gamma_{1x}^n-b_1(\tau)\gamma_{2x}^n\eta_{1x})(\gamma_1^n-\gamma_1)-b_1(\tau)\gamma_{1x}^n(\gamma_2^n-\gamma_2)]d\tau$,

$\sigma_{41}^n=\int\limits_0^s[(-2g_1(\tau)\gamma_{2x}^n-c_1(\tau)\gamma_{1x}^n\eta_{2x})(\gamma_2^n-\gamma_2)-c_1(\tau)\gamma_{2x}^n(\gamma_1^n-\gamma_1)]d\tau$.

По свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что справедливы следующие неравества:

$$\left|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right| \leq l\int\limits_0^s(1+2\left|\gamma_1\right|+\left|\gamma_2\right|)\left|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right|d\tau+$$

$$+l\int\limits_0^s(1+|\gamma_1|)\cdot|\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)-\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1)|\cdot|\eta_{1x}|d\tau+|\sigma_{31}^n|,$$

$$\left|\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}\right| \leq l\int\limits_0^s(1+2\left|\gamma_2\right|+\left|\gamma_1\right|)\left|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right|d\tau+$$

$$+l\int\limits_0^s|\gamma_2|\cdot|\gamma_{1x}^n(\tau,\tau,\eta_2)-\omega_{21}(\tau,\tau,\eta_2)|\cdot|\eta_{2x}|d\tau+|\sigma_{41}^n|.$$

Так как $|\gamma_1|\leq 2C_\varphi,\ |\gamma_2|\leq 2C_\varphi,\ \ |\eta_{1x}|\leq 1,\ |\eta_{2x}|\leq 1$, то

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right\| \leq (6ltC_\varphi+lt)\left\|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right\|+(2ltC_\varphi+lt)\left\|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right\|+|\sigma_{31}^n|,$$

$$\left\|\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}\right\| \leq (6ltC_\varphi+lt)\left\|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right\|+2ltC_\varphi\left\|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right\|+|\sigma_{41}^n|.$$

Сложим последние неравенства , получим:

$$||\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}|| \leq$$

$$\leq (8ltC_\varphi+lt)||\gamma_{1x}^n-\omega_{21}||+(8ltC_\varphi+2lt)||\gamma_{2x}^n-\omega_{22}||+|\sigma_{31}^n|+|\sigma_{41}^n|.$$

Для всех $0\leq t\leq T_2$, где $T_2=\min(\frac{1}{25C_\varphi l},\frac{1}{10l})$, справедливо неравество:

$$||\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}|| \leq 0.42||\gamma_{1x}^n-\omega_{21}||+0.52||\gamma_{2x}^n-\omega_{22}||+|\sigma_{31}^n|+|\sigma_{41}^n|,$$

$$||\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}|| \leq 0.52(||\gamma_{1x}^n-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^n-\omega_{22}||)+|\sigma_{31}^n|+|\sigma_{41}^n|.$$

Пользуясь равномерной сходимостью $\gamma_1^n\rightrightarrows\gamma_1,\ \ \gamma_2^n\rightrightarrows\gamma_2$, выберем $n=N$ так, чтобы $|\sigma_{31}^n|+|\sigma_{41}^n|<\varepsilon$. Тогда

$$||\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}|| \leq 0.52(||\gamma_{1x}^n-\omega_{21}||+||\gamma_{2x}^n-\omega_{22}||)+\varepsilon. \tag{50}$$

Обозначим $S_{1N}=\left\|\gamma_{1x}^N-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^N-\omega_{22}\right\|$.

С помощью метода математической индукции докажем, что справедливо неравество:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\| \leqslant (0.52)^pS_{1N}+(1+0.52+\cdots+(0.52)^{p-1})\varepsilon, \tag{51}$$

где $p=1,2......$

Из (50) следует, что для $N+1$ справедливо неравенство:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+1}-\omega_{22}\right\| \leqslant 0.52S_{1N}+\varepsilon,$$

Из (50) следует, что справедливо неравенство:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+2}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+2}-\omega_{22}\right\|\leqslant 0.52(\left\|\gamma_{1x}^{N+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+1}-\omega_{22}\right\|),$$

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+2}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+2}-\omega_{22}\right\|\leqslant 0.52(0.52S_{1N}+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Получаем, что для $N+2$ справедливо неравенство:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+2}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+2}-\omega_{22}\right\|\leqslant (0.52)^2S_{1N}+(1+0.52)\varepsilon.$$

Предположим, что для $N+p$, $(p=1,2......)$ справедливо неравенство:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\|\leqslant (0.52)^pS_{1N}+(1+0.52+\dots+(0.52)^{p-1})\varepsilon.$$

Тогда для $N+p+1$, $(p=1,2......)$ получаем:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p+1}-\omega_{22}\right\|\leqslant 0.52(\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\|)+\varepsilon,$$

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p+1}-\omega_{22}\right\|\leqslant 0.52((0.52)^pS_{1N}+(1+0.52+\dots+(0.52)^{p-1})\varepsilon)+\varepsilon,$$

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p+1}-\omega_{22}\right\|\leqslant (0.52)^{p+1}S_{1N}+(1+0.52+\dots+(0.52)^{p})\varepsilon.$$

Следовательно, справедливо неравенство (51), где $p=1,2......$, из которого следует, что

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\|<(0.52)^pS_{1N}+\frac{1}{1-0.52}\varepsilon,$$

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\|<(0.52)^pS_{1N}+\frac{1}{0.48}\varepsilon.$$

Следовательно, $\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\|\to 0$ при $N\to\infty, p\to\infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{ix}{}^n=\omega_{2i},\ i=1,2$. Получаем, что существует непрерывная производная по $x$ у решения системы (45), $\gamma_{ix}=\frac{\partial\gamma_i}{\partial x}=\omega_{2i}$. Справедливы оценки:

$$\|\gamma_{ix}\|\leq 5C_\varphi,\ i=1,2.$$

Так же, как в статье [1], доказывается, что существует непрерывная производная по $t$ у решения системы (45). Сначала продифференцируем по переменной $t$ систему уравнений (45):

$$\begin{cases}\gamma_{1t}(s,t,x)=\varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t}+\\ +\int\limits_0^s[(a_2-2a_1(\tau)\gamma_1-b_1(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))\gamma_{1t}+(b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t}]d\tau,\\ \gamma_{2t}(s,t,x)=\varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t}+\\ +\int\limits_0^s[(g_2-2g_1(\tau)\gamma_2-c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))\gamma_{2t}-c_1(\tau)\gamma_2\gamma_{1x}\eta_{2t}]d\tau,\end{cases}\tag{52}$$

где

$$\eta_{1t}(s,t,x)=-a_1(t)w_1-b_1(t)w_3-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1t}+b_1(\tau)w_{3t})d\tau,$$

$$\eta_{2t}(s,t,x)=-c_1(t)w_4-g_1(t)w_2-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4t}+g_1(\tau)w_{2t})d\tau.$$

Продифференцируем по переменной $t$ систему уравнений (44), получим:

$$\begin{cases}\frac{d\gamma_{1t}(s,t,x)}{ds}=(a_2-2a_1(s)\gamma_1-b_1(s)\gamma_2(s,s,\eta_1))\gamma_{1t}+(b_2(s)-b_1(s)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t},\\ \frac{d\gamma_{2t}(s,t,x)}{ds}=(g_2-2g_1(s)\gamma_2-c_1(s)\gamma_1(s,s,\eta_2))\gamma_{2t}-c_1(s)\gamma_{1x}\gamma_2\eta_{2t}.\end{cases}\tag{53}$$

с условиями: $\gamma_{1t}(0,t,x)=\varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t}$, $\quad\gamma_{2t}(0,t,x)=\varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t}$. Следовательно,

$$\gamma_{1t}=\varphi_1''(\eta_1)\eta_{1t}\exp(\int\limits_0^s(a_2-2a_1(\tau)\gamma_1-b_1(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))d\tau)+$$

$$+\int\limits_0^s (b_2(\tau)-b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_{2x}\eta_{1t}\exp(\int\limits_\tau^s (a_2-2a_1(\nu)\gamma_1-b_1(\nu)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1))d\nu)d\tau,$$

$$\gamma_{2t}=\varphi_2''(\eta_2)\eta_{2t}\exp(\int\limits_0^s (g_2-2g_1(\tau)\gamma_2-c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))d\tau)-$$

$$-\int\limits_0^s c_1(\tau)\gamma_2\gamma_{1x}\eta_{2t}\exp(\int\limits_\tau^s (g_2-2g_1(\nu)\gamma_2-c_1(\nu)\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2))d\nu)d\tau.$$

Следовательно, существуют функции $\gamma_{1t},\ \gamma_{2t}$, удовлетворяющие системе (52). Далее дифференцируем по переменной $t$ последовательные приближения (46). Затем при выполнении условий (28) на $\Gamma_{T_2}$ доказываем сходимость

$\gamma_{1t}^n\to\gamma_{1t},\ \gamma_{2t}^n\to\gamma_{2t}$, тем самым установим, что

$$\gamma_{1t}=\frac{\partial\gamma_1}{\partial t},\quad \gamma_{2t}=\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}.$$

Итак, мы доказали существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (45). Следовательно, $\gamma_1(t,t,x)=p(t,x)=\partial_x u,\ \gamma_2(t,t,x)=q(t,x)=\partial_x v$.

Так же, как в статье [2], установлено, что справедливы оценки:

$$\|v\|\le C_\varphi\exp(|g_2|T),\ \|u\|\le C_\varphi\exp(|a_2|T)(1+Tl\exp(|g_2|T)). \tag{54}$$

Из (44) имеем:

$$\begin{cases}\gamma_1(s,t,x)=\varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a_1(\tau)\gamma_1+b_1(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)-a_2)d\tau)+\\ +\int\limits_0^s b_2(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a_1(\tau)\gamma_1+b_1(\tau)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)-a_2)d\nu)d\tau,\\ \gamma_2(s,t,x)=\varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (g_1(\tau)\gamma_2+c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)-g_2)d\tau).\end{cases} \tag{55}$$

Так как $\varphi_2'(x)\ge 0,\quad x\in R$, то из (55) следует, что $\gamma_2\ge 0$ на $\Gamma_T$. Так как $\varphi_1'(x)\ge 0$, $x\in R,\ b_2(t)>0,\ \gamma_2\ge 0$ на $\Gamma_T$, то из (55) следует, что $\gamma_1\ge 0$ на $\Gamma_T$. Так как $\gamma_1\ge 0,\ \gamma_2\ge 0$ на $\Gamma_T$, $a_1(t)>0,\ b_1(t)>0,\ b_2(t)>0,\ c_1(t)>0,\ g_1(t)>0,\quad t\in[0,T]$, то из (55) следует, что на на $\Gamma_T$ справедливы оценки:

$\|\gamma_2\|\le C_\varphi\exp(|g_2|T),\ \|\gamma_1\|\le C_\varphi\exp(|a_2|T)(1+Tl\exp(|g_2|T))$, следовательно, справедливы оценки:

$$\|\partial_x v\|\le C_\varphi\exp(|g_2|T),\ \|\partial_x u\|\le C_\varphi\exp(|a_2|T)(1+Tl\exp(|g_2|T)). \tag{56}$$

Так же, как в [1], установлено, что при всех $t$ и $x$ справедливы оценки:

$$\left|\partial_{x^2}^2 u\right|\le E_{11}\ ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}})+E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{57}$$

$$\left|\partial_{x^2}^2 v\right|\le E_{21}\ ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}})+E_{11}\sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}}sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{58}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{21}$ – постоянные, определяемые через исходные данные.

Полученные глобальные оценки (54), (56)–(58) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$. Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0,x),\ \ v(T_0,x)$, используя теорему 1, продлим решение на некоторый промежуток $[T_0,\ T_1]$ , а затем, возьмем в качестве начальных значений $u(T_1,x),\ v(T_1,x)$, используя теорему 1, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. За конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения задачи Коши (4), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений. □

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + ((t+1)u(t,x) + (2t+1)v(t,x))\partial_x u(t,x) = -3u(t,x) + (2t+3)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + ((t+2)u(t,x) + (2t+4)v(t,x))\partial_x v(t,x) = -2v(t,x), \end{cases} \tag{59}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $(t,x) \in \Omega_T$ с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 1 + 5arctgx, \ v(0,x) = \varphi_2(x) = -\frac{1}{e^x+2}. \tag{60}$$

Так как $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R), \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$,

$$a_1(t) = t+1 > 0, \ b_1(t) = 2t+1 > 0, \ b_2(t) = 2t+3 > 0, \ c_1(t) = t+2 > 0,$$

$g_1(t) = 2t+4 > 0, \quad t \in [0,T], \ \varphi_1'(x) = \frac{5}{1+x^2} > 0, \ \varphi_2'(x) = \frac{e^x}{(e^x+2)^2} > 0, \quad x \in R,$
то по теореме 2 задача Коши (59), (60) имеет единственное решение
$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. *Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. Вып. 3 (177). 2013. С. 190–201.
2. Донцова М.В. *Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида* // Уфимский математический журнал. Т.6, №4. 2014. С. 71–82.
3. Рождественский Б.Л., Яненко Н.И. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике.* М. Наука. 1978. 592 с.
4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. *К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Доклады РАН. Т.379. №1. 2001. С. 16–21.
5. Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н. *Метод дополнительного аргумента* // Вестник КазНУ. Серия «Математика, механика, информатика». Спец. выпуск Алматы. №1. 2006. С. 60–64.
6. Донцова М.В. *Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами* // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. 2014. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).
7. Шемякина Т.А. *Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. Вып. 2 (146). 2012. С. 130–131.
8. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. *Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси* // Журнал Средневолжского математического общества. Т.18. № 2. 2016. С. 115–124.
9. Донцова М.В. *Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями*// Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. №3. 2014. С. 21–36.



Марина Владимировна Донцова,
ННГУ имени Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `dontsowa.marina2011@yandex.ru`