ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 1 (2019). С. 3-18.

УДК 517.984+517.984+517.95

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А.Г. БАСКАКОВ, Е.Е. ДИКАРЕВ

Аннотация. Работа посвящена изучению спектральных свойств дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, определённых на подпространствах непрерывных ограниченных функций. Основными методами являются спектральная теория банаховых модулей, теория функций, абстрактный гармонический анализ и теория представлений, которые развиты и подробно описаны в монографии А. Г. Баскакова «Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов», г. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2016 г. Вводится в рассмотрение алгебра полиномов, при помощи которых задаются дифференциальные операторы. Вводятся замкнутые подпространства пространства непрерывных ограниченных функций, которые называются однородными пространствами функций и играют важную роль в анализе. Также вводится класс спектрально однородных пространств. Получены результаты, связывающие множество нулей полинома со свойствами ядер и образов, индуцированных этими полиномами дифференциальных операторов. Вводится понятие регулярного на бесконечности полинома (условия типа эллиптичности) и приводятся важные примеры дифференциальных операторов с частными производными, построенных по таким полиномам. Получены условия обратимости таких дифференциальных операторов. В частности, получены критерии обратимости в спектрально однородных пространствах и пространствах периодических функций. Получен результат о совпадении спектра дифференциального оператора с образом полинома, определяющего этот оператор, в спектрально однородных пространствах. Получены условия компактности резольвенты дифференциальных операторов с частными производными, определяемых регулярными на бесконечности полиномами.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с частными производными, регулярный полином, спектр Бёрлинга функции, спектр оператора, банахов модуль, ядро и образ линейного оператора, обратимость оператора

Mathematics Subject Classification: 47B38+42B35

1. Введение. Основные результаты

Рассматривается алгебра $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ полиномов вида

$$p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \quad p(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

где $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_N^{\alpha_N}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m, N \in \mathbb{N}$.

С помощью полиномов из алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ определяются дифференциальные операторы, действующие в подпространствах из банахова пространства $\mathrm{C_b} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ непрерывных

A.G. Baskakov, E.E. Dikarev, Spectral theory of functions in studying partial differential operators.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732), работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00354).

Поступила 10 августа 2017 г.

и ограниченных на $\mathbb{R}^N$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}^N} \big|x(\tau)\big|$, изучаются их спектральные свойства: описываются свойства ядра, образа, спектра, получены условия обратимости операторов.

Появлению этой статьи существенно способствовала статья Э. Мухамадиева, А. Н. Наимова, А. Х. Сатторова [1], в которой были получены необходимые и достаточные условия обратимости в $\mathrm{C_b}$ дифференциальных операторов, которые строились по определённому классу полиномов (описываемых в примере 3 после определения 7).

Определение операторов и исследование их спектральных свойств существенно опираются на спектральную теорию функций и спектральную теорию банаховых модулей. Поэтому вначале приведём некоторые используемые понятия и результаты из работ [2, 3, 4, 5, 6].

Символом $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ обозначается банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}^N$ (классов) измеримых комплексных функций со свёрткой функций

$$(f * g)(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau - s)g(s)\,\mathrm{d}s, \quad \tau\in\mathbb{R}^N, f, g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N),$$

в качестве умножения и с нормой $\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \big|f(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau, \quad f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Символом $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda,\tau)}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^N,$$

функции $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Через (λ,τ) обозначает скалярное произведение векторов $\lambda,\tau\in\mathbb{R}^N$.

Алгебру преобразований Фурье (с поточечным умножением) функций из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ обозначим через $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 1. *Комплексное банахово пространство $\mathcal{X}$ называется банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модулем, если задано билинейное отображение*

$$(f,x)\mapsto fx\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$$

такое, что имеют место следующие свойства:

1) $(f * g)x = f(gx)$, $f, g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x\in\mathcal{X}$;
2) $\|fx\|\leqslant\|f\|_1\|x\|$, $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x\in\mathcal{X}$;
3) *если $fx = 0$ для всех $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, то $x = 0$ (свойство невырожденности модуля).*

В дальнейшем символом $\operatorname{End}\mathcal{X}$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Обычно структура банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля на банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задаётся с использованием некоторого сильно непрерывного изометрического представления $T\colon\mathbb{R}^N\to\operatorname{End}\mathcal{X}$ следующей формулой:

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)T(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau, \quad f\in\mathrm{L}^1, x\in\mathcal{X}. \tag{2}$$

Банахово пространство $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ является банаховым $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ — модулем, модульная структура которого определяется свёрткой функций

$$(f * x)(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s)x(\tau - s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau - s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad \tau\in\mathbb{R}^N, f\in\mathrm{L}^1, x\in\mathrm{C_b}. \tag{3}$$

Отметим оценку $\|f * x\|\leqslant\|f\|_1\|x\|$.

В банаховом пространстве $\mathrm{C_b} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ рассмотрим группу изометрий

$$S\colon \mathbb{R}^N \to \operatorname{End}\mathrm{C_b}, \quad \big(S(\tau)x\big)(s) = x(s+\tau), \quad s,\tau \in \mathbb{R}^N, x \in \mathrm{C_b}.$$

Хотя эта группа не является сильно непрерывной, но тем не менее формула (2) сводится к формуле (3) для $T = S$ (здесь $\mathcal{X} = \mathrm{C_b}$).

Дифференциальные операторы будут определены на банаховых пространствах функций из следующего определения.

Определение 2. *Ненулевое замкнутое подпространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ из $\mathrm{C_b} = \mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ называется однородным пространством непрерывных функций, если выполнены следующие условия:*

1) *подпространство $\mathcal{F}$ инвариантно относительно операторов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^N$;*
2) *$\mathcal{F}$ — подмодуль из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ — модуля $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ (т. е. $f * x \in \mathcal{F}$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathcal{F}$).*

Следующие (замкнутые) подпространства из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ являются однородными.

1. Подпространство $\mathrm{C_{b,u}} = \mathrm{C_{b,u}}(\mathbb{R}^N)$ равномерно непрерывных функций из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$.
2. Подпространство $\mathrm{C_0} = \mathrm{C_0}(\mathbb{R}^N) \subset \mathrm{C_{b,u}}$ функций, исчезающих на бесконечности.
3. Подпространство $\mathrm{C_{sl,\infty}} = \mathrm{C_{sl,\infty}}(\mathbb{R}^N) \subset \mathrm{C_{bu}}$ медленно меняющихся на бесконечности функций: $x \in \mathrm{C_{sl,\infty}}$ если $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} \big\|S(\tau)x - x\big\| = 0$, где $|\tau| = |\tau_1| + \cdots + |\tau_N|$, для любого $\tau \in \mathbb{R}^N$.
4. Подпространство $\mathrm{C}_\Omega = \mathrm{C}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ периодических функций из $\mathrm{C_b}$ с группой периодов $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (факторгруппа $\mathbb{R}^N/\Omega$ изоморфна $\omega\mathbb{Z}^N$ с $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$).
5. Подпространство $\mathrm{AP} = \mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ почти периодических функций Бора (см. [7, 8]): $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N) = \overline{\operatorname{span}}\,\big\{\mathrm{e}_\lambda \bigm| \lambda \in \mathbb{R}^N\big\}$, где $\mathrm{e}_\lambda(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda,\tau)}$, $\tau \in \mathbb{R}^N$.
6. Подпространство $\mathrm{AP}_\infty = \mathrm{AP}_\infty(\mathbb{R}^N)$ почти периодических на бесконечности функций (см. [9, 10, 11]), определённых равенством
$$\mathrm{AP}_\infty = \overline{\operatorname{span}}\,\big\{\mathrm{e}_\lambda(\tau)x \bigm| \lambda \in \mathbb{R}^N,\ x \in \mathrm{C_{sl,\infty}}\big\}.$$

Другие пространства однородных функций составляют спектральные подпространства (см. определение 6). Отметим, что во всех однородных пространствах норма индуцируется из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 3. *Однородное пространство функций $\mathcal{F}$ называется спектрально однородным, если все функции $x\mathrm{e}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathcal{F}$, принадлежат $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$.*

Все приведённые примеры однородных пространств, кроме пространства периодических функций C_Ω и пространства $\mathrm{C_{sl,\infty}}$, являются спектрально однородными.

Приступим к построению дифференциальных операторов в некотором однородном пространстве функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$. Для построения рассмотрим подалгебру $\mathcal{M}$ функций из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель. Если $f \in \mathcal{M}$, то из формулы для обратного преобразования Фурье

$$f(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda,\tau)}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{V} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda,\tau)}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \tau \in \mathbb{R}^N,$$

где V — компактная окрестность из $\mathbb{R}^N$, содержащая носитель $\operatorname{supp}\widehat{f}$ для функции $\widehat{f}$, следует, что подалгебра $\mathcal{M}$ обладает следующими свойствами:

1) каждая функция $f \in \mathcal{M}$ имеет все частные производные $\mathbb{D}_k f$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $\mathbb{D}^\alpha f = (-1)^{|\alpha|}\mathbb{D}_1^{\alpha_1}\ldots\mathbb{D}_N^{\alpha_N} f$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, и все они принадлежат как банаховой алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, так и алгебре $\mathrm{C_0}(\mathbb{R}^N)$;
2) каждая функция $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ из $\mathcal{M}$ допускает расширение на $\mathbb{C}$ до функции конечного экспоненциального типа [12];
3) подалгебра $\mathcal{M}$ плотна в $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Таким образом, на алгебре $\mathcal{M}$ корректно определены операторы
$$\mathbb{D}^\alpha = \mathbb{D}_1^{\alpha_1}\dots\mathbb{D}_N^{\alpha_N}\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M},\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^N$$
(они непрерывны в топологии пространства Шварца).

Рассмотрим произвольный полином $p\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ вида (1), и для любых $f\in\mathcal{M}$ и $x\in\mathcal{F}$ положим
$$\mathcal{A}_p(f*x) = p(f)*x, \tag{4}$$
где $p(f)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha\mathbb{D}^\alpha f$ — функция из алгебры $\mathcal{M}$.

Определение 4. *Дифференциальный оператор $\mathcal{A}_p\colon \mathrm{D}(\mathcal{A}_p)\subset\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ определяется следующим образом. Функцию $x\in\mathcal{F}$ отнесём к области определения $\mathrm{D}(\mathcal{A}_p)$ оператора $\mathcal{A}_p$, если существует функция $y\in\mathcal{F}$ такая, что для любой функции $f\in\mathcal{M}$ имеют место равенства*
$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha\mathbb{D}^\alpha(f*x) = p(f)*x = f*y,\quad p(f)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha\mathbb{D}^\alpha f\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N).$$

При этом отметим корректность оператора $\mathcal{A}_p$, т. е. функция y однозначно определяется по функции $x\in\mathcal{F}$. В противном случае, если функции x отвечают по указанному правилу две функции $y,z\in\mathcal{F}$, имело бы место равенство $f*(y-z)=0$ для любой функции $f\in\mathcal{M}$. Следовательно, ввиду плотности $\mathcal{M}$ в алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, получаем, что $y-z=0$.

Для построенного оператора $\mathcal{A}_p\colon \mathrm{D}(\mathcal{A}_p)\subset\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ будет часто использоваться более короткая запись $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Его линейность следует из корректности определения. Близкое (но не совпадающее) определение было дано в статье [13].

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ замкнут и перестановочен с операторами свёртки $S(f)x=f*x$, $x\in\mathcal{F}$, $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, а также с операторами $S(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}^N$, сдвигов функций из $\mathcal{F}$.*

Отметим, что перестановочность линейного оператора $A\colon \mathrm{D}(A)\subset\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ и ограниченного оператора $B\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — банахово пространство, означает, что $B\mathrm{D}(A)\subset\mathrm{D}(A)$, и выполнены равенства $ABx=x$, $x\in\mathcal{X}$, $BAy=y$, $y\in\mathrm{D}(A)$.

При определении других однородных пространств и при доказательстве основных результатов будет использоваться определение спектра Бёрлинга векторов из банаховых $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модулей и его свойства (см. [2, 3, 14, 15, 16, 17, 18]). Такими однородными пространствами будут выступать спектральные подпространства из однородного пространства $\mathcal{F}$ (см. определение 2).

Пусть $\mathcal{X}$ — банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуль.

Определение 5. *Спектром Бёрлинга вектора $x\in\mathcal{X}$ называется множество элементов из $\mathbb{R}^N$ вида*
$$\begin{aligned}\Lambda(x)=&\big\{\lambda_0\in\mathbb{R}^N \bigm| fx\neq 0 \text{ для любой функции } f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N), \text{ для которой}\\ &\widehat{f}(\lambda_0)\neq 0\big\} = \mathbb{R}^N\setminus\big\{\mu_0\in\mathbb{R}^N \bigm| \text{существует функция } f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)\\ &\text{такая, что} \widehat{f}(\mu_0)\neq 0 \text{ и } fx=0\big\}.\end{aligned}$$
Спектром Бёрлинга подмножества $\mathcal{X}_0$ из $\mathcal{X}$ называется множество из $\mathbb{R}^N$ вида
$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{X}_0)=&\overline{\bigcup_{x\in\mathcal{X}_0}\Lambda(x)} = \mathbb{R}^N\setminus\big\{\mu_0\in\mathbb{R}^N \bigm| \text{существует функция } f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)\\ &\text{такая, что } \widehat{f}(\mu_0)\neq 0 \text{ и } fx=0 \text{ для любого вектора } x \text{ из } \mathcal{X}_0\big\}.\end{aligned}$$

Спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ любой функции $x\in\mathrm{C_b}$ совпадает с носителем преобразования Фурье функции x, рассматриваемой как распределение [19, 20, 21, 22]. Например, спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ каждой почти периодической функции $x\in\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ совпадает со спектром Бора функции x (см. [2, 3]). Это свойство используется при доказательстве теоремы 7.

Определение 6. *Для любого замкнутого множества Δ из $\mathbb{R}^N$ подмножество $\mathcal{X}(\Delta)$ из $\mathcal{X}$ вида*

$$\mathcal{X}(\Delta) = \{x \in \mathcal{X} \mid \Lambda(x) \subset \Delta\}$$

называется спектральным подмодулем из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} = \mathcal{F}$, то спектральный подмодуль $\mathcal{F}(\Delta)$ будет называться спектральным подпространством.

Отметим, что $\Lambda\big(\mathcal{X}(\Delta)\big) \subset \Delta$, но равенства может и не быть. При этом отметим, что каждая внутренняя точка $\lambda_0 \in \operatorname{Int}\Delta$ содержится в $\Lambda\big(\mathcal{X}(\Delta)\big)$.

Лемма 2. *Для любого вектора x из области определения $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ имеет место включение спектров*

$$\Lambda(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}x) \subset \Lambda(x), \quad x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}). \tag{5}$$

Для любого полинома p из $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ символом $\mathrm{Z}(p)$ обозначим множество его нулей:

$$\mathrm{Z}(p) = \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid p(\lambda) = 0\}. \tag{6}$$

Имеют место следующие утверждения о ядре оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$.

Теорема 1. *Ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} = \big\{x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) \bigm| \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}x = 0\big\}$ содержится в спектральном подпространстве $\mathcal{F}(\Delta)$, где $\Delta = \mathrm{Z}(p)$, и является замкнутым подмодулем в $\mathcal{F}$, инвариантным относительно операторов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^N$.*

Теорема 2. *Пусть множество $\mathrm{Z}(p)$ нулей полинома p не более чем счётно и $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) \subset \mathrm{C_{b,u}}(\mathrm{R}^N)$ (функции из области определения оператора равномерно непрерывны). Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ *(функции из ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ почти периодичны по Бору);*
2) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *— сепарабельное подпространство из $\mathrm{C_{b,u}}$;*
3) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} = \{0\}$ *(оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ инъективен), если $\mathcal{F} = \mathrm{C}_0$;*
4) *ядро оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ конечномерно, если множество $\mathrm{Z}(p)$ конечно, при этом оно состоит из тригонометрических полиномов;*
5) $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *— инъективный оператор, если $\mathrm{Z}(p)$ — пустое множество.*

В следующих двух теоремах формулируются свойства образа $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$.

Теорема 3. *Подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ является подмодулем (не обязательно замкнутым) в $\mathcal{F}$, инвариантным относительно операторов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^N$.*

Теорема 4. *Образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ обладает следующими свойствами:*

1) $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *содержит спектральное подпространство $\mathcal{F}(\Delta)$ для любого компактного множества $\Delta \subset \mathbb{R}^N$, обладающего свойством $\Delta \cap \mathrm{Z}(p) = \varnothing$;*
2) $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *— плотное в $\mathcal{F}$ подпространство, если $\mathcal{F} \subset \mathrm{C_{b,u}}$ и $\mathrm{Z}(p) = \varnothing$;*
3) $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_0}$ *(здесь $\mathcal{F} = \mathrm{C}_0$) — плотное в C_0 подпространство, если множество $\mathrm{Z}(p)$ не имеет конечных предельных точек;*
4) $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \mathrm{C}_0$, *если $\mathcal{F} = \mathrm{C_{sl}}$ и $p(0) = 0$.*

Получение условий обратимости оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, и особенно получение критериев непустоты резольвентного множества $\rho(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ этого оператора, приводит к необходимости ограничений на поведение полинома на бесконечности. Приводимые далее условия на рассматриваемые полиномы тесно связаны с желанием видеть представление обратного оператора как оператора свёртки с некоторой функцией из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Определение 7. *Полином $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ называется регулярным на бесконечности, если существует число $R \geqslant 0$ и пара функций f_1, f_0 из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ такие, что*

$$p(\lambda)\widehat{f_1}(\lambda) - \widehat{f_0}(\lambda) = 1 \tag{7}$$

для всех векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих условию $|\lambda| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_N| \geqslant R$.

Множество регулярных на бесконечности полиномов обозначим символом $\mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Отметим, что полиномы, определяющие эллиптические операторы (см., например, [21, гл. 2, §12]), являются регулярными на бесконечности.

Приведём более конкретные примеры регулярных на бесконечности полиномов:

1) $p_1(\xi) = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$;

2) $p_2(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k^2$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $p_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$;

3) $p_3(\xi) = \prod\limits_{k=1}^{N} p_k(\xi_k) + \sum\limits_{|\alpha_k| \leqslant m_k - 1} a_\alpha \xi^\alpha$, где $p_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, — полиномы степени m_k, $\sum\limits_{k=1}^{m} m_k = N$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$.

Первый полином отвечает оператору $\mathcal{A}_{p_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \xi_2}$; второй — оператору Лапласа $\mathcal{A}_{p_2} = \Delta$, а третий полином рассматривался в статье [1] при построении и изучении условий обратимости соответствующего дифференциального оператора $\mathcal{A}_{p_3}$.

Теорема 5. *Пусть $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$. Оператор $\mathcal{A}_p \colon \mathrm{D}(\mathcal{A}_p) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F}) = \varnothing, \tag{8}$$

где $\Lambda(\mathcal{F})$ — спектр Бёрлинга $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля $\mathcal{F}$. Если выполнено условие (8), то обратный оператор $\mathcal{A}_p^{-1}$ допускает представление

$$\mathcal{A}_p^{-1} y = g * y, \quad y \in \mathcal{F}, \tag{9}$$

для некоторой функции $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Непосредственно из теоремы 5 следует (учитывая равенство $\Lambda(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^N$ для спектрально однородного пространства $\mathcal{F}$; см. замечание 2)

Теорема 6. *Пусть $p \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ — регулярный на бесконечности полином и $\mathcal{F}$ — (ненулевое) спектрально однородное пространство. Для обратимости оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\mathrm{Z}(p) = \varnothing.$$

При его выполнении обратный к $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ оператор допускает представление вида (9), где преобразование Фурье функции g имеет вид

$$\widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

При доказательстве следующей теоремы используется равенство (см. [2, 3]).

$$\Lambda(\mathrm{C}_\Omega) = \Big\{ 2\pi \Big(\frac{k_1}{\omega_1}, \dots, \frac{k_N}{\omega_N} \Big) \;\Big|\; k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N, \\ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N, \text{ — набор из группы периодов } \Omega \Big\}.$$

Теорема 7. *Если $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$, то оператор $\mathcal{A}_p \colon \mathrm{D}(\mathcal{A}_p) \subset \mathrm{C}_\Omega \to \mathrm{C}_\Omega = \mathrm{C}_\Omega(\mathbb{R}^N)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\mathrm{Z}(p) \cap \Big\{ 2\pi \Big(\frac{k_1}{\omega_1}, \dots, \frac{k_N}{\omega_N} \Big) \;\Big|\; k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N \Big\} = \varnothing. \tag{10}$$

При выполнении условия (10) обратный оператор определяется формулой

$$(\mathcal{A}_p^{-1} y)(\tau) = \int\limits_K G(\tau - s) y(s) \, \mathrm{d}s,$$

где компакт $K = [0,\omega_1]\times\dots\times[0,\omega_N]$ *и* $\Phi\in \mathrm{L}^1(K)$, $G\colon K\to\mathbb{C}$ *— суммируемая на* K *функция, имеющая ряд Фурье вида*

$$G(\tau)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{p\Big(2\pi\Big(\frac{k_1}{\omega_1},\dots,\frac{k_N}{\omega_N}\Big)\Big)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k,\widetilde{\omega})},\quad \tau\in\mathbb{R}^N,$$

где $\widetilde{\omega}=\Big(\frac{1}{\omega_1},\dots,\frac{1}{\omega_N}\Big)$.

Теорема 8. *Для* $p\in\mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$ *спектр* $\sigma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ *оператора* $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})=p\big(\Lambda(\mathcal{F})\big)=\big\{p(\lambda)\ \big|\ \lambda\in\Lambda(\mathcal{F})\big\}.$$

Если $\mathcal{F}$ *— спектрально однородное пространство, то*

$$\sigma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})=\operatorname{Im}p=p(\mathbb{R}^N).$$

Теорема 9. *Пусть* $p\in\mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$ *и спектр Бёрлинга* $\Lambda(\mathcal{F})$ *однородного пространства* $\mathcal{F}$ *не имеет конечных предельных точек на* $\mathbb{R}^N$. *Тогда оператор* $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *имеет компактную резольвенту.*

2. Гармонический анализ в банаховых модулях над алгеброй $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$

Пусть $\mathcal{X}$ — банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуль и $T\colon\mathbb{R}^N\to\operatorname{End}\mathcal{X}$ — изометрическое (не обязательно сильно непрерывное) представление.

Определение 8. *Будем говорить, что структура банахова* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *– модуля* $\mathcal{X}$ *ассоциирована с представлением* T, *если для всех* $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x\in\mathcal{X}$ *и* $\tau\in\mathbb{R}^N$ *имеют место равенства*

$$T(\tau)(fx)=\big(S(\tau)f\big)x=f\big(T(\tau)x\big),\quad \tau\in\mathbb{R}^N.$$

Для такого модуля $\mathcal{X}$ *используется запись* $(\mathcal{X},T)$.

В частности, структура банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля на $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ ассоциирована с представлением $S\colon\mathbb{R}^N\to\operatorname{End}\mathrm{C_b}$.

Имеют место следующие свойства векторов из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля $(\mathcal{X},T)$ (см. [2, 3, 14, 15, 16, 17]). Символом $T(f)$ обозначается оператор $T(f)\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $T(f)x=fx$, $x\in\mathcal{X}$, для любой функции $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Таким образом, $S(f)$ — оператор свёртки (в любом однородном пространстве $\mathcal{F}$).

Лемма 3. *Имеют место следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банаховых* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ *– модуля* $\mathcal{X}$*:*

1) $\Lambda(x)$ *— замкнутое множество для любого вектора* $x\in\mathcal{X}$ *и* $\Lambda(x)=\varnothing$ *если и только если* $x=0$;
2) $\Lambda(\mathcal{B}_1x_1+\mathcal{B}_2x_2)\subset\Lambda(x_1)\cup\Lambda(x_2)$ *для любых двух операторов* $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, *перестановочных с операторами* $T(f)$, $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, *и для любых векторов* $x_1,x_2\in\mathcal{X}$;
3) $\Lambda(fx)\subset\big(\operatorname{supp}\widehat{f}\,\big)\cap\Lambda(x)$ *для любых* $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x\in\mathcal{X}$;
4) $fx=0$, *если* $\big(\operatorname{supp}\widehat{f}\,\big)\cap\Lambda(x)=\varnothing$, *где* $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$;
5) $fx=x$, *если множество* $\Lambda(x)$ *компактно и* $\widehat{f}=1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$, *где* $x\in\mathcal{X}$, $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$;
6) *если* $\Lambda(x)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ *— конечное множество для вектора* $x\in\mathcal{X}$, *то он представим в виде* $x=x_1+\dots+x_n$, *где векторы* x_k, $1\leqslant k\leqslant n$, *обладают свойствами:* $\Lambda(x_k)=\{\lambda_k\}$, $T(\tau)x_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k\tau}x_k$, $\tau\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $fx_k=T(f_k)x_k=\widehat{f}(\lambda_k)x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$;
7) *если подмножество* $\mathcal{X}_0\subset\mathcal{X}_1$ *плотно в* $\mathcal{X}_1$, *то* $\Lambda(\mathcal{X}_1)=\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathcal{X}_0}\Lambda(x)}$. *Если* $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, *то* $\Lambda(x)\subset\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant1}\Lambda(x_n)}$.

Замечание 1. *Свойство 6) для функции x из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ – модуля $\mathrm{C_b}(\mathbb{R}^N)$ означает её представимость в виде тригонометрического полинома*

$$x(\tau) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_1,\tau)} + \dots + \alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_n,\tau)}, \quad \tau \in \mathbb{R}^N, \alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Спектром Бёрлинга этой функции является множество $\Lambda(x) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Замечание 2. *Непосредственно из определения спектра Бёрлинга следует равенство*

$$\Lambda(x\mathrm{e}_\lambda) = \{\lambda\} + \Lambda(x) = \{\lambda + \mu \mid \mu \in \Lambda(x)\}$$

для любых $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathrm{C_b}$ и любой ненулевой функции x из $\mathrm{C_b}$.

Далее существенно используется теорема Люмиса [23] (её векторный вариант установлен в статье [15]). Она была доказана для функций, определённых на локально компактной абелевой группе.

Теорема 10 (Люмиса)**.** *Пусть спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$ функции x из $\mathrm{C_{b,u}}(\mathbb{R}^N)$ не более чем счётен. Тогда функция x почти периодична по Бору ($x \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$).*

Наряду с алгеброй $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ рассмотрим алгебру

$$\widehat{\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}^N) = \Big\{F \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \;\Big|\; \widehat{f}F \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N) \text{ для любой функции } f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N) \text{ с компактным носителем } \operatorname{supp}\widehat{f}\Big\}.$$

Замечание 3. *Имеет место включение*

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \subset \widehat{\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}^N). \tag{11}$$

Замечание 4. *Банахова алгебра $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ регулярна* [2, 3, 4, 24, 25]*, т. е. из любого открытого покрытия $\mathbb{R}^N$ вида $\mathbb{R}^N = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup U_\infty$, где $\overline{U_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, — компактные множества, существуют функции $f_1, \dots, f_n$ из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ такие, что*

1) $\operatorname{supp}\widehat{f_k} \subset U_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$;
2) $\operatorname{supp}\big(\mathbf{1} - \widehat{f_1} - \dots - \widehat{f_n}\big) \subset U_\infty$;

где $\mathbf{1}(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, — тождественно равная единице функция.

Следующее утверждение [2, 4, 24, 25] будет существенно использоваться при доказательстве основных результатов.

Теорема 11 (Винера)**.** *Пусть $\varphi \in \widehat{\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}^N)$ и φ принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ на бесконечности, т. е. существует число $R > 0$ и функция $\varphi_\infty \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\varphi(\lambda) = \varphi_\infty(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих условию $|\lambda| > R$. Тогда $\varphi \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$.*

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi \in \widehat{\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}(\mathbb{R}^N)$ обладает следующим свойством: существует число $R > 0$ и функция $\widehat{\psi} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\big|\widehat{\psi}(\lambda)\big| \leqslant \frac{1}{3}$ для $|\lambda| > R$ и $\varphi(\lambda) = \frac{\widehat{\varphi_1}(\lambda)}{1-\widehat{\psi}(\lambda)}$, $|\lambda| > R$, для некоторой функций $\widehat{\varphi_1} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$. Тогда $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство. В силу теоремы 11 (Винера) достаточно установить локальную принадлежность функции φ на бесконечности алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$. Для доказательства рассмотрим функцию $\widehat{\psi_1} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ со свойствами: $\widehat{\psi_1}(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $|\lambda| \geqslant R$, $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^N} \big|\widehat{\psi_1}(\lambda)\big| \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда спектр $\sigma(\psi_1)$ функции ψ_1 как элемента банаховой алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (см. [4, 5]) совпадает с множеством $\widehat{\psi_1}(\mathbb{R}^N)$ и поэтому лежит в круге $\big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\big\}$. Функцию $\frac{1}{\mathbf{1}-\widehat{\psi_1}}$ представим в виде $\frac{1}{\mathbf{1}-\widehat{\psi_1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{\psi_1}^{\,n} = \mathbf{1} + \widehat{\psi_2}$, где $\widehat{\psi_2} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$. Следовательно, функция $\frac{\widehat{\varphi_1}}{\mathbf{1}-\widehat{\psi_1}}$ принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$, и поэтому функция φ принадлежит алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ на бесконечности. $\square$

В алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ рассматривается ограниченная аппроксимативная единица (f_n), которая строится следующим образом.

Рассмотрим функцию f_0 из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, для которой $\widehat{f}(0) = 1$ и $\operatorname{supp}\widehat{f_0} \subset [-1,1]$. Например, такой является функция f_0 с $\widehat{f_0}(\lambda) = \big(1-|\lambda|\big)\chi_{[-1,1]}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где $\chi_{[-1,1]}$ — характеристическая функция отрезка $[-1,1]$. Положим

$$\widehat{f_n}(\tau) = \prod_{k=1}^{N} \widehat{f_0}\Big(\frac{1}{n}\tau_k\Big), \quad \tau = (\tau_1,\dots,\tau_N) \in \mathbb{R}^N, n \geqslant 1. \tag{12}$$

Тогда последовательность функций

$$f_n(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f_n}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda,\tau)}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \tau \in \mathbb{R}^N, n \geqslant 1, \tag{13}$$

образует *ограниченную аппроксимативную единицу* в алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

3. Доказательство основных результатов

Рассмотрим некоторые свойства регулярных на бесконечности полиномов. При их доказательстве используется включение (11).

Лемма 5. *Пусть $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$ и Δ — замкнутое множество, обладающее свойством $\mathrm{Z}(p)\cap\Delta = \varnothing$ $\big(\operatorname{dist}\big(\mathrm{Z}(p),\Delta\big) > 0\big)$. Тогда $\mathrm{Z}(p)$ компактно и для любых двух открытых множеств $U, V \in \mathbb{R}^N$, обладающих свойствами: $U \supset \mathrm{Z}(p)$, $\overline{U}$ компактно, $\Delta \subset V$, $\overline{U}\cap\overline{V} = \varnothing$ существуют функции g_0, g_1 из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ такие, что*

1) *$\widehat{g_0}(\lambda) = \mathbf{1}$ в некоторой окрестности множества $\mathrm{Z}(p)$;*
2) *$\operatorname{supp}\widehat{g_0} \subset U$;*
3) *$p(\lambda)\widehat{g_1}(\lambda) - \widehat{g_0}(\lambda) = \mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$;*
4) *если $\mathrm{Z}(p) = \varnothing$, то функция $\frac{1}{p}$ принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ $\big($здесь $g_0 = 0$, $g_1 = \frac{1}{p}\big)$.*

Доказательство. Используем обозначения из определения 7 регулярного на бесконечности полинома p. Из равенства (7), учитывая свойство $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\big|\widehat{f_0}(\lambda)\big| = 0$, получаем, что существует число $R \geqslant 0$ такое, что $\big|f_0(\lambda)\big| \leqslant \frac{1}{2}$ для $|\lambda| \geqslant R$. Поэтому из (7) получаем равенство

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{\widehat{f_1}(\lambda)}{\mathbf{1}-\widehat{f_0}(\lambda)}, \quad |\lambda| \geqslant R.$$

Из леммы 4 следует, что функция $\frac{1}{p}$ принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ на бесконечности.

Рассмотрим функцию $\widehat{g_0} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, для которой $\widehat{g_0} = \mathbf{1}$ в некоторой компактной окрестности U_0 множества $\mathrm{Z}(p)$, причём $\operatorname{supp}\widehat{g_0} \subset U$ $\big($здесь используется свойство нормальности алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, см. [2, 3]$\big)$. Функция $\widehat{g_1} = \frac{\mathbf{1}-\widetilde{g_0}}{p}$ в силу теоремы 11 (Винера) принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$. Построение функции g_0 можно осуществить и непосредственно, построив гладкую функцию $\widehat{g_0}$ с заданными свойствами. Построенные функции g_0 и g_1 обладают всеми указанными в условиях леммы свойствами 1 – 4. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть многочлен $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ представим в виде $p = p_1 + p_2$, где $p_1 \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$, и функция $\frac{p_2}{p_1}$ принадлежит алгебре $\widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N)$ на бесконечности. Тогда $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$.*

Утверждение леммы непосредственно следует из теоремы 11 (Винера).

Следствие 1. *Многочлен $p_3\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (см. пример 3 после определения 7), используемый для определения исследуемых в статье* [1] *дифференциальных операторов, является регулярным на бесконечности.*

Отметим, что это утверждение фактически было установлено в статье [1].

Доказательство леммы 1. Пусть (x_n, y_n) — последовательность функций из графика
$$\Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) = \big\{(x,y) \bigm| x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}), y = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}\big\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$$
оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ сходится к (x_0, y_0) в банаховом пространстве $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ (с нормой $\big\|(x,y)\big\| = \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathcal{F}$). Тогда для любой функции $f \in \mathcal{M}$ ($\operatorname{supp} \widehat{f}$ — компакт) последовательность $(f * x_n, f * y_n)$ из $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ будет обладать следующими свойствами: она сходится к $(f * x_0, f * y_0) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $(f * x_n) \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ и для $p(f) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha f$ имеют место равенства $\big($см. (4)$\big)$
$$\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}(f * x_0) = p(f) * x_0 = \lim_{n\to\infty} p(f) * x_n = \lim_{n\to\infty} f * y_n = f * y_0, \quad n \geqslant 1.$$

Из определения оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ следует, что $(x_0, y_0) \in \Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$, т. е. $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ — замкнутый оператор.

Из приведённых рассуждений также следует перестановочность оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ с операторами свёртки $S(f)$, $f \in \mathcal{M}$. Поскольку подалгебра $\mathcal{M}$ плотна в алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, то из доказанной замкнутости оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ следует, что он перестановочен с любым оператором $S(f)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Докажем перестановочность операторов сдвигов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^N$, функций из $\mathcal{F}$ с оператором $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Это свойство перестановочности эквивалентно выполнению свойства $\big(S(\tau)x, S(\tau)y\big) \in \Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ для любого $\tau \in \mathbb{R}^N$ и любых $(x,y) \in \Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$. Если $f \in \mathcal{M}$, то $S(\tau)f \in \mathcal{M}$ и поэтому $\big(f * S(\tau)x, f * S(\tau)y\big) \in \Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$, т. е. $\big(S(\tau)x, S(\tau)y\big) \in \Gamma(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$. Лемма доказана. □

Следствие 2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ *— замкнутый подмодуль из* $\mathcal{F}$.

Напомним, что основные утверждения статьи получены с использованием множества $\mathrm{Z}(p)$ нулей полинома p, определяемое равенством (6). Как правило, используется формула (1) для рассматриваемого полинома p.

При исследовании ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ существенно используется

Лемма 7. *Пусть функция x принадлежит ядру $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Тогда для её спектра Бёрлинга $\Lambda(x)$ имеет место включение*
$$\Lambda(x) \subset \mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Z}(p). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть вектор λ_0 из $\mathbb{R}^N$ не принадлежит множеству $\mathrm{Z}(p)$. Таким образом, $p(\lambda_0) \neq 0$. Рассмотрим функцию f из $\mathcal{M}$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \mathrm{Z}(p) = \varnothing$. Из следствия 2 получаем, что $f * x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$. Имеют место равенства
$$0 = f * \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}(f * x) = g * x = 0,$$
где $g = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha f$. Поскольку $\widehat{g}(\lambda_0) = \widehat{p}(\lambda_0)\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$, то из определения 5 спектра Бёрлинга следует, что $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Поэтому $\Lambda(x) \subset \mathrm{Z}(p)$. Учитывая, что $\Lambda(x) \subset \Lambda(\mathcal{F})$, получаем доказываемое включение (14). Лемма доказана. □

Доказательство теорем 1 и 3. Из замкнутости оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ следует замкнутость его ядра. Из леммы 1 следует перестановочность оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ с операторами свёртки $S(f)$, $f \in \mathrm{L}^1$, и операторами сдвигов $S(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^N$. Поэтому $S(f)\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, $f \in \mathrm{L}^1$, $S(\tau)\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, $\tau \in \mathbb{R}^N$, $S(f)\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, $f \in \mathrm{L}^1$, и $S(\tau)\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$,

$\tau \in \mathbb{R}^N$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ — замкнутый подмодуль из $\mathcal{F}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ — подмодуль из $\mathcal{F}$. Из леммы 7 следует включение $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}(\Delta)$, где $\Delta = \mathrm{Z}(p)$. Теоремы доказаны. □

Доказательство теоремы 2. Из доказанной леммы 7 следует счётность множества $\Lambda(x)$, если $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Поскольку $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}(\mathbb{R}^N)$, то из теоремы 10 (Люмиса) следует её почти периодичность. Ввиду того,что множество $\Lambda(\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) \subset \mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F})$ не более чем счётно, то из теоремы аппроксимации для почти периодических функций [7] следует сепарабельность замкнутого подмодуля $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} \subset \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}(\mathbb{R}^N)$. Итак, установлены свойства 1) и 2).

Если $\mathcal{F} = \mathrm{C}_0$, то ввиду того, что $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{C}_0 = \{0\}$, то $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} = \{0\}$.

Конечномерность ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ при условии конечности множества $\mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F})$ следует из свойства 6) леммы 3 и замечания 1.

Из результатов статьи [26] следует, что подпространство $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{sl}}(\mathbb{R}^N)$ либо нулевое, либо состоит из постоянных функций. Теорема доказана. □

При доказательстве леммы 2 и последующих теорем используется

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{F}$ — однородное пространство с компактным спектром Бёрлинга $\Delta = \Lambda(\mathcal{F})$. Тогда для любого полинома $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ вида (1) оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ ограничен и допускает представление*

$$\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha f \Big) * x, \quad x \in \mathcal{F}, \tag{15}$$

где f — любая функция из алгебры $\mathcal{M} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества Δ. Имеет место оценка $\|\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}\| \leqslant \|g\|_1$, где $g = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha f$.

Доказательство. Из свойства 5) леммы 3 следует, что $f * x = x$ для любой функции f из условий доказываемой леммы. Тогда представление (15) следует из определения оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Лемма доказана. □

Итак, спектральное подпространство $\mathcal{F}(\Delta)$ является инвариантным подпространством для операторов $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Доказательство леммы 2. Пусть x — вектор из $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ и $y = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x$. Из определения оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ следует, что $f * x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ для любой функции f из подалгебры $\mathcal{M} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ и $f * y = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}(f * x)$. Если $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, то рассмотрим функцию $f \in \mathcal{M}$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $(\operatorname{supp}\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$. Тогда $f * x = 0$ (см. свойство 4 леммы 3) и, следовательно, $f * y = 0$, т. е. $\lambda_0 \notin \Lambda(y)$. Таким образом, $\Lambda(y) \subset \Lambda(x)$. Итак, установлено доказываемое включение (5) спектров. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4. Докажем свойство 1). Пусть компакт Δ из $\mathbb{R}^N$ обладает свойством $\Delta \cap \mathrm{Z}(p) = \varnothing$. Из регулярности алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ следует (см. [24]) существование функции $f \in \mathcal{M}$ такой, что $p\widehat{f} = \mathbf{1}$ в некоторой окрестности компакта Δ.

Пусть y — произвольная функция из спектрального модуля $\mathcal{F}(\Delta)$ и $x = f * y$. Вектор x имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$, поэтому $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ и имеет место равенство

$$\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha f \Big) * y = g * y, \tag{16}$$

где $\widehat{g} = p\widehat{f} = \mathbf{1}$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(y) \subset \Delta$. Поэтому из свойства 5) леммы 3 следует, что $g * y = y$, т. е. из 16 получаем, что $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x = y$. Итак, установлено включение $\mathcal{F}(\Delta) \subset \operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$.

Докажем свойство 2). Из доказанного первого свойства следует (ввиду условия $\mathrm{Z}(p) = \varnothing$), что каждый спектральный подмодуль $\mathcal{F}(\Delta)$, где Δ — компакт, содержится в $\operatorname{Im}\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Пусть y — произвольная функция из $\mathcal{F} \subset \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}$. Рассмотрим аппроксимативную единицу (f_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, построенную в конце параграфа 2. Тогда (см. [2, 3, 16, 17]) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * y = y$. Поскольку $\Lambda(f_n * y) \subset \operatorname{supp} \widehat{f_n}$, $n \geqslant 1$, — компактные множества, то $f_n * y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$, $n \geqslant 1$, в силу доказанного свойства 1). Следовательно, $y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$.

Докажем свойство 3). Пусть y — произвольная функция из $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Для рассматриваемой аппроксимативной единицы (f_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (см. (12), (13)) последовательность функций $y_n = f_n * y$, $n \geqslant 1$, обладает следующими свойствами: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ (в силу равномерной непрерывности функции y) и $\Delta_n = \Lambda(y_n) \subset \operatorname{supp} \widehat{f_n} \subset [-1,1]^N$, $n \geqslant 1$, — компактные множества. Поэтому достаточно доказать, что каждая функция $z \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$ с компактным спектром $\Lambda(z)$ входит в замыкание образа $\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_0}$. Вначале предположим, что $\Lambda(z) \cap \mathrm{Z}(p) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество. Рассмотрим последовательность функций (φ_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ со следующими свойствами: $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|\varphi_n\| < \infty$, $\widehat{\varphi_n} = 0$ в некоторой окрестности V_n точки λ_0 и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n * g = 0$ для любой функции g из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, обладающей свойством $\widehat{g}(\lambda_0) = 0$. В работах [2, 3, 15, 16, 26, 27] она называлась λ_0–*последовательностью*. Там же было установлено, что если для функции $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}(\mathbb{R}^N)$ существует равномерный предел (по $\tau \in \mathbb{R}^N$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^N} \int\limits_0^n \cdots \int\limits_0^n x(s+\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda_0, s+\tau)} \, \mathrm{d}s = x_0(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^N,$$

то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n * x$, и они совпадают (такие результаты вытекают из общих эргодических теорем [2, 3]). Поскольку первый предел x_0 для $x = z$ будет нулевой функцией (из-за принадлежности функции z пространству $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n * z = 0$. Пусть f — функция из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f} = \mathbf{1}$ в некоторой окрестности компакта $\Lambda(z)$. Тогда $f * z = z$ по свойству 5 леммы 3. Пусть $z_n = z - \varphi_n * z = f * (z - \varphi_n * z)$, $n \geqslant 1$. Из свойства 3) леммы 3 получаем, что $\Lambda(z_n) \subset \operatorname{supp} \big(\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{\varphi_n}\big) \cap \Lambda(z)$, $n \geqslant 1$. Следовательно, $\lambda_0 \notin \Lambda(z_n)$ и $\Lambda(z_n) \cap \mathrm{Z}(p) = \varnothing$. Поэтому из доказанного свойства 1 данной теоремы получаем, что $z \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_0}}$. Если $\Lambda(z) \cap \mathrm{Z}(p) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — конечное множество, то функцию z представим в виде $z = f_1 * z + \cdots + f_n * z$, где функции f_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{Z})$ обладают следующими свойствами: функция $f = f_1 + \cdots + f_n$ имеет преобразование Фурье $\widehat{f} = \mathbf{1}$ в некоторой окрестности компакта $\Lambda(z)$, $\widehat{f_k}(\lambda_k) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\lambda_k \notin \operatorname{supp} \widehat{f_n}$ для $k \neq n$. Тогда $\Lambda(z_k) \cap \mathrm{Z}(p) = \{\lambda_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и поэтому по доказанному выше $z_k \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_0}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, $z \in \overline{\operatorname{Im} \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_0}}$.

Докажем свойство 4). Пусть $y = \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_{\mathrm{sl}}} x$, где $x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_{\mathrm{sl}}})$. Рассмотрим последовательность функций (φ_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, введённую при доказательстве свойства 3 данной теоремы, и последовательность $y_n = \varphi_n * y$, $n \geqslant 1$, из $\mathrm{C}_{\mathrm{sl}}(\mathbb{R}^N)$. Из результатов статьи [26] следует, что $y - y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$, $n \geqslant 1$. Из леммы 7 и определения 4 следует, что $y_n = \varphi_n * y = \mathcal{A}_{p,\mathrm{C}_{\mathrm{sl}}}(\varphi_n * x) = p(\varphi_n) * x$, где $p(\varphi_n) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \mathbb{D}^\alpha \varphi_n$, $\widehat{p(\varphi_n)} = p\widehat{\varphi_n}$, каждую из функций $p\widehat{\varphi_n}$, $n \geqslant 1$, можно представить в виде $\widehat{g\varphi_n}$, где $\widehat{g} = p\widehat{f}$, где $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{f} = \mathbf{1}$ в окрестности $\operatorname{supp} \widehat{\varphi_1}$. Поэтому ввиду свойства $\widehat{g}(0) = 0$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \big\|p(\varphi_n)\big\|_1 = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$, откуда $y \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Теорема доказана. □

Лемма 9. *Пусть $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$ и g_0, g_1 — функции из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющие условиям леммы 5. Тогда имеют место равенства:*

$$\operatorname{Im} S(g_1) = \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) \subset \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}(\mathbb{R}^N), \quad \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} S(g_1) - S(g_0) = I \in \operatorname{End} \mathcal{F} \tag{17}$$

и

$$g_1 * \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} x - g_0 * x = x, \quad x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть x — функция из $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ и $f \in \mathcal{M}$. Из перестановочности оператора $S(f)$ с оператором $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ (см. лемму 1) следует, что $S(f)x \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$, и тогда функция $y = S(f)\big(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}S(g_1) - S(g_0)\big)x$ представима в виде $y = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}S(f * g_1) - S(f * g_0)x = g * x$, где $\widehat{g}(\lambda) = p(\lambda)\widehat{f}(\lambda)\widehat{g_1}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda)\widehat{g_0}(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Итак, $S(f)y = 0$ для любой функции f из $\mathcal{M}$. Из свойства $\overline{\mathcal{M}} = \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ следует, что $f * y = 0$ для любой функции f из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, и поэтому $y = 0$. Итак, установлено равенство (17). Из доказанного следует, что $\operatorname{Im} S(g_1) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$.

Аналогичным образом устанавливается равенство (18). Из равенств (17) и (18) следует, что $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) = \operatorname{Im} S(g_1)$. Поскольку функции из образа оператора свёртки равномерно непрерывны, то доказано включение $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}) \subset \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}$. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Если оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ обратим, то он обратим на всех спектральных подмодулях из $\mathcal{F}$ и выполнено свойство*

$$\mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F}) = \varnothing. \tag{19}$$

Доказательство. Допустим, что условие (10) не выполнено, и пусть $\lambda_0 \in \mathrm{Z}(p) \cap \Lambda(\mathcal{F})$. Рассмотрим любую компактную окрестность Δ, содержащую точку λ_0, и сужение $\mathcal{A}_\Delta = \mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}|\mathcal{F}(\Delta)$ оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ на спектральное подпространство $\mathcal{F}(\Delta)$. Докажем, что $\lambda_0 \in \Lambda\big(\mathcal{F}(\Delta)\big)$ (и, следовательно, $\mathcal{F}(\Delta)$ — ненулевое подпространство из $\mathcal{F}$). Для доказательства рассмотрим функцию f из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ со свойствами $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Delta$. Тогда $f * x \in \mathcal{F}(\Delta)$, $\lambda_0 \in \Lambda(f * x)$. Таким образом, $0 \neq fx \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Согласно лемме 8, оператор $\mathcal{A}_\Delta$ является ограниченным оператором $\big(\mathcal{A}_\Delta \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\Delta)\big)$, и по доказанному он обратим и обратный $\mathcal{A}_\Delta^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\Delta)$ является сужением оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1}$ на спектральное подпространство $\mathcal{F}(\Delta)$. Из леммы 9 следует, что оператор $\mathcal{A}_p^{-1}$ есть оператор свёртки с функцией $g_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Для доказательства достаточно выбрать функцию g_0 таким образом, чтобы $\big(\operatorname{supp}\widehat{g_0}\big) \cap \Delta = \varnothing$. Поскольку $\widehat{g_1} = p$ в некоторой окрестности множества Δ, то $\widehat{g_1}(\lambda_0) = p(\lambda_0) = 0$. Поскольку алгебра $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет условию Диткина [2, 3], то существует ограниченная последовательность (φ_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ со следующими свойствами: $\widehat{\varphi_n} = 0$ в некоторой открытой окрестности $V_n \subset \Delta$ точки λ_0 для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n * g_1\|_1 = 0$. Рассмотрим последовательность $A_n \in \operatorname{End}\mathcal{F}(\Delta)$, $n \geqslant 1$, вида

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_\Delta - S(\varphi_n)\mathcal{A}_\Delta = S(g_1 - \varphi_n * g_1), \quad n \geqslant 1.$$

Из этого представления следует, что

$$\|\mathcal{A}_\Delta - \mathcal{A}_n\| = \big\|S(\varphi_n)S(g)\big\| = \|S(\varphi_n * g_n)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть Δ_n — компактная окрестность точки λ_0, содержащаяся в V_n. Поскольку точка λ_0 принадлежит множеству $\Lambda\big(\mathcal{F}(\Delta)\big)$ и $\lambda_0 \in \Delta$, то $\mathcal{F}(\Delta_n)$ — ненулевое спектральное подпространство из $\mathcal{F}$. Поскольку функция $\widehat{g_1} - \widehat{\varphi_n}\widehat{g_1}$ обращается в нуль в окрестности множества Δ_n, то из свойства 3 леммы 3 следует, что $\{0\} \neq \mathcal{F}(\Delta_n) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}_n$ для любого $n \geqslant 1$. Таким образом, получаем, что обратимый оператор $\mathcal{A}_\Delta$ является пределом (по операторной норме) последовательности необратимых операторов A_n, $n \geqslant 1$. Получено противоречие. Лемма доказана. □

Отметим что утверждение леммы 10 совсем легко доказывается в случае, если $\mathcal{F}$ содержит подпространство $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия (8) была установлена в (доказанной) лемме 10.

Пусть теперь выполнено условие (8). Ввиду регулярности на бесконечности полинома p в силу леммы 5 существуют функции $g, g_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$, для которых выполнены условия 1, 2 леммы 5. Из условия регулярности на бесконечности полинома p следует компактность множества его нулей $\mathrm{Z}(p)$. Из условия (8) теоремы следует, что

$$\operatorname{dist}\big(\mathrm{Z}(p), \Lambda(\mathcal{F})\big) = \inf_{\substack{\lambda\in \mathrm{Z}(p)\\ \mu\in\Lambda(\mathcal{F})}} |\lambda-\mu| > 0.$$

Теперь обратимся к лемме 5, положив $\Delta = \Lambda(\mathcal{F})$, и рассмотрим функции $g_0, g_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ из этой леммы.

Докажем, что оператор свёртки $S(g)$ является обратным к оператору $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$. Непосредственно из определения функции $\widehat{g_1}$ следует, что

$$\widehat{g_1} - \mathbf{1} = \widehat{g_0} \in \widehat{\mathrm{L}^1}(\mathbb{R}^N),$$

поэтому из леммы 9 получаем, что $\operatorname{Im} S(g_1) = \mathrm{D}(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$, и имеют место равенства (17), (18) из условий леммы 9. Поскольку $\widehat{g_0} = 0$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(\mathcal{F})$, то $g_0 * x = 0$ для любой функции x из $\mathcal{F}$, т. е. $S(g_0)$ — нулевой оператор. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}$ обратим и $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1} = S(g)$. Теорема доказана. □

Как уже отмечалось, теорема 6 непосредственно следует из теоремы 5.

Доказательство теоремы 7. Первая часть утверждения теоремы следует из теоремы 5. Из неё следует, что оператор $\mathcal{A}_p^{-1}$ имеет вид (9). Из этой формулы следует, что ряд Фурье периодической функции $\mathcal{A}_p^{-1}y$ имеет вид

$$(\mathcal{A}_p^{-1}y)(\tau) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{g}(\lambda_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_k,\tau)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{p\Big(2\pi\Big(\frac{k_1}{\omega_1},\ldots,\frac{k_N}{\omega_N}\Big)\Big)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_k,\tau)},$$

каждая функция $\mathcal{A}_p^{-1}y$, $y\in \mathrm{C}_\Omega$, имеет ряд Фурье вида

$$\big(\mathcal{A}_p^{-1}y\big)(\tau) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \widehat{g}(\lambda_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\lambda_k,\tau)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{p\Big(2\pi\Big(\frac{k_1}{\omega_1},\ldots,\frac{k_N}{\omega_N}\Big)\Big)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\lambda_k,\tau)}, \quad \tau\in\mathbb{R}^N,$$

где $\widetilde{\omega} = \Big(\frac{1}{\omega_1},\ldots,\frac{1}{\omega_N}\Big)$, $\lambda_k = \Big(\frac{k_1}{\omega_1},\ldots,\frac{k_N}{\omega_N}\Big)$. Ряд Фурье функции

$$z(\tau) = \int\limits_K G(\tau-s)y(s)\,\mathrm{d}s, \quad \tau\in\mathbb{R}^N,$$

совпадает (непосредственный подсчёт) с выписанным рядом Фурье функции $\mathcal{A}_p^{-1}y$, и поэтому функция $\mathcal{A}_p^{-1}y$ совпадает с функцией z. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 8. Для любого $\lambda_0\in\mathbb{C}$ оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} - \lambda_0 I$ совпадает с оператором $\mathcal{A}_{p_0,\mathcal{F}}$, где $p_0(\lambda) = p(\lambda) - \lambda_0$, $\lambda\in\mathbb{R}^N$. Ясно (см. лемму 5), что полином p_0 (также как и p) является регулярным на бесконечности, и поэтому оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}} - \lambda_0 I$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda_0 \notin p\big(\Lambda(\mathcal{F})\big)$. Таким образом, установлено равенство (8). Для спектрально однородного подпространства $\Lambda(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^N$, и поэтому в этом случае имеет место равенство (8). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 9. Поскольку множество $\Lambda(\mathcal{F})$ не имеет конечных предельных точек, то из свойства $p\in\mathcal{P}_{\mathrm{reg},\infty}(\mathbb{R}^N)$ и теоремы 8 следует непустота резольвентного множества $\rho(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}})$ (далее без ограничения общности можно считать $\lambda_0 = 0$). Тогда из теоремы 5 следует представление обратного оператора $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1}$ в виде

$$\big(\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1}x\big) = g * x, \quad x\in\mathcal{F} \tag{20}$$

для некоторой функции $g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим используемую ранее аппроксимативную единицу (f_n) из алгебры $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ и последовательность операторов

$$A_n x = S(f_n)\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1} x = S(f_n)S(g)x, \quad x \in \mathcal{F}, n \geqslant 1.$$

Тогда $\left\|\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1} - A_n\right\| \leqslant \|g - f_n * g\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.

Докажем, что каждый из операторов A_n, $n \geqslant 1$, является оператором конечного ранга. Образ $\operatorname{Im} S(g)$ оператора содержится в подпространстве $\mathcal{F} \cap \mathrm{C}_{\mathrm{b,u}}$, и из свойств 2 и 3 леммы 3 следует, что $\Lambda\bigl(\operatorname{Im} S(g)\bigr) \subset \Lambda(\mathcal{F})$, т. е. является счётным или конечным множеством. Следовательно, в силу теоремы 10 (Люмиса), $\operatorname{Im} S(g) \subset \mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$. Пусть $\Lambda\bigl(\operatorname{Im} S(g)\bigr) = \{\lambda_k \mid k \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}^N$, где $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty$ (для определённости предполагается, что $\Lambda(\mathcal{F})$ — счётное множество). В силу условия $\operatorname{supp} \widehat{f_n}$ — компакт, каждое из множеств $\Lambda(\operatorname{Im} A_n)$, $n \geqslant 1$, является конечным и состоит из тригонометрических полиномов (см. замечание 1). Поэтому $\operatorname{Im} A_n$ — конечномерное подпространство из $\mathcal{F}$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_{p,\mathcal{F}}^{-1} \in \operatorname{End} \mathcal{F}$ является компактным оператором как предел операторов конечного ранга. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что основные результаты статьи верны и для операторов, действующих в вещественных функциональных пространствах, при этом можно использовать метод, разработанный в статьях [18, 28, 29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухамадиев Э., Наимов А.Н., Сатторов А.Х. *Аналог теоремы Боля для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Уфимск. матем. журн. Т. 9, № 1. 2017. С. 75–88.
2. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов*, Воронеж.: Издательский дом ВГУ. 2016. 152 с.
3. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // СМФН. Т. 9. 2004. С. 3–151.
4. Росс К., Хьюитт Э. *Абстрактный гармонический анализ.* М.: Мир. 1975. Т. 2. 899 с.
5. W. Rudin *Fourier analysis on groups*, N.Y.: Int. Publ. 1962. 285 p.
6. Баскаков А.Г., Ускова Н.Б. *Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов* // Уфимск. матем. журн. Т. 10, № 3. 2018. С. 11–34.
7. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции*, М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы. 1953. 396 с.
8. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, М.: Изд-во МГУ. 1978. 205 с.
9. Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // УМН. Т. 68, № 1. 2013. С. 77–128.
10. Баскаков А.Г. *Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве* // Матем. заметки. Т. 97, № 2. 2015. С. 174–190.
11. A. Baskakov, I. Strukova *Harmonic analysis of functions periodic at infinity* // Eurasian Math. J. V. 7, № 4. 2016. P. 9–29.
12. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных*, М.: Наука. 1971. 430 с.
13. A. G. Baskakov, I. A. Krishtal *Memory estimation of inverse operators* // Journal of Functional Analysis. V. 267, № 8. 2014. P. 2551–2605.
14. Y. Domar *Harmonic analysis based in certain commutative Banach algebras* // Acta Math. V. 96. 1956. P. 1–66.
15. Баскаков А.Г. *Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений* // Матем. заметки. Т. 24, № 2. 1978. С. 195–206.
16. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций* // Матем. сб. Т. 124(166), № 1(5). 1984. С. 68–95.
17. Баскаков А.Г., Криштал И.А. *Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства* // Изв. РАН. Серия матем. Т. 69, № 3. 2005. С. 3–54.

18. Дикарев Е.Е. *О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств* // Уфимск. матем. журн. Т. 5, № 4. 2013. С. 77–83.
19. Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы*, М.: Мир. 1985. 469 с.
20. Хёрмандер Д. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, М.: Мир. 1985. 469 с.
21. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными*, М.: Мир. 1977. 504 с.
22. Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, М.:Физматлит. 1984. 360 с.
23. L.H. Loomis *The Spectral Characterization of a Class of Almost Periodic Functions* // Annals of Mathematics. Vol. 72, No. 2. 1960. P. 362–368.
24. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. *Коммутативные нормированные кольца*, М.:Физматлит. 2011. 260 с.
25. E. Kaniuth *A Course in Commutative Banach Algebras*, NY: Springer. 2008. 353 p.
26. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. *Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений* // Матем. заметки. Т. 92, № 5. 2012. С. 643–661.
27. Баскаков А.Г. *О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами* // Матем. заметки. Т. 34, № 4. 1983. С. 776–782.
28. Дикарев Е.Е., Поляков Д.М. *Гармонический анализ неквазианалитических операторов в вещественном банаховом пространстве* // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. Т. 14, № 3. 2014. С. 19–28.
29. Дикарев Е.Е., Поляков Д.М. *Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов в вещественном банаховом пространстве* // Матем. заметки. Т. 97, № 5. 2015. С. 670–680.

Анатолий Григорьевич Баскаков,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
Университетская площадь, 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Егор Евгеньевич Дикарев,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
Университетская площадь, 1,
394018, г. Воронеж, Россия
E-mail: egor.dikarev@gmail.com