

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Л.Г. ВАЛИУЛЛИНА, Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ

Аннотация. В статье изучается асимптотика спектра самосопряженного оператора T , порожденного в пространстве $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением четвертого порядка в предположении, что коэффициенты последнего имеют степенной рост на бесконечности так, что: а) индекс дефекта соответствующего минимального оператора равен $(2,2)$, б) дифференциальное уравнение $Tu = \lambda u$ при достаточно больших положительных значениях спектрального параметра имеет 2 точки поворота: конечную и $+\infty$, в) корни характеристического уравнения растут «не в одну силу». Последнее обстоятельство приводит к существенным сложностям при исследовании асимптотики считающей функции спектра традиционным методом Карлемана–Костюченко, основанным на оценках резольвенты вдали спектра и тауберовых теоремах. Как ни странно, метод эталонных уравнений, применяемый для решения более тонкой задачи нахождения асимптотических разложений самих собственных чисел, а потому более чувствительный (по сравнению с методом Карлемана–Костюченко) к поведению коэффициентов дифференциального выражения, оказывается более эффективным в рассматриваемой ситуации: накладывая на коэффициенты некоторые ограничения типа гладкости и регулярности роста на бесконечности, удается получить асимптотическое уравнение для спектра оператора T . Это уравнение позволяет выписать несколько первых членов асимптотического разложения для собственных чисел оператора T в случае, когда коэффициенты имеют степенной рост. Отметим, что до сих пор метод эталонных уравнений применялся в случае наличия лишь одной точки поворота.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, асимптотика спектра, точка поворота, сингулярные числа

Mathematics Subject Classification: 34B40, 34L20, 34L40, 47E05

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть T – ограниченный снизу самосопряженный оператор, действующий в некотором бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве, имеет дискретный спектр. Это означает, что спектр состоит из счетного числа собственных чисел конечной кратности и имеет единственную предельную точку $+\infty$. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора T , пронумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей. Асимптотическое поведение последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно описывать либо в терминах самих

L.G. VALIULLINA, Kh.K. ISHKIN, R.I. MARVANOV, SPECTRAL ASYMPTOTICS FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH TWO TURNING POINTS.

©Валиуллина Л.Г., Ишкин Х.К., Марванов Р.И. 2018.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Поступила 7 июня 2018 г.

собственных чисел, либо в терминах функции распределения спектра $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$:

$$\lambda_n \sim f(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1)$$

$$N(\lambda) \sim g(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

где f, g – некоторые возрастающие взаимно обратные функции, определенные в некоторой окрестности точки $+\infty$. Формулы (1) и (2) не всегда равносильны. Например, если $f(\lambda) = Ce^\lambda$, где C – положительная постоянная, то из формулы (1) следует (2). Но формула (2) равносильна формуле $N(\lambda) \sim \ln \lambda, \lambda \rightarrow +\infty$, из которой (1), очевидно, не следует. Легко проверить, что при $g(\lambda) = Ce^\lambda$ формула (2) сильнее формулы (1).

Рассмотренные примеры показывают, что причина неэквивалентности формул (1) и (2) не только в том, что функция $N(\lambda)$ определяется только с точностью до $O(1)$, но и в том, насколько «правильно» ведут себя на бесконечности функции f и g . Условие этой «правильности» хорошо известно [1]: если

$$\lim_{\delta \rightarrow 1+0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\delta x)}{f(x)} = 1, \quad (3)$$

то для всякой возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ с асимптотикой (2) верна и оценка (1). Аналогичное утверждение верно и для импликации (1) \Rightarrow (2). Функции, удовлетворяющие условию (3), называют PRV-функциями (pseudo regularly varying). В связи с многочисленными приложениями (в особенности, в теории вероятностей) PRV-функции изучены достаточно подробно (см. [2] и имеющиеся там ссылки). Отметим, что PRV-функции явились естественным обобщением RV-класса правильно меняющихся функций, введенных в 1930 году Караматой в его основополагающей работе [3]. Результаты Караматы (вместе с последующими расширениями и обобщениями) оказались исключительно плодотворными для различных областей математики (см. [4, 5]).

На практике условие (3) не всегда эффективно. Допустим, для какого-то оператора удастся получить оценку (2), но требуется найти более точную асимптотику

$$\lambda_n \sim f(n) + O(\alpha_n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где последовательность $\{\alpha_n\}$ убывает с требуемой скоростью. Ясно, что если даже функция g удовлетворяет условию (3), формула (4) не обязана следовать из (2). Таким образом, при выполнении условия (3) формула (4) может быть сильнее формулы (2).

Более существенное различие имеет место в методах получения оценок (4) и (2). Один из основных методов исследования асимптотики $N(\lambda)$, восходящий к работе Карлемана [6], основан на оценках резольвенты $(T - \lambda)^{-1}$ (или какой-либо функции от нее) при больших λ вдали от спектра T с последующим применением тауберовых теорем (см., например, [7]). Отметим, что тауберов метод может с успехом применяться и к несамосопряженным операторам [8, 9]. Но если требуется найти несколько первых членов асимптотического разложения (4), то тауберова техника уже неприменима, поскольку приходится «спускаться» на спектр — изучать асимптотику решений уравнения $Ty = \lambda y$, когда λ уходит в бесконечность по множеству, содержащему спектр оператора T . В случае когда оператор T – сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор [10], последнее обстоятельство приводит, как правило, к появлению точек поворота [11, Гл. III, § 1], которые сильно усложняют задачу нахождения асимптотических разложений решений уравнения $Ty = \lambda y$. Поэтому чаще всего (по крайней мере, для обыкновенных дифференциальных операторов) задача нахождения разложения (4) является более сложной, по сравнению с

аналогичной задачей для $N(\lambda)^1$. В этом контексте операторы, для которых формула (4) выводится проще, чем формула (2), следовало бы отнести к разряду курьезов.

Статья посвящена получению формулы (4) для одного из таких операторов. Этот оператор – обозначим его T – действует в пространстве $L^2(0, +\infty)$ по формуле

$$Ty = \mathcal{L}(y) := y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y \quad (5)$$

на функциях из

$$D(T) = \left\{ y \in L^2(0, +\infty) : y^{[k]} \in AC[0, +\infty) \ (k = \overline{0, 3}), \ \mathcal{L}(y) \in L^2(0, +\infty), \right. \\ \left. y(0) = y''(0) = 0, \ \lim_{x \rightarrow +\infty} [y, y](x) = 0 \right\}.$$

Здесь

$$[y, z] = \sum_{k=1}^2 (y^{[k-1]} \bar{z}^{[2-k]} - y^{[2-k]} \bar{z}^{[k-1]}),$$

$y^{[k]}$ – k -я квазипроизводная [10, § 15] функции y : $y^{[k]} = y^{(k)}$ при $k = \overline{0, 2}$ и $y^{[3]} = 2py' - y'''$; $AC[0, +\infty)$ означает множество функций, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[0, b]$, $b > 0$. Всюду далее считаем, что функции p и q вещественны и суммируемы на каждом интервале $(0, b)$, $b > 0$. При таких условиях T – замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (n, n) , где $0 \leq n \leq 2$ (см. [10, § 17, п. 5]). Если T самосопряжен (то есть $n = 0$) и при некотором $a > 0$ функции p и q неотрицательны п.в. на (a, ∞) , то из доказательства леммы 2 работы [12] следует, что T совпадает с оператором, ассоциированным с ограниченной снизу замкнутой квадратичной формой

$$l[y] = \int_0^\infty (|y''|^2 + 2p|y'|^2 + q|y|^2) dt, \\ D(l) = \{y \in L^2(0, \infty) : \sqrt{q}y, \sqrt{p}y' \in L^2(a, \infty), y'' \in L^2(0, \infty), y(0) = 0\},$$

следовательно, ограничен снизу. Если дополнительно предположить, что

$$q(x) \rightarrow +\infty, \ x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

то в силу принципа минимакса [13, гл. XIII, § 1] оператор T имеет дискретный спектр.

Как отмечалось выше, для получения асимптотических оценок (1) или (2) важно знать поведение фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения

$$y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y \quad (7)$$

при больших $x > 0$ и $\lambda > 0$ (соответственно $\lambda < 0$). Поведение ФСР существенно зависит от поведения характеристических корней $\mu_i(x, \lambda)$ ($i = \overline{1, 4}$) уравнения

$$\mu^4 - 2p\mu^2 + q - \lambda = 0.$$

Имеем

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu_1}, \ \mu_{3,4} = \pm\sqrt{\nu_2}, \quad (8)$$

где $\nu_{1,2} = p \pm \sqrt{D}$, $D = p^2 + \lambda - q$. Здесь и всюду далее ветвь корня \sqrt{z} выбирается так, что $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$. Таким образом, если q удовлетворяет (6) и

$$p^2(x) = o(q(x)), \ x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

¹Для некоторых операторов (например, для дифференциальных операторов в частных производных) главный член в разложении (1) удается получить только из (2), обращая функцию g .

то существуют положительные постоянные A, B и C , такие, что при $x > a, \lambda < -C, k, j = \overline{1, 4}$

$$B \leq \left| \frac{\mu_k(x, \lambda)}{\mu_j(x, \lambda)} \right| \leq A. \quad (10)$$

Условия (10) играют важную роль при выводе оценки (2) для квазидифференциальных операторов произвольного порядка [7, гл. VIII]. При нарушении этого условия асимптотическая структура ФСР уравнения (7) может сильно усложниться (см. [14] и имеющиеся там ссылки). Во-первых, эта сложность обусловлена тем, что характеристические корни на бесконечности растут «не в одну силу» («вырожденный» случай). Так, если $p(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \infty$, и

$$q(x) = o(p^2(x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (11)$$

то

$$\mu_{j+2}(x, \lambda) = o(\mu_j(x, \lambda)) \quad (j = 1, 2), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Во-вторых, часть этих корней может слиться в один кратный корень в некоторых точках, которые и называют точками поворота. Как было отмечено выше, наличие последних доставляет особенно много хлопот при исследовании асимптотики ФСР (см. [11, 15] и дальнейшие ссылки). Более того, если

$$q(x) = x^\alpha, \quad p(x) = \sqrt{x^{2\beta} + x^\gamma \cos x^\delta + x^\alpha}, \quad 0 < \alpha, \gamma < 2\beta, \quad \delta > 0, \quad (12)$$

то из формул (8) видно, что при $\lambda = -r, r \gg 1$, уравнение (7), в зависимости от знака выражения $\delta + \gamma - 2\beta$, имеет конечное или бесконечное число точек поворота, определяемые уравнением $x^{2\beta} + x^\gamma \cos x^\delta = r$. Вблизи каждой точки поворота стандартные асимптотические оценки (ВКБ-оценки для уравнений второго порядка и их аналоги для уравнений и систем высших порядков [11]) не работают.

Поэтому при условии (11) и больших отрицательных λ приходится иметь дело со сложностями обоих типов. Тем не менее, метод Карлемана–Костюченко (для получения формулы (2)) в данной ситуации также применим, нужно только «выходить» в комплексную λ -плоскость (см. [14] а также [7]).

Однако, в «вырожденном» случае (конечно, при более детальной информации о поведении функций p и q) удастся получить формулу (4), более сильную (при наложенных на p и q условиях), чем (2). При этом сложностей, связанных с наличием точек поворота, оказалось меньше, чем в задаче нахождения формулы (2)!

Существуют различные методы, благодаря которым удастся преодолеть проблемы, связанные с точками поворота, и получить формулу (2) для операторов вида T . Один из них (см., например, [14, 16]) – упомянутый выше «выход» в комплексную λ -плоскость: исследование асимптотики функции Грина оператора T при больших λ из некоторого невещественного луча, исходящего из начала координат, и применение какой-либо тауберовой теоремы [8, 9, 17]. Другой метод, восходящий к работе Лангера [18], позволяет получить приближенное решение уравнения (7), пригодное как в точке поворота, так и вдали от нее. Этот метод одинаково эффективен как в самосопряженных, так и несамосопряженных спектральных задачах [15, 19, 20]. Именно благодаря методу Лангера удастся получить формулу (4) с оценкой

$$\alpha_n = n^{-m}, \quad m = \text{const} > 0, \quad (13)$$

в «вырожденном» случае (11), когда коэффициенты p и q имеют степенной рост и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям типа гладкости и регулярности поведения на бесконечности (Теорема 2). Подчеркнем еще раз: с одной стороны, оценки (4) и (13) несут гораздо больше информации об асимптотике спектра оператора T по сравнению с

оценкой (2), с другой – для получения оценки (2) метод Лангера в некоторых случаях (как в примере (12)) может оказаться бессилён.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На вещественнозначные функции p и q наложим следующие ограничения:

- 1) Существует $x_0 > 0$, что функции p и q суммируемы на $(0, x_0)$.
- 2) При $x \geq x_0$ ($x_0 \geq 0$ – постоянная) функции p и q имеют абсолютно непрерывные производные, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1x^{\alpha-1} \leq q'(x) \leq A_1x^{\alpha-1}, b_1x^{\beta-1} \leq p'(x) \leq B_1x^{\beta-1}, \quad (14)$$

где $a_1, A_1, b_1, B_1, \alpha, \beta$ – положительные постоянные, причем

$$\alpha < 2\beta; \quad (15)$$

вторые производные функций p и q имеют постоянный знак (почти всюду).

Замечание 1. Из неравенств (14) следует, что при $x \geq x_1$ ($x_1 \geq x_0$)

$$ax^\alpha \leq q(x) \leq Ax^\alpha, bx^\beta \leq p(x) \leq Bx^\beta, \quad (16)$$

где a, A, b, B – положительные постоянные. Следовательно [10, § 24, Теорема 2], спектр всякого самосопряженного расширения минимального оператора, порожденного выражением (5), дискретен.

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях на функции p и q мы получим двойную асимптотику [11, Гл. II, § 7] решений уравнения $\mathcal{L}(y) = \lambda y$, откуда, в частности, будет вытекать, что индекс дефекта минимального оператора T_0 , порожденного в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $\mathcal{L}y$ [10, гл. V, § 17], равен (2,2). Последний факт влечет за собой самосопряженность оператора T .

Из соотношений (8) и неравенств (15), (16) видно, что уравнение (7) при каждом $\lambda \gg 1$ имеет единственную точку поворота a_λ , определяемую условием $q(a_\lambda) = \lambda$. В этой точке сливаются корни $\mu_{3,4}$, которые совпадают с характеристическими корнями для уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + \frac{q - \lambda}{p + \sqrt{p^2 + \lambda - q}}y = 0. \quad (17)$$

В работе [21] при условиях 1), 2) и $0 < \beta < \alpha + 2$ найдена асимптотика ФСР уравнения (7) при больших $\lambda > 0$, равномерная по $x \geq 0$. Используя эту асимптотику, было получено асимптотическое уравнение для спектра, позволяющее в случае $q(x) = x^\alpha, p(x) = x^\beta$ выписать несколько первых членов в разложении (4), (13).

При построении асимптотики ФСР оказалось, что два решения из ФСР допускают при больших λ равномерное по $x \geq 0$ приближение парой решений уравнения (17). В случае $\beta \geq \alpha + 2$ такое приближение становится непригодным в окрестности (своей для каждого $\lambda > 0$) бесконечности. Это связано с тем, что при $\beta \geq \alpha + 2$ точка $x = +\infty$ также является точкой поворота, потому для построения асимптотики решений уравнения (17) около бесконечности приходится выбирать другое эталонное уравнение. При выборе эталонного уравнения нам понадобится уже более подробная по сравнению с условием 2) информация о поведении функций p и q на бесконечности. А именно, мы будем предполагать, что p удовлетворяет следующему условию

- 3) на $[x_0, \infty)$ $p^{(k)}(x) = (x^\beta)^{(k)} + O(x^{\beta-k-\epsilon})$, $k = 0, 1, 2$, $\epsilon > 0$.

В случае $\beta = \alpha + 2$ мы потребуем выполнения еще одного условия

- 4) на $[x_0, +\infty)$ $q(x) = x^\alpha + O(x^{\alpha-\sigma})$, $\sigma > 0$.

Очевидно, функции вида

$$p(x) = x^\beta + R(x), q(x) = x^\alpha + V(x), \quad (18)$$

где $R, V \in C_0[0, +\infty)$, удовлетворяют условиям 1) – 4).

Теорема 1. Пусть при $\beta \geq \alpha + 2$ выполнены условия 1) – 3), а при $\beta = \alpha + 2$ и условии 4). Тогда собственные числа оператора T с достаточно большими номерами определяются из уравнения

$$\sin \Phi(\lambda) + K(\lambda) \cos \Phi(\lambda) + O(\lambda^{-\delta}) = 0, \quad (19)$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^\infty (p + \sqrt{p^2 + \lambda})^{-1/2} dt + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(\beta - 2)} \sqrt{(\beta - 1)^2 + 2C}, \quad (20)$$

$$C = \begin{cases} 0, & \beta > 2 + \alpha, \\ 1 & \beta = 2 + \alpha, \end{cases}, \quad (21)$$

$$K(\lambda) = -\frac{5}{72} \left(\Phi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \int_0^{a_\lambda} |\nu_2|^{-1/2} \left(b^2 + b' - K(t, \lambda) + \frac{D' \nu_2' \nu_2}{8D^2} \right) dt, \quad (22)$$

$$b = \frac{p'}{2\sqrt{D}}, \quad \nu_2 = p - \sqrt{D}, \quad D = p^2 + \lambda - q, \quad (23)$$

$$\delta = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2(\beta - \alpha - 2)}{\beta - 2}, \frac{2\varepsilon}{\beta - 2} \right\}, & \beta > \alpha + 2, \\ \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2\sigma}{\beta - 2}, \frac{3\varepsilon}{\beta - 2} \right\}, & \beta = \alpha + 2. \end{cases} \quad (24)$$

Если функции p и q имеют вид (18), то

$$\delta = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, \frac{2(\beta - \alpha - 2)}{\beta - 2} \right\}, & \beta > \alpha + 2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, & \beta = \alpha + 2. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть функции p и q имеют вид (18). Тогда спектр оператора T при $2 + \alpha < \beta < 2 + 2\alpha$ имеет асимптотику

$$\lambda_k = m_k^{\frac{4\beta}{\beta+2}} + \frac{4\beta}{\beta+2} C_0^{-1} \left\{ C_1 m_k^{\frac{2(\beta-1)}{\beta+2}} - C_2 m_k^{\frac{2(\beta-2)}{\beta+2}} + C_3 m_k^{\frac{((\beta-2)^2+2\alpha\beta)}{\beta^2-4}} \right\} + O(k^{-m}), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
m_k &= C_0^{-1} \pi \left(k + \frac{\beta}{4(\beta-2)} \right), \\
C_0 &= \int_0^\infty \left(x^\beta + \sqrt{x^{2\beta} + 1} \right)^{-1/2} dx, \quad C_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty R(x) dx, \\
C_2 &= \frac{\beta}{8} \int_0^\infty \left[\tilde{\nu}^{1/2} \tilde{D}^{-1/2} t^{\beta-2} \left(-2\beta \tilde{D}^{-1} + \beta \tilde{D}^{-2} - \frac{3}{4} \beta t^\beta \tilde{D}^{-1/2} + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\beta-4}{(\beta-2)^2} \tilde{Q}^{-2} \tilde{\nu}^{-1/2} \right] dt - \frac{(3\beta-4)\beta}{8(\beta-2)^2} C_0^{-1}, \\
\tilde{\nu} &= t^\beta + \sqrt{\tilde{D}}, \quad \tilde{D} = t^{2\beta} + 1, \quad \tilde{Q} = \int_t^\infty \tilde{\nu}^{-1/2} dt, \quad \gamma = \frac{\beta-1}{\beta-2}, \\
C_3 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta-2}{\sqrt{2}} \right)^{-2\alpha/(\beta-2)} \int_0^\infty t^{-2\alpha/(\beta-2)+1} J_\gamma^2(t) dt, \quad J_\gamma - \text{функция Бесселя первого рода,} \\
m &= \min \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, \frac{3}{4}, \frac{2(\beta-\alpha-2)}{\beta-2}, \frac{1}{2} + \frac{\beta-\alpha-2}{\beta-2} \right\} - \frac{3\beta-2}{\beta+2}.
\end{aligned}$$

При $\beta \geq 2 + 2\alpha$ имеют место аналогичные формулы.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

3.1. Приведение основного уравнения к каноническому виду. Введем обозначения. Пусть $\chi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $[0, x_0]$ и нулю на $[x_0 + 1, \infty)$. Положим

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= p(x)(1 - \chi(x)), \quad q_1(x) = q(x)(1 - \chi(x)), \\
f(x, \lambda, \mu) &= \mu^4 - 2p_1\mu^2 + q_1 - \lambda, \\
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2p_1 & 0 & -1 \\ q_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \chi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Далее пусть $Y = (y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})^T$, где $y^{[k]}$ означает k -ую квазипроизводную [10, с. 182]. Тогда уравнение $\mathcal{L}y = \lambda y$ эквивалентно системе уравнений

$$Y' = (A_1 + A_2)Y. \quad (26)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}
A_0 &= \text{diag}(A_{01}, A_{02}), \\
A_{01} &= \sqrt{\nu_1} \text{diag}(1, -1), \quad A_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu_2 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \quad (27)$$

$$T = D^{-1/4} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \text{diag}(MW, I_2), \quad (28)$$

I_n — единичная матрица n -го порядка,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \text{diag}(\nu_1, -\nu_2), \quad \Lambda_2 = \text{diag}(\nu_2, -\nu_1), \\
W &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \text{diag}(\nu_1^{-1/4}, \nu_1^{1/4}), \\
B_1 &= -T^{-1}T', \quad B_2 = T^{-1}A_2T.
\end{aligned} \quad (29)$$

Далее пусть

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \\
 X_{11} &= -\frac{1}{2}A_{01}^{-1}B_{11}, \quad X_{22} = -\frac{p}{2\sqrt{D}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 X_{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}(A_{01}(B_{12} + B_{12}A_{02})), \\
 X_{21} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}(B_{21}A_{01} + A_{02}B_{21}).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Легко проверяются соотношения

$$T^{-1}AT = A_0, \quad XA_0 - A_0X = B_1.$$

Тогда подстановка

$$Y = T(I_4 + X)V$$

приводит уравнение (26) к виду

$$V' = (A_0 + Z_1)V, \tag{31}$$

где

$$Z_1 = (I_4 + X)^{-1}(B_1X - X' + B_2(I_4 + X)). \tag{32}$$

3.2. Эталонные решения. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \xi &= \left(\frac{\beta - 2}{2} \int_x^\infty \frac{dt}{\nu^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2/(\beta-2)}, \quad \nu = p_1 + \sqrt{p_1^2 + \lambda}, \\
 B &= (\xi')^{-1/2}, \quad Q_1 = \int_0^x \nu_1^{1/2} dt, \quad Q_2 = \sqrt{\lambda} \int_x^\infty \frac{dt}{\nu^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Эталонные решения возьмем в виде

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \text{diag}(V_{01}, V_{02}), \\
 V_{01} &= \text{diag}(\exp Q_1, \exp(-Q_1)), \quad V_{02} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{pmatrix}, \\
 v_1 &= B\xi^{\frac{1}{2}}J_\gamma(Q_2), \quad v_2 = B\xi^{\frac{1}{2}}Y_\gamma(Q_2), \\
 \gamma &= \begin{cases} \frac{\beta-1}{\beta-2}, & \beta > \alpha + 2, \\ \frac{\sqrt{(\beta-1)^2+2}}{\beta-2} & \beta = \alpha + 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Здесь J_γ и Y_γ – функции Бесселя соответственно первого и второго родов [22]. Тогда

$$V'_0 = (A_0 + Z_2)V_0, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= \text{diag}(0, Z_0), \\
 Z_0 &= \left[\left(\frac{\beta(\beta-2)}{4} + \frac{C}{2} \right) \left(\frac{\xi'}{\xi} \right)^2 + \frac{B''}{B} - \frac{q_1}{\nu_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\nu(\sqrt{D} + \sqrt{p_1^2 + \lambda})} \right) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

постоянная C определена по формуле (21).

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi = \frac{\lambda}{\nu}, \quad p_0 = \begin{cases} \sqrt{\varphi}, & x \leq b_\lambda, \\ \frac{1}{x}, & x > b_\lambda, \end{cases},$$

где b_λ – корень уравнения $\sqrt{\lambda}Q_2(b_\lambda, \lambda) = 1$ (легко видеть, что при достаточно больших $\lambda > 0$ b_λ определяется однозначно);

$$P = \text{diag}(1, 1, 1, p_0), \quad D = \text{diag}(D_1, D_2), \quad (34)$$

$$D_1 = V_{01}, \quad D_2 = \begin{cases} \text{diag}(\lambda^{\gamma/2}\xi^{-r}, \lambda^{-\gamma/2}\xi^r), & x > b_\lambda, \\ \varphi^{-\frac{1}{4}}I_2 & x \leq b_\lambda, \end{cases}, \quad (35)$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\beta - 1)^2 + 2C} + 1 \right),$$

$$\tilde{V}_0 = P^{-1}V_0D^{-1}, \quad \tilde{V} = P^{-1}VD^{-1}. \quad (36)$$

Тогда $\tilde{V}_0 = \text{diag}(I_2, \tilde{V}_{02})$, причем (см. [22, § 7.13]) при $x \leq M^{-1}\lambda^{1/(\beta-2)}$ ($M \gg 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{02} &= \sqrt{\frac{\beta-2}{\pi}} \begin{pmatrix} \cos \Phi_1 & \sin \Phi_1 \\ \sin \Phi_1 & -\cos \Phi_1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[I_2 + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) (\sqrt{\lambda})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O \left(\varphi^{-1/2} \frac{\nu'}{\nu} + \frac{1}{\lambda Q_2^2} \right) \right], \\ \Phi_1 &= Q_2 - (2\gamma + 1)\pi/4. \end{aligned} \quad (37)$$

Кроме того, для достаточно больших $M > 0$, $\Lambda_0 > 0$ найдутся положительные постоянные C_1, C_2 , такие, что

$$C_1 < |\tilde{V}_{02}(x, \lambda)| < C_2 \quad \forall x \geq M\lambda^{1/(\beta-2)}, \lambda \geq \Lambda_0.$$

3.3. Интегральное уравнение. Имеем (см. (31) и (33))

$$V = V_0 + \int_{\Gamma(x)} V_0(x, \lambda) V_0(t, \lambda) Z(t, \lambda) V(t, \lambda) dt,$$

где

$$Z = Z_1 - Z_2.$$

Умножив обе части этого уравнения слева и справа соответственно на P^{-1} и D^{-1} (см. (36)), получим уравнение для \tilde{V}

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 + A(\lambda)\tilde{V}, \quad (38)$$

где оператор $A(\lambda)$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (A(\lambda)\tilde{V})(x, \lambda) &= \tilde{V}_0(x, \lambda) \int_{\Gamma(x)} A(x, t, \lambda) \tilde{V}(t, \lambda) D(t, \lambda) D^{-1}(x, \lambda) dt =: \\ &=: \tilde{V}_0(x, \lambda) A_1(\lambda) \tilde{V}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$A(x, t, \lambda) = D(x, \lambda) D^{-1}(t, \lambda) (\tilde{V}_0^{-1} P^{-1} Z P)(t, \lambda). \quad (40)$$

Матрицу $\Gamma(x) = ((\gamma_{ij}, x))$, где (γ_{ij}, x) – интервал, по которому интегрируется элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца подынтегральной матрицы, выберем следующим образом: $\gamma_{ij} = +\infty$ при $(i, j) = (3, 2), (4, 2), (4, 3)$ и $\gamma_{ij} = 0$ при остальных (i, j) . Из определения (34) – (35) матрицы D следует, что при таком выборе все экспоненциальные множители в (40) ограничены. Тогда для нормы оператора $A(\lambda)$ в пространстве Z справедлива оценка

$$\|A(\lambda)\| = O(I(\lambda)), \quad I(\lambda) = \int_0^\infty \|G(t, \lambda)\| dt, \quad (41)$$

$$G(t, \lambda) = P^{-1}(t, \lambda) Z(t, \lambda) P(t, \lambda).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$G(t, \lambda) = \text{diag}(0, G_0) + O(g), \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} G_0 &= \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ g &= \nu_1^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{\nu_1'}{\nu_1} \right)^2 + \frac{\nu_1''}{\nu_1} \right), \\ g_1 &= \frac{1}{8} \frac{p_0}{\sqrt{D}} \left(\frac{D'}{D} \frac{\nu_1'}{\sqrt{D}} + 8\chi p \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$g_2 = \frac{1}{4p_0} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 + \frac{\nu''}{\nu} - \frac{\beta(3\beta-4) + 8c}{(\beta-2)^2} \lambda Q_2^{-2} \nu^{-1} - \frac{4q}{\nu_1} \right). \quad (44)$$

Лемма 1. Пусть функции p и q удовлетворяют условиям 1) – 3), а в случае $\beta = \alpha + 2$ и условию 4). Тогда

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= O(\lambda^{-m}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \\ m &= \begin{cases} \min \{1/4, (\beta - \alpha - 2)/(\beta - 2), \varepsilon/(\beta - 2)\}, & \beta > \alpha + 2, \\ \min \{1/4, \sigma/(\beta - 2), \varepsilon/(\beta - 2)\}, & \beta = \alpha + 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

где σ и ε положительные постоянные, фигурирующие в условиях 3) и 4).

Доказательство. Из соотношений (41) и (42) имеем

$$I(\lambda) = O \left(\int_0^\infty (g + |g_1| + |g_2|) dt \right).$$

Элементарные оценки, основанные на неравенствах (14) и (16) и условии 2), показывают, что

$$\int_0^\infty (g + |g_1|) dt = O(\lambda^{-1/4-1/2\beta}), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Для оценки интеграла $I_1(\lambda) = \int_0^\infty |g_2| dt$ разобьем его на два интеграла

$$I_1 = \left\{ \int_0^{c_\lambda} + \int_{c_\lambda}^\infty \right\} |g_2| dt = I_{11} + I_{12}, \quad c_\lambda = \lambda^{1/2\beta},$$

и заметим, что из условий 3) и 4) следует

$$\begin{aligned} g_2 &= O(x^{-2}(x^{-\delta} + \lambda x^{-2\beta})), \quad c_\lambda^{-1}x \rightarrow \infty, \\ \delta &= \begin{cases} \min \{\varepsilon, \beta - \alpha - 2\}, & \beta > \alpha + 2, \\ \min \{\varepsilon, \sigma\}, & \beta = \alpha + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда легко следует (45). □

Три числа, которые определяют m в (45), имеют различную природу. Первое число зависит от гладкости функции p в окрестности нуля. Второе число $((\beta - \alpha - 2)/(\beta - 2))$ или $\sigma/(\beta - 2)$ обусловлено выбором эталонных решений и в этом смысле характеризует точность метода. Последнее из чисел определяется относительной малостью функции $R(x) = p(x) - x^\beta$ в окрестности бесконечности. В предельном случае, если предположить финитность функции $R(x)$, то в (46) исчезнет ε . Если дополнительно предположить финитность $V = q - x^\alpha$ в условии 4), то при $\beta = \alpha + 2$

$$g_2 = O(\lambda x^{-2-2\beta}), \quad c_\lambda^{-1}x \rightarrow \infty.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2. Пусть функции p и q имеют вид (18). Тогда

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-m}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

$$m = \begin{cases} \min \{1/4 + 1/2\beta, (\beta - \alpha - 2)/(\beta - 2)\}, & \beta > \alpha + 2, \\ 1/4 + 1/2\beta, & \beta = \alpha + 2, \end{cases}$$

3.4. Завершение доказательства теоремы 1. Из леммы 1 следует, что при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$Y(x, \lambda) = TP(I_4 + o(1))\tilde{V}_0(I_4 + o(1))D(x, \lambda), \quad (46)$$

так что индексы дефекта минимального оператора T_0 равны (2.2). Значит, оператор T самосопряжен, а уравнение для собственных чисел имеет вид

$$\det [C_2 \tilde{V}(0, \lambda) (E_4 + A_1(\lambda) \tilde{V}_0(0, \lambda) + O(I^2(\lambda))) C_1^T] = 0, \quad (47)$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $[A_1(\lambda) \tilde{V}_0 C_1^T](0, \lambda)$ имеет вид

$$(A_1(\lambda) \tilde{V}_0 C_1^T)(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

причем

$$\alpha_{42} = \frac{\pi}{\beta - 2} \int_0^\infty (g_1 \omega_{12} \omega_{21} - g_2 \omega_{11}^2) f(t, \lambda) dt + O(|\beta(\lambda)|),$$

где ω_{ij} означают элементы матрицы \tilde{V}_{02} ,

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} 1, & t \leq b_\lambda, \\ \lambda^\gamma \xi^{-(\beta-1)}(t, \lambda), & t > b_\lambda, \end{cases} \quad (49)$$

$$\beta(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{q_1' p_1 p_1'}{(p_1^2 + \lambda)^{\frac{7}{4}}} + \frac{q_1''}{(p_1^2 + \lambda)^{\frac{3}{4}}} \right) dt,$$

все остальные ненулевые элементы в (48) удовлетворяют оценке

$$\alpha_{ij} = O \left(\lambda^{-1/4} \int_0^{x_0+1} |\chi p| \exp(-\delta_0 Q_1) dt \right) + O(\lambda^{-3/4}) + O(Q_2^{-2}(0, \lambda)), \quad (i, j) \neq (4, 2). \quad (50)$$

Но

$$\beta(\lambda) = O \left(\lambda^{-\frac{3}{4} - \frac{\beta - \alpha - 1}{2\beta}} \right),$$

следовательно, уравнение (47) можно записать в виде

$$\omega_{11}(0, \lambda) + \alpha_{42}(\lambda) \omega_{12}(0, \lambda) + O(I^2(\lambda) + Q_2^{-2}(0, \lambda)) = 0. \quad (51)$$

Пусть

$$K(\lambda) = \frac{\beta(3\beta - 4) + 8c}{8(\beta - 2)^2} Q_2^{-1}(0, \lambda) + \frac{\pi}{\beta - 2} \int_0^\infty (g_1 \omega_{21} \omega_{12} - \omega_{11}^2 g_2) f(t, \lambda) dt, \quad (52)$$

где $C, f(t, \lambda), g_1, g_2$ определены соответственно по (21), (49), (43), (44). Тогда, заменяя в (52) ω_{11} и ω_{12} их асимптотиками согласно (37), получим уравнение (19). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

4.1. Параметр квантования. Из уравнения (19) следует, что

$$\Phi(\lambda_k) = \nu_k \pi + o(1), k \rightarrow \infty, \quad (53)$$

где $\nu_k = \nu_k(\alpha, \beta)$ – целое положительное число – параметр квантования. Покажем, что $\nu_k(\alpha, \beta) = k$.

Пусть $\lambda_k(\beta)$ – k -е собственное число оператора T при $p = x^\beta$, $q = 0$ и пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ – спектр задачи

$$y^{(4)} = \lambda y, 0 \leq x \leq 1, \quad (54)$$

$$y(0) = y''(0) = 0, y(1) = y'(1) = 0. \quad (55)$$

Лемма 3. При каждом фиксированном k

$$\lambda_k(\beta) \rightarrow \mu_k, \beta \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Из леммы 2 работы [12] следует, что квадратичная форма оператора T имеет вид

$$l[y] = \int_0^\infty (|y''|^2 + 2x^\beta |y'|^2) dx,$$

$$D(l) = \{y \in L^2(0, \infty) : y, y' \in AC[0, +\infty), y'' \in L^2(0, \infty), y(0) = 0\}.$$

Обозначим через $y_k(\beta) = y_k(\beta, x)$ и $z_k = z_k(x)$ k -ю нормированную собственную функцию оператора T и задачи (54) – (55) соответственно. Тогда если z_k продолжить нулем на $[1, \infty)$, то $z_k \in D(l)$ и $l[z_k] = \mu_k + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = \int_0^1 2x^\beta |f'_k|^2 dx$. Отсюда в силу вариационного принципа [13, гл. XIII, теорема XIII.3] заключаем, что

$$\lambda_k(\beta) \leq \mu_k + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (56)$$

и при каждом фиксированном k $\varepsilon_k \rightarrow +0$ при $\beta \rightarrow +\infty$. Далее, из неравенств

$$\int_1^\infty x^\beta |y'_k(\beta, x)|^2 dx \leq \mu_k + \varepsilon_k,$$

$$\int_1^\infty |y''_k(\beta, x)|^2 dx \leq \mu_k + \varepsilon_k,$$

проведя несложные выкладки, будем иметь, что при каждом фиксированном k

$$y_k(1) = o(1), y'_k(1) = o(1), \beta \rightarrow +\infty. \quad (57)$$

Но

$$\int_0^1 |y''_k(\beta, x)|^2 dx < \lambda_k(\beta),$$

откуда, учитывая (57), заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется положительное число $B(k, \varepsilon)$, такое, что при всех $\beta > B(k, \varepsilon)$ найдется функция v_k из области определения квадратичной формы (54) – (55), для которой

$$\int_0^1 |v''_k|^2 dx < \lambda_k(\beta) + \varepsilon.$$

Из последнего соотношения, снова применяя вариационный принцип, получим

$$\mu_k \leq \lambda_k(\beta) + \varepsilon, \beta > B(k, \varepsilon).$$

Отсюда и из неравенства (56) получаем утверждение леммы. □

Лемма 4. При каждом $\beta > 2$

$$\Phi(\lambda_k(\beta)) = k\pi + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Уравнение для собственных чисел задачи (54) – (55) имеет вид

$$\sin(\mu^{1/4} - \pi/4) + \exp(-2\mu^{1/4}) \cos(\mu^{1/4} - \pi/4) = 0,$$

откуда, применяя теорему Руше, получаем

$$\mu_k^{1/4} = \pi(k + 1/4) + o(1), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Но при $\beta \rightarrow \infty$ (см.(20))

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{1/4} - \frac{\pi}{4} + o(1),$$

так что в (53) $\nu_k(\beta) = k$ при достаточно больших β . Согласно теореме 1 из [12] функция $\lambda_k(\cdot)$ непрерывна на $(2, \infty)$, следовательно, функция $\nu_k(\cdot)$ также непрерывна на $(2, \infty)$, так что $\nu_k(\beta) = k$ при всех $\beta > 2$. \square

Лемма 5. Пусть $\lambda_k(\alpha, \beta)_1^\infty$ – собственные числа оператора T при $q(x) = x^\alpha$, $p = x^\beta$. Тогда

$$\Phi(\lambda_k(\alpha, \beta)) = k\pi + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как $\lambda_k(\alpha, \beta)$ непрерывна на $\Omega = \{\beta \geq 2 + \alpha, \alpha > -1\} \cup \{\beta > 2\}$ (см. теорему 1 из [12]) и член $o(1)$ в (53) является малым равномерно по любому компакт K из Ω , то $\nu_k(\alpha, \beta)$ непрерывна на Ω . Но $\nu_k(0, \beta) = k$ (лемма 15), следовательно, $\nu_k(\alpha, \beta) = k$ в Ω . \square

4.2. Завершение доказательства теоремы 2. Имеем

$$Q_2(0, \lambda) = \lambda^{1/4+1/2\beta} \int_0^\infty \left(t^\beta + \sqrt{t^{2\beta} + 1}\right)^{-1/2} dt = C_0 \lambda^{1/4+1/2\beta},$$

так что задача сводится к изучению асимптотики $K(\lambda)$. Заменяя в интеграле (52) $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}$ их асимптотиками согласно (37), произведя далее замену переменных $t \mapsto \lambda^{1/2\beta} \tau$, получим (считаем $\chi = 0$ в (43))

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= -C_1 \lambda^{-1/4} + C_2 \lambda^{-1/4-1/2\beta} + k(\lambda) + O(\lambda^{-1/2-1/2\beta}), \\ k(\lambda) &= \frac{\pi}{\beta-2} \int_0^\infty p_0^{-1} q \nu^{-1} \omega_{11}^2 f(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Из определения $\tilde{V}_0(x, \lambda)$ (см. (36)) имеем

$$k(\lambda) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} q \nu^{-1/2} Q(t, \lambda) J_\gamma^2(\sqrt{\lambda} Q) dt,$$

где

$$Q = \int_t^\infty \nu^{-1/2} dt.$$

Пусть $\beta < 2\alpha + 2$. Тогда, разбивая интеграл $k(\lambda)$ на сумму

$$k(\lambda) = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{c_\lambda} + \int_{c_\lambda}^\infty \right] \lambda^{-1/2} q \nu^{-1/2} Q J_\gamma^2(\sqrt{\lambda} Q) dt,$$

где $c_\lambda = b_\lambda \lambda^{-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{\beta-2} - \frac{1}{2\beta}$, и заменяя в первом интеграле $J_\gamma(\sqrt{\lambda} Q)$ ее асимптотикой, а во втором – q на основании условий 3) и 4) выражением $\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta-2} Q\right)^{-2\alpha/(\beta-2)}$,

получим

$$k(\lambda) = C_3 \lambda^{-(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)} + O\left(\lambda^{-1/2-(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)}\right).$$

Подставляя теперь K в уравнение (19) и разрешая его относительно λ с учетом леммы 5, получим (25). Теорема доказана.

Замечание 2. Случай $\beta \geq 2\alpha + 2$ отличается от рассмотренного лишь асимптотикой интеграла $k(\lambda)$. Легко видеть, что при $\beta > 2\alpha + 2$

$$k(\lambda) \sim \text{const} \cdot \lambda^{-1/2-(\beta-2-2\alpha)/4\beta},$$

так что член $C_3 m_k^{-1/2+2\alpha\beta/(\beta^2-4)}$ в (25) следует заменить на член вида $\text{const} \cdot m_k^{-1/2+\alpha/(\beta+2)}$. При $\beta = 2\alpha + 2$ $k(\lambda) = \text{const} \cdot \lambda^{-1/2} \ln \lambda$, что приводит к появлению в (25) члена вида $\text{const} \cdot m_k^{-2/(\beta-2)} \ln m_k$.

Теорема 3. Пусть функции p и q имеют вид (2.48), причем $\beta = \alpha + 2$. Тогда

$$\lambda_k = m_k^{\frac{4\beta}{\beta+2}} + \frac{4\beta}{\beta+2} C_0^{-1} \left\{ C_1 m_k^{\frac{5\beta-4}{2(\beta+2)}} - C_2 m_k^{\frac{2(\beta-2)}{\beta+2}} \right\} + O(k^{-m}),$$

где $m_k = C_0^{-1} \pi \left(k - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{(\beta-1)^2 + 2}}{2(\beta-2)} \right)$, постоянные C_0, C_1 определены так же, как в случае $\beta > 2 + \alpha$

$$C_2 = \frac{\beta}{8} \int_0^\infty \left[\tilde{\nu}^{1/2} \tilde{D}^{-1/2} t^{\beta-2} \left(-\frac{2\beta}{\tilde{D}} + \frac{\beta}{\tilde{D}^2} - \frac{3\beta t^\beta}{\sqrt{\tilde{D}}} + 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{3(\beta-4)\beta+8}{\beta(\beta-2)^2} \tilde{Q}^{-2} \tilde{\nu}^{-1/2} - 8t^{\beta-2} \tilde{\nu}^{-1} \right] dt - \frac{3(\beta-4)\beta+8}{(\beta-2)^2} C_0^{-1},$$

$$m = \min \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, \frac{3}{4}, \frac{2(\beta-2-\alpha)}{\beta-2} \right\} - \frac{3\beta-2}{\beta+2}.$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь

$$K(\lambda) = -C_1 \lambda^{-1/4} + C_2 \lambda^{-1/4-1/2\beta} + O\left(\lambda^{-1/2-1/\beta}\right),$$

отсюда и следует утверждение теоремы. \square

5. О ПЛОТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Пусть $H(\alpha, \theta)$ – оператор, действующий в $L^2(0, +\infty)$ по правилу

$$D(H(\alpha, \theta)) = \{y \in L^2(0, +\infty) : y, y' \in AC[0, +\infty), \\ -y'' + e^{i\theta} x^\alpha y \in L^2(0, +\infty), y(0) = 0\}, \quad (58)$$

$$H(\alpha, \theta)y = -y'' + e^{i\theta} x^\alpha y. \quad (59)$$

Здесь $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\alpha \in (0, +\infty)$ – постоянные, $AC[0, +\infty)$ – множество функций, абсолютно непрерывных на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$. Оператор $H(\alpha, \theta)$ принято называть *несамосопряженным ангармоническим осциллятором* [23].

Оператор $H(\alpha, \theta)$ был предметом исследования многих авторов (см. [20, 23–26] и имеющуюся там библиографию). Известно (см. [20, 24]), что при каждом $|\theta| < \pi$ спектр $H(\alpha, \theta)$

дискретен, все собственные числа простые (алгебраической кратности 1), лежат на луче $\arg z = 2\theta/(2 + \alpha)$:

$$\lambda_n(\alpha, \theta) = \lambda_n(\alpha, 0)e^{2\theta i/(2+\alpha)}, \quad (60)$$

$$\lambda_n(\alpha, 0) \sim \left(\frac{\pi}{\int_0^1 \sqrt{1-t^\alpha} dt} \right)^{2\alpha/(2+\alpha)} \cdot n^{2\alpha/(2+\alpha)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Как показано в [23], $\|(H(\alpha, \theta) - re^{i\beta})^{-1}\| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow +\infty$, равномерно по $\beta \in [\delta, \frac{2\theta}{2+\alpha} - \delta] \cup [\frac{2\theta}{2+\alpha} + \delta, \theta - \delta]$, $\delta > 0$. Следовательно, для каждого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется $R_\delta > 0$, что ε -псевдоспектр оператора $H(\alpha, \theta)$

$$\sigma_\varepsilon(H(\alpha, \theta)) = \sigma(H(\alpha, \theta)) \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H(\alpha, \theta)) : \|(H(\alpha, \theta) - z)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1}\}$$

целиком содержит сектора

$$\left\{ re^{i\beta} : r > R_\delta, \delta \leq \beta \leq \frac{2\theta}{2+\alpha} - \delta \right\} \text{ и } \left\{ re^{i\beta} : r > R_\delta, \frac{2\theta}{2+\alpha} + \delta \leq \beta \leq \theta - \delta \right\}.$$

Согласно известной [27] формуле

$$\sigma_\varepsilon(T) = \overline{\left\{ \bigcup_{\|V\| \leq \varepsilon} \sigma(T + V) \right\}}.$$

Это означает, что оператор $H(\alpha, \theta)$ является спектрально неустойчивым: его спектр может сильно меняться при весьма малых возмущениях [28]. При исследовании спектральных свойств возмущений таких операторов традиционными (для самосопряженного случая) методами, основанными на тауберовых теоремах (см. [9]), важна оценка для плотности так называемых сингулярных чисел – собственных чисел абсолютной величины оператора: $|H(\alpha, \theta)| = \sqrt{H(\alpha, \theta)^* H(\alpha, \theta)}$. Легко проверить, что $M := H(\alpha, \theta)^* H(\alpha, \theta)$ представляет собой самосопряженный оператор, порожденный в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $\bar{l}(ly)$ и краевыми условиями $y(0) = y''(0) = 0$, где $ly = -y'' + qy$, $\bar{l}y = -y'' + \bar{q}y$. Уравнение $My = sy$ с помощью стандартной замены $Y = (y, ly, y', (ly)')^t$ сводится к спектральной задаче

$$\begin{aligned} Y' &= AY, \\ Y_1(0) &= Y_3(0) = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & -1 & 0 & 0 \\ -s & \bar{q} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A имеют вид $\pm \sqrt{\cos \theta r \pm \sqrt{s - \sin^2 \theta r^2}}$, так что при больших $s > 0$ уравнение (62) имеет 2 точки поворота, в которых сливается одна или две пары собственных значений. Эти точки порождают дополнительные трудности при исследовании асимптотики решений уравнения (62), но они носят чисто технический характер и преодолеваются, как выше, с помощью метода эталонных уравнений. В отличие от уравнения (7), обе точки поворота уравнения (62) конечны, поэтому эталонные решения, соответствующие этим точкам, должны выражаться через функции Эйри. Не вдаваясь в подробные вычисления, отметим только, что благодаря коэрцитивной оценке

$$(My, y) \geq (1 - \delta) (\|y''\|^2 + \|ry\|^2) - C_\delta \|y\|^2,$$

где $0 < \delta = \delta(\theta) < 1$, $C_\delta > 0$, $r = x^\alpha$, можно получить нужную (см. теорему 1 из [9]) оценку

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{N(H(\alpha, \theta), \lambda)}{N(|H(\alpha, \theta)|, \lambda)} > 0.$$

Подчеркнем еще раз, что, вычисляя по аналогии с пп. 4, 5 хотя бы первый член асимптотики спектра оператора M , либо пользуясь тауберовой техникой как в работе [17], можно показать, что

$$N(|H(\alpha, \theta)|, \lambda) \sim \text{const} \cdot \lambda^{2\alpha/(2+\alpha)}, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (63)$$

В связи с этим отметим работу [29], в которой формула (63) установлена для произвольного диссипативного оператора A из класса Неймана–Шаттена \mathfrak{S}_p при $p \leq \pi/2\theta_A$, где θ_A – раствор угла, с которым совпадает область:

$$\text{Num}(A) = \{(Af, f) : f \in D(A), \|f\| = 1\}.$$

В нашем случае последнее требование отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach. *Properties of a Subclass of Avakumovic Functions and Their Generalized Inverses* // Ukr. Math. Jour. V. 54. № 2. 2002. P. 179–206.
2. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach. *On some extensions of Karamata's theory and their applications* // Publ. Inst. Math. Nouv. Ser. V. 80(94). 2006. P. 59–96.
3. J. Karamata. *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* // Mathematica (Cluj). V. 4. 1930. P. 33–53.
4. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции*. М.: Наука. 1985. 144 с.
5. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. *Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 27*. Cambridge: Cambridge University Press. 1987. 491pp.
6. T. Carleman. *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen* // Ver. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. V. 88. 1936. P. 119–132.
7. Костюченко А. Г., Саргсян И. С. *Распределение собственных значений*. М.: Наука. 1979.
8. Шкалик А. А. *Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций* // Матем. сб. Т. 123(165). № 3. 1984. С. 317–347.
9. Ишкин Х. К. Об условиях локализации спектра операторов, не близких к самосопряженным // Докл. АН. Т. 479, № 5. 2018. С. 1–4.
10. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Наука. 1969.
11. Федорюк М. В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1983.
12. Kh. Ishkin. *On continuity of the spectrum of a singular quasi-differential operator with respect to a parameter* // Eurasian Math. J. V. 2. № 3. 2011. P. 67–81.
13. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики*. Т. 4. М.: Мир. 1982.
14. Султанаев Я. Т. *Асимптотика спектра сингулярных дифференциальных операторов в неопределенном случае* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. № 3. 1975. С. 21–30.
15. Ишкин Х. К. *Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 31. № 10. 1995. С. 1658–1668.
16. Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. *Спектральная теория дифференциальных операторов. Уравнения в частных производных - 7*. Итоги науки и техники. Сер. соврем. пробл. Мат. Фунд. напр. Т. 64. М.: ВИНТИ. 1989. С. 5–242.
17. Султанаев Я. Т. *Двусторонняя Тауберова теорема для отношений* // Изв. вузов. Матем. Т. 140. № 1. 1974. С. 103–112.
18. R. E. Langer. *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to the Stokes' phenomenon* // Bull. Amer. Math. Soc. V. 40. 1934. P. 545–582.

19. Евграфов М. А., Федорюк М. В. *Асимптотика решений уравнения $w''(z) + p(z, \lambda)w(z) = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости z* // Успехи мат. наук. Т. 21, вып. 1. 1966. С. 3–50.
20. Ишкин Х. К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом* // Дифференц. уравнения. Т. 45. № 4. 2009. С. 480–495.
21. Ишкин Х. К., Муртазин Х. Х. *Асимптотика собственных чисел дифференциального оператора четвертого порядка в «вырожденном» случае* // Уфимск. матем. журн. Т. 8. № 3. 2016. С. 82–98.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 2. М.: Наука. 1974.
23. E. V. Davies. *Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators* // Bull. London Math. Soc. V. 32., № 4. 2000. P. 432–438.
24. Лидский В. Б. *Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром* // Тр. ММО. Т. 8. 1959. С. 83–120.
25. Лидский В. Б. *Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром* // Тр. ММО. Т. 9. 1960. С. 45–79.
26. E. V. Davies. *Pseudo-spectra, the harmonic oscillator and complex resonances* // Proc. R. Soc. Lond. V. 455. 1999. P. 585–599.
27. S. Roch, B. Silberman. *C^* -algebra techniques in numerical analysis* // J. Operator Theory. V. 35. 1996. P. 221–280.
28. Ишкин Х. К. *О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора* // Докл. АН. Т. 429, № 3. 2009. С. 301–304.
29. Бойматов К. Х. *Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряженных операторов* // Функц. анализ и его прил. Т. 11, № 4. 1977. С. 74–75.

Ляйсан Габдулхаевна Валиуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: 1.matem2012@yandex.ru

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62@mail.ru

Рустем Ильдарович Марванов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rsmar1v@gmail.com