ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 92-102.

УДК 517.925

РЕШЕНИЯ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИЗОМОНОДРОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМОЙ $H^{2+1+1+1}$

В.А. ПАВЛЕНКО, Б.И. СУЛЕЙМАНОВ

Аннотация. Строятся совместные решения двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{2+1+1+1}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1, 2)$ системы $H^{2+1+1+1}$. Данная система является первым представителем известной иерархии вырождений изомонодромной системы Гарнье, описанной Х. Кимурой в 1986 году. (Посредством явного преобразования данное вырождение может быть сведено к симметричной гамильтоновой системе. В построениях нашей статьи мы существенно опираемся на матричные линейные уравнения метода измонодромных деформаций для этой эквивалентной симметричной системы, выписанных в 2012 году в статье Х. Каваками, А. Накамуры и Х. Сакая.) Данные аналоги уравнений Шредингера представляют собой линейные эволюционные уравнения с временами s_1 и s_2, каждое из которых зависит от двух пространственных переменных. Из канонических временных уравнений Шредингера они получаются после формальной замены постоянной Планка на $-2\pi i$. В терминах решений соответствующих линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых является гамильтонова система $H^{2+1+1+1}$, решения данных аналогов уравнений Шредингера строятся явно. Обсуждаются перспективы построения подобных решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих гамильтонианам всей иерархии вырождений системы Гарнье.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, уравнение Шредингера, уравнения Пенлеве, метод изомонодроных деформаций.

Mathematics Subject Classification: 34M56, 35Q41

1. Введение

Наряду с шестью классическими обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) Пенлеве вида $q''_{tt} = f_j(s, q, q'_s)$ $(j = 1, \ldots, 6)$, которые интегрируемы методом изомонодромных деформаций (ИДМ) [5], [27], нарастающий интерес современных исследователей вызывают и нелинейные ОДУ более высокого порядка, также допускающие применение ИДМ.

На сегодня известен [8], [9], [21] конечный список совместных пар гамильтоновых систем ОДУ

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{q_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \tag{1}$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \tag{2}$$

$$V'_{\eta} = AV, \tag{3}$$

V.A. Pavlenko, B.I. Suleimanov, Solutions to analogues of non-stationary Schrödinger equations defined by isomonodromic Hamilton system $H^{2+1+1+1}$.

Поступила 1 августа 2018 г.

где квадратные матрицы L_{s_k} и A (матрица A одна и та же для обоих гамильтоновых систем (1)) одинаковой размерности рациональны по переменной η. Представления каждой из систем (1) в виде такого условия совместности и лежит в основе применения к ним ИДМ [27]. Соответствующие пары линейных систем (2), (3) называются матричными $L-A$ парами ИДМ, а решения ОДУ, являющихся условием совместности таких пар, – изомонодромными.

К их числу относятся и решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Х. Кимуры [10]. Представители этой иерархии допускают запись в нескольких эквивалентных формах – в том числе в форме совместных пар гамильтоновых систем (1), определяемых квадратичными по импульсам p_1, p_2 и полиномиальными по координатам q_1, q_2 различными парами гамильтонианаов $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, [9], [21], [22].

В работе [31] было показано, что для одной из полиномиальных форм самой системы Гарнье в терминах решений систем ИДМ (2), (3), выписанных в статьях [9], [21] и в разделе **3.3** статьи [31], с помощью явных замен могут быть построены решения двух совместных между собой линейных эволюционных уравнений. Эти эволюционные уравнения символически могут быть представлены в виде ($\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial s_k} = H_{s_k}(s_1, s_2, r, \rho, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial\rho})\Psi \qquad (k = 1, 2), \tag{4}$$

где правые части определятся гамильтонианами $H_{s_k} = H_{Gar,s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ той формы полиномиальной системы Гарнье, изомонодромные решения которых как раз и являются условиями совместности матричных $L-A$ пар (2), (3), выписанными в [9], [21] и разделе **3.3** [31]. Из соответствующих квантовомеханических временных уравнений Шредингера вида (4), зависящих от постоянной Планка $h = 2\pi\hbar = -2\pi i\varepsilon$, данные эволюционные уравнения получаются в результате формальной замены параметра ε на 1. Еще ранее в статье [36] решения таких совместных аналогов уравнений Шредингера с $\varepsilon = 5/54$ были построены для совместных гамильтоновых систем, которые эквивалентны последнему представителю в иерархии вырождений системы Гарнье из статьи [10] – так называемой системе $H^{9/2}$. Естественным кажется предположение о том, что подобные построения решений эволюционных уравнений вида (4) с некоторыми конкретными значениями параметра ε могут быть осуществлены и для всех представителей данной иерархии вырождений.

В настоящей статье такие решения при $\varepsilon = 1$ строятся для первого из вырождений системы Гарнье, называемого системой $H^{2+1+1+1}$. Одна из эквивалентных форм этой системы представляется парой совместных между собой гамильтоновых систем (1), определяемых гамильтонианами (γ, κ, κ_j, θ_j – произвольные постоянные)

$$\begin{aligned} s_1^2 H_{s_1} = q_1^2(q_1-s_1)p_1^2+2q_1^2q_2p_1p_2+q_1q_2(q_2-s_2)p_2^2-p_1[(\kappa_0+\theta_2-1)q_1^2+\kappa_1q_1(q_1-s_1)+\gamma s_1q_2+\gamma(q_1-s_1)]-\\ - p_2[(\kappa_1+\kappa_0-1)q_1q_2+\theta_2q_1(q_2-s_2)-\gamma(s_2-1)q_2]+\kappa q_1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} s_2(s_2-1)H_{s_2} = q_1^2q_2p_1^2+2q_1q_2(q_2-s_2)p_1p_2+\left(q_2(q_2-1)(q_2-s_2)+\frac{q_1q_2s_2(s_2-1)}{s_1}\right)p_2^2-\\ - p_1[(\kappa_1+\kappa_0-1)q_1q_2+\theta_2q_1(q_2-s_2)-\gamma(s_2-1)q_2]-\\ -p_2\left((\kappa_0-1)q_2(q_2-1)+\kappa_1q_2(q_2-s_2)+\theta_2(q_2-1)(q_2-s_2)+\tfrac{s_2(s_2-1)}{s_1}(\theta_2q_1+\gamma q_2)\right)+\kappa q_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Совместные решения пары уравнений вида (4) с $\varepsilon = 1$, предъявляемые в данной статье, соответствуют именно этой паре гамильтонианов. Данные решения явным образом будут выражены через решения матричных $L-A$ пар (2), (3) из статьи [9], условием совместности которых как раз являются гамильтоновы системы ОДУ (1) с гамильтонианами (5), (6).

Замечание 1. Для самих шести ОДУ Пенлеве в [33], [34] было показано, что в терминах решений V соответствующих пар линейных уравнений ИДМ

$$V''_{\eta\eta} = P(\eta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)V, \quad V'_\tau = B(\eta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)V'_\eta - \frac{B_\eta(\eta,\tau,\lambda,\lambda'_\tau)}{2}V,$$

выписанных Р. Гарнье в классической работе [5], явным образом могут быть построены решения шести эволюционных уравнений

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = H(\tau,\eta,\frac{\partial}{\partial\eta})\Psi.$$

Правые части этих эволюционных уравнений определяются гамильтонианами $H_j(\tau,q,p)$ гамильтоновых систем с одной степенью свободы, координаты q которых задаются решениями соответствующего уравнения Пенлеве. В последние 10 лет тема связей уравнений ИДМ с эволюционными уравнениями квантовой механики (а после работы [29] и квантовой теории поля) получила развитие во множестве других работ – см., например, [1] – [4], [6], [7], [11] – [20], [24], [25], [26], [28]– [31], [35], [37] – [39].

Замечание 2. В статье [31] было высказано мнение, что после обобщения известной [9], [10] процедуры последовательного вырождения членов иерархии системы Гарнье на квантовый уровень, из результатов [31] автоматически могут быть получены совместные решения пар уравнений вида (4) для всех представителей этой иерархии. Однако, как уже отмечалось в [32], на этом пути имеются трудности, связанные с тем, что для части из последовательных вырождений, приведенных в [9], [10], задействуются комбинации координат и импульсов.

2. Различные формы системы $H^{2+1+1+1}$ и уравнения ИДМ для этой системы

2.1. Система $H^{2+1+1+1}$ в статье [10] выписана в двух формах – в приведенной выше форме двух совместных гамильтоновых систем (1) с полиномиальными гамильтонианами (5), (6) и в форме совместных гамильтоновых систем

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\tau_j} = \frac{\partial K_j}{\partial\mu_k}, \quad \frac{\partial\mu_k}{\partial\tau_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial\lambda_k} \quad (j,k=1,2), \tag{7}$$

где гамильтонианы $K_i(\tau_1,\tau_2,\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)$ задаются формулами

$$K_1 = \frac{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}{\tau_1(\tau_2-1)(\lambda_2-\lambda_1)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\lambda_k(\lambda_k-1)(\lambda_k-\tau_2)[\mu_k^2-(\frac{\kappa_0}{\lambda_k}-\frac{\gamma\tau_1}{(\lambda_k-1)^2}+\frac{\kappa_1-1}{\lambda_k-1}+\frac{\theta_2}{\lambda_k-\tau_2})\mu_k+ \\ +\frac{\kappa}{\lambda_k(\lambda_k-1)}], \tag{8}$$

$$K_2 = \frac{(\lambda_1-\tau_2)(\lambda_2-\tau_2)}{\tau_2(\tau_2-1)^2(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\lambda_k(\lambda_k-1)^2[\mu_k^2-(\frac{\kappa_0}{\lambda_k}-\frac{\gamma\tau_1}{(\lambda_k-1)^2}+\frac{\kappa_1}{\lambda_k-1}+\frac{\theta_2-1}{\lambda_k-\tau_2})\mu_k+ \\ +\frac{\kappa}{\lambda_k(\lambda_k-1)}]. \tag{9}$$

(В статье [10] имеется опечатка: гамильтониан K_2 выписан там с противоположным знаком.) Эти две пары гамильтоновых систем связаны [10] друг с другом симплектическим преобразованием

$$q_1 = -\frac{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}{\tau_1(\tau_2-1)}, \quad q_2 = \frac{(\lambda_1-\tau_2)(\lambda_2-\tau_2)}{\tau_2(\tau_2-1)^2}, \qquad s_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = \frac{\tau_2}{\tau_2-1}. \tag{10}$$

Позднее Ю. Сасано в статье [22] указал бирациональное симплектическое преобразование

$$P_1 = \frac{1}{q_1}, \quad P_2 = -\frac{q_2}{q_1}, \quad Q_1 = q_1(p_1q_1 + p_2q_2 - \nu), \quad Q_2 = p_2q_1, \quad t_1 = \frac{1}{s_1}, \quad t_2 = \frac{s_2}{s_1}, \tag{11}$$

где

$$\nu = -\frac{\kappa_0 + \kappa_1 + \theta_2 + \alpha - 1}{2}, \qquad \nu(\nu + \alpha) = \kappa,$$

которое пару гамильтоновых систем (1), (5), (6) сводит к паре совместных гамильтоновых систем

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t_j} = \frac{\partial H_{t_j}}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial H_{t_j}}{\partial Q_k} \quad (j, k = 1, 2) \tag{12}$$

с другими полиномиальными гамильтонианами H_{t_j}. При условии отличия от нуля постоянной γ за счет возможности осуществления растяжений

$$P_i \to \gamma P_i, \quad Q_i \to \frac{Q_i}{\gamma}, \quad t_i \to \gamma t_i$$

во всех вышеприведенных формулах без ограничения общности можно считать, что

$$\gamma = 1.$$

При таком значении γ гамильтонианы H_{t_j} задаются формулами

$$t_1H_{t_1} = Q_1(Q_1-1)^2P_1^2+t_1Q_1P_1+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)P_1-(\theta^0+\theta_2^\infty)(Q_1-1)P_1-\theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1)+$$
$$+ P_2Q_2(Q_1 - 1)(P_1Q_1 - P_1 - \theta^1) - \frac{t_1}{t_1 - t_2}(P_1(Q_1 - Q_2) - \theta^1)(P_2(Q_1 - Q_2) + \theta^t), \tag{13}$$

$$t_2H_{t_2} = Q_2(Q_2-1)^2P_2^2+t_2Q_2P_2+(\theta_2^\infty-\theta^t)Q_2(Q_2-1)P_2-(\theta^0+\theta_2^\infty)(Q_2-1)P_2-\theta^t\theta_2^\infty(Q_2-1)+$$
$$+ P_1Q_1(Q_2 - 1)(P_2Q_2 - P_2 - \theta^t) + \frac{t_2}{t_1 - t_2}(P_1(Q_1 - Q_2) - \theta^1)(P_2(Q_1 - Q_2) + \theta^t), \tag{14}$$

где постоянные θ^0, θ^1, θ^t, θ_1^∞, θ_2^∞ удовлетворяют так называемому соотношению Фукса-Хукухары

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta^t + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty = 0.$$

Данные гамильтонианы получаются друг из друга заменами $t_1 \leftrightarrow t_2$, $Q_1 \leftrightarrow Q_2$, $P_1 \leftrightarrow P_2$, $\theta^1 \leftrightarrow \theta^t$.

2.2. На решениях уравнений (12) с гамильтонианми (13),(14) совместна [9] система линейных ОДУ

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \left(\frac{A_0}{\eta} + \frac{A_1}{\eta-1} + \frac{A_t}{\eta-\frac{t_2}{t_1}} + A_\infty\right)Y = AY, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_1} = \left(E_2\eta + B_1 + \frac{\frac{t_2}{t_1^2}A_t}{\eta-\frac{t_2}{t_1}}\right)Y = UY, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\frac{\frac{1}{t_1}A_t}{\eta-\frac{t_2}{t_1}}Y = VY \end{cases} \tag{15}$$

с коэффициентами

$$A_0 = \begin{pmatrix} P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_0 + \theta_2^\infty & -u(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_2^\infty) \\ \frac{1}{u}(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_0 + \theta_2^\infty) & -P_1Q_1 - P_2Q_2 - \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \theta^1 - P_1Q_1 & uP_1 \\ \frac{Q_1}{u}(\theta^1 - P_1Q_1) & P_1Q_1 \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} \theta^t - P_2Q_2 & uP_2 \\ \frac{Q_2}{u}(\theta^t - P_2Q_2) & P_2Q_2 \end{pmatrix},$$

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 0 & (A_0 + A_1 + A_t)_{12} \\ (A_0 + A_1 + A_t)_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

зависящими также от совместного решения линейных ОДУ следующих линейных ОДУ:

$$u'_{t_1} = \frac{u}{t_1}(P_1(Q_1-1)^2 - \theta^1(Q_1-1) + \theta_1^\infty - \theta_2^\infty), \quad u'_{t_2} = \frac{u}{t_2}(P_2(Q_2-1)^2 - \theta^t(Q_2-1)).$$

Легко видеть, что замена

$$Z = \exp((\eta t_1 + \theta^0 \ln \eta + \theta^1 \ln(\eta - 1) + \theta^t \ln(\eta t_1 - t_2) - \theta^t \ln t_1)/2)Y,$$

совместные системы ИДМ (15) переводит в эквивалентные им совместные системы

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left(\frac{\hat{A}_0}{\eta} + \frac{\hat{A}_1}{\eta-1} + \frac{\hat{A}_t}{\eta - \frac{t_2}{t_1}} + \hat{A}_\infty\right)Y = \hat{A}Z, \\ \frac{\partial Z}{\partial t_1} = \left(\hat{E}_2\eta + B_1 + \frac{\frac{t_2}{t_1^2}\hat{A}_t}{\eta - \frac{t_2}{t_1}}\right)Y = \hat{U}Y, \\ \frac{\partial Z}{\partial t_2} = -\frac{\frac{1}{t_1}\hat{A}_t}{\eta - \frac{t_2}{t_1}}Y = \hat{V}Y, \end{cases} \tag{16}$$

с матрицами – коэффициентами

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} P_1Q_1 + P_2Q_2 + \frac{\theta^0}{2} + \theta_2^\infty & -u(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta_2^\infty) \\ \frac{1}{u}(P_1Q_1 + P_2Q_2 + \theta^0 + \theta_2^\infty) & -P_1Q_1 - P_2Q_2 - \frac{\theta^0}{2} - \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\theta^1}{2} - P_1Q_1 & uP_1 \\ \frac{\lambda_1}{u}(\theta^1 - P_1Q_1) & P_1Q_1 - \frac{\theta^1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_t = \begin{pmatrix} \frac{\theta^t}{2} - P_2Q_2 & uP_2 \\ \frac{Q_2}{u}(\theta^t - P_2Q_2) & P_2Q_2 - \frac{\theta^t}{2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_\infty = \begin{pmatrix} -\frac{t_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t_1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

имеющими нулевой след. Именно эта матричная форма уравнений ИДМ для системы $H^{2+1+1+1}$ будет использована в этой статье для построения решений соответствующих эволюционных уравнений вида (4).

3. Построение решений аналогов временных уравнения Шредингера

3.1. Прежде всего по совместному фундаментальному решению Z линейных систем ОДУ (16) образуем 2×2 матрицу

$$M = Z^{-1}(t_1, t_2, \zeta)Z(t_1, t_2, \eta). \tag{17}$$

Данная матрица удовлетворяет сразу двум скалярных пространственно двумерным эволюционным уравнениям: уравнению с временной переменной t_1

$$M'_{t_1} = \frac{\eta(\eta-1)(\zeta-1)(\eta t_1 - t_2)}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)}M''_{\eta\eta} - \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1 - t_2)(\eta-1)}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)}M''_{\zeta\zeta} + \\ + \frac{b(t_1,t_2,\zeta,\eta)M'_\eta + c(t_1,t_2,\zeta,\eta)M'_\zeta}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)} + g_1(t_1,t_2,\zeta,\eta,u,P_1,P_2,Q_1,Q_2)M, \tag{18}$$

в котором функции b, c и g_1 имеют следующий вид

$$b(\zeta-\eta) = \eta t_1(\eta^2 - \zeta^2 - 4\zeta\eta + 2\zeta^2\eta + 2\zeta) - t_2(\eta^3 + 2\zeta^2\eta - \zeta\eta^2 - \zeta^2 - \eta^2 + \zeta + \eta - 2\zeta\eta),$$

$$c(\zeta-\eta) = \zeta t_1(\zeta^2 - \eta^2 - 4\zeta\eta + 2\zeta\eta^2 + 2\eta) - t_2(\zeta^3 + 2\zeta\eta^2 - \zeta^2\eta - \zeta^2 - \eta^2 + \zeta + \eta - 2\zeta\eta),$$

$$g_1=\frac{(\theta^0)^2t_2(\zeta-1)(\eta-1)}{4\zeta\eta t_1(t_1-t_2)}+\frac{(\theta^1)^2(\zeta\eta t_2-2\zeta\eta t_1+t_1(\zeta+\eta)-t_2)}{4(\zeta-1)(\eta-1)t_1(t_1-t_2)}-\frac{(\theta^t)^2(\zeta-1)(\eta-1)t_1t_2}{4(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)(t_1-t_2)}+$$
$$+\frac{t_1(\zeta-1)(\eta-1)(t_1(\zeta+\eta)-t_2)}{4(t_1-t_2)}-\frac{t_1(\theta^0+\theta^t+2\theta^\infty_2)(\zeta-1)(\eta-1)}{2(t_1-t_2)}+\frac{\theta^1((\zeta+\eta-\zeta\eta)t_1-t_2)}{2(t_1-t_2)}-$$
$$-\frac{2(\hat A_0)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_0)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_0)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_1}-\frac{2(\hat A_t)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_t)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_t)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_1-t_2}-P_1Q_1,$$

и уравнению с временной переменной t_2

$$M'_{t_2}=\frac{\eta(\eta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)}M''_{\eta\eta}-\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)}M''_{\zeta\zeta}+$$
$$+\frac{(2\zeta\eta-\zeta-\eta)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)^2}(M'_\zeta+M'_\eta)+g_2(t_1,t_2,\zeta,\eta,u,P_i,Q_i)M \quad (19)$$

с коэффициентом

$$g_2=\frac{(\theta^0)^2(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4\zeta\eta(t_2-t_1)t_1t_2}-\frac{(\theta^1)^2(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4(\zeta-1)(\eta-1)(t_2-t_1)t_1t_2}+\frac{(\theta^t)^2(t_1^2\zeta\eta-2t_1t_2\zeta\eta+t_2^2(\zeta+\eta-1))t_1}{4(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)t_2(t_2-t_1)}+$$
$$+\frac{t_1(\zeta+\eta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4t_2(t_2-t_1)}-\frac{(\theta^0+\theta^1+2\theta^\infty_2)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{2t_2(t_2-t_1)}+\frac{\theta^t t_1(t_2(\zeta+\eta-1)-t_1\zeta\eta)}{2t_2(t_2-t_1)}-$$
$$-\frac{2(\hat A_0)_{11}(\hat A_t)_{11}+(\hat A_0)_{12}(\hat A_t)_{21}+(\hat A_0)_{21}(\hat A_t)_{12}}{t_2}-\frac{2(\hat A_t)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_t)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_t)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_2-t_1}-P_2Q_2.$$

3.2. Далее осуществим замену

$$W=e^{S(t_1,t_2)}M,$$

где функция S удовлетворяет двум непротиворечивым равенствам

$$S'_{t_1}=\frac{2(\hat A_0)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_0)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_0)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_1}+\frac{2(\hat A_t)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_t)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_t)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_1-t_2}+$$
$$+P_1Q_1,$$

$$S'_{t_2}=\frac{2(\hat A_0)_{11}(\hat A_t)_{11}+(\hat A_0)_{12}(\hat A_t)_{21}+(\hat A_0)_{21}(\hat A_t)_{12}}{t_2}+\frac{2(\hat A_t)_{11}(\hat A_1)_{11}+(\hat A_t)_{12}(\hat A_1)_{21}+(\hat A_t)_{21}(\hat A_1)_{12}}{t_2-t_1}+$$
$$+P_2Q_2.$$

Эта замена связывает решения уравнения (18), (19) с решениями эволюционных уравнений

$$W'_{t_1}=\frac{\eta(\eta-1)(\zeta-1)(\eta t_1-t_2)}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)}W''_{\eta\eta}-\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta-1)}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)}W''_{\zeta\zeta}+$$
$$+\frac{b(t_1,t_2,\zeta,\eta)W'_\eta+c(t_1,t_2,\zeta,\eta)W'_\zeta}{t_1(t_1-t_2)(\zeta-\eta)}+g_3(t_1,t_2,\zeta,\eta)W, \quad (20)$$

$$W'_{t_2}=\frac{\eta(\eta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)}W''_{\eta\eta}-\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)}W''_{\zeta\zeta}+$$
$$+\frac{(2\zeta\eta-\zeta-\eta)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{t_1t_2(t_2-t_1)(\zeta-\eta)^2}(W'_\zeta+W'_\eta)+g_4(t_1,t_2,\zeta,\eta)W, \quad (21)$$

которые зависят от функций

$$g_3=\frac{(\theta^0)^2t_2(\zeta-1)(\eta-1)}{4\zeta\eta t_1(t_1-t_2)}+\frac{(\theta^1)^2(\zeta\eta t_2-2\zeta\eta t_1+t_1(\zeta+\eta)-t_2)}{4(\zeta-1)(\eta-1)t_1(t_1-t_2)}-\frac{(\theta^t)^2(\zeta-1)(\eta-1)t_1t_2}{4(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)(t_1-t_2)}+$$
$$+\frac{t_1(\zeta-1)(\eta-1)(t_1(\zeta+\eta)-t_2)}{4(t_1-t_2)}-\frac{t_1(\theta^0+\theta^t+2\theta_2^\infty)(\zeta-1)(\eta-1)}{2(t_1-t_2)}+\frac{\theta^1((\zeta+\eta-\zeta\eta)t_1-t_2)}{2(t_1-t_2)},$$

$$g_4=\frac{(\theta^0)^2(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4\zeta\eta(t_2-t_1)t_1t_2}-\frac{(\theta^1)^2(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4(\zeta-1)(\eta-1)(t_2-t_1)t_1t_2}+\frac{(\theta^t)^2(t_1^2\zeta\eta-2t_1t_2\zeta\eta+t_2^2(\zeta+\eta-1))t_1}{4(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)t_2(t_2-t_1)}+$$
$$+\frac{t_1(\zeta+\eta-1)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{4t_2(t_2-t_1)}-\frac{(\theta^0+\theta^1+2\theta_2^\infty)(\zeta t_1-t_2)(\eta t_1-t_2)}{2t_2(t_2-t_1)}+\frac{\theta^t t_1(t_2(\zeta+\eta-1)-t_1\zeta\eta)}{2t_2(t_2-t_1)}.$$

Последняя пара уравнений уже не содержит зависимости от Q_i и P_i.

3.3. Переход в уравнениях (20), (21) к независимым переменным

$$\tau_1=t_1,\quad \tau_2=\frac{t_2}{t_2-t_1},\quad x=\frac{\zeta}{\zeta-1},\quad y=\frac{\eta}{\eta-1}$$

и последующая замена (c_i – постоянные)

$$W=(y-x)((x-1)(y-1))^{c_1}(xy)^{c_2}((x-\tau_2)(y-\tau_2))^{c_3}(\tau_2)^{c_3(2c_2+1)}(\tau_2-1)^{2c_3(c_1+c_3)}e^{f(\tau_1,\tau_2,x,y)}\Psi,$$

где

$$f(\tau_1,\tau_2,x,y)=\frac{\tau_1}{2(x-1)}+\frac{\tau_1}{2(y-1)}+\frac{\theta^1+\theta^t-2(c_1+c_2)\tau_1\tau_2}{2(\tau_2-1)}+\frac{(c_1+c_2+c_3)\tau_1}{\tau_2-1}+$$
$$+\frac{(c_1^2-c_2^2-c_3^2-(\theta^1)^2/4)\tau_2\ln\tau_1}{\tau_2-1}+\frac{(-c_1^2+c_3^2+(\theta^0)^2/4+(\theta^1)^2/4)\ln\tau_1}{\tau_2-1},$$

переводят их в пару уравнений

$$\tau_1(\tau_2-1)\Psi'_{\tau_1}=\frac{y(y-1)^2(x-1)(y-\tau_2)}{y-x}\left(\Psi''_{yy}+\Psi'_y\left(\frac{2c_1+1}{y-1}+\frac{2c_2+1}{y}+\frac{2c_3+1}{y-\tau_2}-\frac{\tau_1}{(y-1)^2}\right)\right)-$$
$$-\frac{x(x-1)^2(y-1)(x-\tau_2)}{y-x}\left(\Psi''_{xx}+\Psi'_x\left(\frac{2c_1+1}{x-1}+\frac{2c_2+1}{x}+\frac{2c_3+1}{x-\tau_2}-\frac{\tau_1}{(x-1)^2}\right)\right)+$$
$$+g_5(\tau_1,\tau_2,x,y)\Psi,\quad (22)$$

$$\tau_2(\tau_2-1)^2\Psi'_{\tau_2}=\frac{x(x-1)^2(y-\tau_2)(x-\tau_2)}{y-x}\left(\Psi''_{xx}+\Psi'_x\left(\frac{2c_1+2}{x-1}+\frac{2c_2+1}{x}+\frac{2c_3}{x-\tau_2}-\frac{\tau_1}{(x-1)^2}\right)\right)-$$
$$-\frac{y(y-1)^2(x-\tau_2)(y-\tau_2)}{y-x}\left(\Psi''_{yy}+\Psi'_y\left(\frac{2c_1+2}{y-1}+\frac{2c_2+1}{y}+\frac{2c_3}{y-\tau_2}-\frac{\tau_1}{(y-1)^2}\right)\right)+$$
$$+g_6(\tau_1,\tau_2,x,y)\Psi.\quad (23)$$

Здесь функции g_5 и g_6 имеют вид

$$g_5=((c_1+c_2+c_3+1)^2-(\theta^1)^2/4)(x-1)(y-1)+\frac{(c_2^2-(\theta^0)^2/4)\tau_2(x+y-1)}{4xy}+$$
$$+\frac{(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty-2c_1)\tau_1(\tau_2(x+y)-xy-2\tau_2+1)}{2(x-1)(y-1)}+\frac{(\frac{(\theta^t)^2}{4}-c_3^2)(\tau_2-1)^2(xy-\tau_2)}{(x-\tau_2)(y-\tau_2)},$$

$$g_6 = \frac{(\gamma^2-1)(\tau_1^2(xy-1)(x-\tau_2)(y-\tau_2))}{4(x-1)^2(y-1)^2} - ((c_1+c_2+c_3+1)^2 - (\theta^1)^2/4)(x-\tau_2)(y-\tau_2) + \\ + \frac{(\theta_2^\infty - \theta_1^\infty - 2\gamma c_1)\tau_1(x-\tau_2)(y-\tau_2)}{2(x-1)(y-1)} + \frac{((\theta^0)^2/4 - c_2^2)\tau_2(x+y-\tau_2)}{xy} + \\ + c_2^2 - (\theta^0)^2/4 + \frac{(c_3^2 - (\theta^t)^2/4)(\tau_2-1)^2(xy-\tau_2^2)}{(x-\tau_2)(y-\tau_2)}.$$

Полагая теперь

$$c_2 = \frac{\theta^0}{2}, \quad 2c_1 = \theta_2^\infty - \theta_1^\infty, \quad c_3 = \frac{\theta^t}{2}, \quad \kappa = (c_1+c_2+1)^2, \\ c_1 = \frac{\kappa_1 - 2}{2}, \quad c_2 = \frac{\kappa_0 - 1}{2}, \quad c_3 = \frac{\theta_2 - 1}{2},$$

получаем, что пару эволюционных уравнений (22), (23) за счет справедливости соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial y}y - y\frac{\partial}{\partial y} = 1$$

символически можно записать в виде следующих аналогов временных уравнений Шредингера ($\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial\tau_j} = K_{\tau_j}(\tau_1, \tau_2, x, y, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial y})\Psi \qquad (j = 1, 2), \tag{24}$$

определяемых гамильтонианами (8), (9) гамильтоновой системы (7).

3.4. Если в этой паре эволюционных уравнений осуществить замены

$$r = -\frac{(x-1)(y-1)}{\tau_1(\tau_2-1)}, \quad \rho = \frac{(x-\tau_2)(y-\tau_2)}{(\tau_2-1)^2}, \tag{25}$$

представляющие собой квантовые аналоги двух первых частей симпликтического преобразования (10), и от времен τ_j – согласно тому же преобразованию (10) – перейти к временам s_j, то данные аналоги уравнений Шредингера перейдут в уравнения

$$s_1^2\Psi'_{s_1} = r^2(r-s_1)\Psi''_{rr} + 2r^2\rho\Psi''_{r\rho} + r\rho(\rho-s_2)\Psi''_{\rho\rho} + \Psi'_r[(\kappa_0+\theta_2-1)r^2 + \kappa_1 r(r-s_1) + s_1\rho + (r-s_1)] + \\ + \Psi'_\rho[(\kappa_1+\kappa_0-1)r\rho + \theta_2 r(\rho-s_2) - (s_2-1)\rho] + \kappa r\Psi,$$

$$s_2(s_2-1)\Psi'_{s_2} = r^2\rho\Psi''_{rr} + 2r\rho(\rho-s_2)\Psi''_{r\rho} + \left(\rho(\rho-1)(\rho-s_2) + \frac{r\rho s_2(s_2-1)}{s_1}\right)\Psi''_{\rho\rho} + \\ + \Psi'_r[(\kappa_1+\kappa_0-1)r\rho + \theta_2 r(\rho-s_2) - (s_2-1)\rho] + \\ + \Psi'_\rho\left((\kappa_0-1)\rho(\rho-1) + \kappa_1\rho(\rho-s_2) + \theta_2(\rho-1)(\rho-s_2) + \frac{s_2(s_2-1)}{s_1}(\theta_2 r + \rho)\right) + \kappa\rho\Psi.$$

Эта же пара уравнений за счет справедливости операторных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial r}r - r\frac{\partial}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\rho - \rho\frac{\partial}{\partial \rho} = 1$$

символически может быть записана в виде аналогов временных уравнений Шредингера (4) с $\varepsilon = 1$, определяемых полиномиальными гамильтонианами (5) и (6).

4. Выводы

Построенные решения уравнений аналогов временных уравнений Шредингера (4) и (24) выражены через решения Z матричных $L-A$ пар ИДМ (16), явным образом зависящих от решений нелинейных гамильтоновых систем ОДУ(12) с гамильтонианами (13),(14). Посредством известных симпликтических преобразований (10) и (11) решения этих гамильтоновых систем могут быть выражены как через решения гамильтоновых систем (1) с полиномиальными гамильтонианами (5), (6), так и через решения гамильтоновых систем (7) с гамильтонианами (8), (9). Таким образом, описанные решения этих аналогов уравнений Шредингера двойственным образом связаны с соответствующими классическими гамильтоновыми системами.

Но надо подчеркнуть, что вопрос о подобных аналогах уравнений Шредингера, соответсвующих гамильтоновых систем, которые представлены различными формами системы $H^{2+1+1+1}$, результаты данной статьи окончательно не закрывают. В частности, авторам не удалось построить решения каких-либо аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих гамильтонианам (13),(14). То же самое касается серии других эквивалентных им гамильтановых систем, описанных в статье [22].

В построениях данной статьи очень важную роль сыграла замена (17). Такая же замена ранее с успехом была применена в статьях [31], [32] и [36], в которых строились решения аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами самой системы Гарнье, а также некоторых из других ее вырождений. (Еще раньше в других целях эта замена использовалась Д.П. Новиковым [29]. Сам Д. П. Новиков обращает внимание на сходство данной замены с формулой (2.3.36) в [23]). Тем самым, для случая системы $H^{2+1+1+1}$ показана оправданность предположения статьи [32] о том, что эта замена должна помочь и при построении аналогов временных уравнений Шредингера, которые определяются гамильтонианами всех вырождений системы Гарнье.

Помимо такой замены полезно также иметь ввиду возможность осуществления замен, которые являются квантовыми аналогами известных классических преобразований. Такая замена, например, оказалась весьма полезной в конструкциях [31] (см. в [31] формулы (46) и (56)). В настоящей работе подобную замену-аналог описывает формула (25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bloemendal, B. Virag *Limits of spiked random matrices I* // Probability Theory and Related Fields. 2013. V. 156 No. 3–4. P. 795–825.
2. A. Bloemendal, B. Virag *Limits of spiked random matrices II* // arXiv:1109.3704. 2011. / Ann. Probab. 2016.44:4, 2726–2769.
3. R. Conte *Generalized Bonnet surfaces and Lax pairs of PVI* // J. Math. Phys. 2017. V. 58. No. 10. 103508. 31 PP.
4. R. Conte, I. Dornic *The master Painlevé VI heat equation* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. V. 352. No. 10. P. 803–806.
5. R. Garnier *Sur des equations differentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Ann. Sci. Ecole Normale Sup (3). 1912. V. 29. P. 1–126.
6. T. Grava, A Its., A. Kapaev, F. Mezzadri *On the Tracy–Widom$_\beta$ Distribution for $\beta = 6$* // SIGMA. 2016. V. 12. 105. 26 PP.
7. A.M. Grundland, D. Riglioni *Classical-quantum correspondence for shape-invariant systems* // J. Phys. A. 2015. V. 48. No. 24. P. 245201–245215.
8. H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *Toward a classification of 4-dimensional Painleve-type equations* // //in "Algebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices", Proc. AMS special session, Boston, 2012. Contemp. Math. **593**. Amer. Math. Soc. Providence, RI. 143– 162 (2013).

9. H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai *Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations* // arXiv:1209.3836 (2012).
10. H. Kimura *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure* // Annali di Matematica pura et applicata IV. 1989. V. 155. No. 1. P. 25–74.
11. A.M. Levin, M.A. Olshanetsky, A.V. Zotov *Planck Constant as Spectral Parameter in Integrable Systems and KZB Equations* //Journal of High Energy Physics. 2014. V. 2014. 109. (29 PP). DOI: 10.1007/JHEP10(2014)109.
12. H. Nagoya *Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations* // J. Math. Phys. 2011. V. 52. No. 8. 16 PP.
13. H. Nagoya, Y. Yamada *Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations* // Annales Henri Poincare. 2014. V. 15. No. 3. P. 313–344.
14. D.P. Novikov *A monodromy problem and some functions connected with Painlevé 6* // Intrenational Conference "Painleve equations and Related Topics". Proceedings of International Conference. St.-Petrsburg, Euler International Mathematical Institute. 2011. P. 118–121.
15. H. Rosengren *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model. II. Schrödinger equation*// arXiv:1312.5879, (2013).
16. H. Rosengren *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model: a summary* Commun. Math. Phys. 2015. V. 349. No. 3. P. 1143–1170.
17. I. Rumanov *Hard edge for beta-ensembles and Painleve III* // Int. Math. Res. Not. 2014. No. 23. P. 6576–6617.
18. I. Rumanov *Classical integrability for beta-ensembles and general Fokker-Planck equations* // J. Math. Phys. 2015. V. 56. No. 1. 16 PP.
19. I. Rumanov *Beta ensembles, quantum Painlevé equations and isomonodromy systems* // in "Algebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices", Proc. AMS special session, Boston, 2012. Contemp. Math. **593** . Amer. Math. Soc. Providence, RI. 125–155 (2013).
20. I. Rumanov *Painlevé representation of Tracy-Widom$_\beta$ distribution for $\beta = 6$* // Comm. Math. Phys. 2016. V. 342. No. 3. P. 843–868.
21. H. Sakai, "Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painleve-type equations" , preprint, University of Tokyo, Mathematical Scinces, Tokyo, (2010).
22. Y. Sasano, *Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenarate system in two variables* // arXiv:0706.0799v.5 (2011).
23. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo *Holonomic quantum fields* // Publ. Rims Kyoto Uiv. 1979. V. 15. No. 17. P. 201–278.
24. A. Zabrodin, A. Zotov *Quantum Painlevé-Calogero correspondence* // J. Math. Phys. 2012. V. 53. No. 7. 073507. 19 PP.
25. A. Zabrodin, A. Zotov *Classical-quantum correspondence and functional relations for Painlevé equations* // Constr. Approx. 2015. V. 41. No. 3. P. 385–423.
26. Зотов А.В., Смирнов А.В. *Модификация расслоений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи* // ТМФ. 2013. Т. 177. № 1. С. 3–67.
27. Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С. *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана* Москва–ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая линамика», 2005, 728 с.
28. Левин А.М., Ольшанецкий М.А., Зотов А.В. *Классификация изомонодромных задач на эллиптических кривых* // УМН. 2014. Т.69. Вып. 1(415). С. 39–124.
29. Новиков Д.П. *О системе Шлезингера с матрицами размера* 2×2 *и уравнении Белавина – Полякова – Замолодчикова* // ТМФ. 2009. Т. 161. № 2. С. 191–203.
30. Новиков Д.П., Романовский Р.К., Садовничук С.Г. *Некоторые новые методы конечнозонного интегрирования солитонных уравнений* Новосибирск: Наука, 2013, 251 с.
31. Новиков Д.П., Сулейманов Б.И. *"Квантования" изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы* // ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.
32. Павленко В.А., Сулейманов Б.И. *«Квантования» изомонодромных гамильтоновых систем* $H^{\frac{7}{2}+1}$. Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 4. С. 100–110.

33. Сулейманов Б.И. *Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, Инт мат. 1988. С. 93–102.
34. Сулейманов Б.И. *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций* // Дифф. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
35. Сулейманов Б.И. *"Квантования" второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его* L, A *пар* // Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. № 3. С. 364–378.
36. Сулейманов Б.И. *"Квантования" высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы* //Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. Вып. 3. С. 52–62.
37. Сулейманов Б.И. *Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория* // Тезисы международной конференции, посвященной памяти И.Г.Петровского «23-е совместное заседание Московского математического общества и семинара имени И.Г.Петровского», Москва, 2011. С. 356–357.
38. Сулейманов Б.И. *"Квантовая" линеаризация уравнений Пенлеве как компонента их* $L - A$ *пар* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 2. С. 127–135.
39. Сулейманов Б.И. *Квантовые аспекты интегрируемости третьего уравнения Пенлеве и решения временного уравнения Шредингера с потенциалом Морса* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 3. С. 141–159.

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВО БГАУ,
ул. 50-летия Октября, 34,
450001, г. Уфа, Россия
E-mail: PVA100186@mail.ru

Булат Ирекович Сулейманов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: bisul@mail.ru