ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 85-91.

УДК 517.555

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ НА ПРОСТРАНСТВЕ ФОКОВСКОГО ТИПА

И.Х. МУСИН

Аннотация. При помощи зависящей от модулей переменных полунепрерывной снизу в $\mathbb{R}^n$ функции φ, растущей на бесконечности быстрее $a\ln(1+\|x\|)$ для любого положительного a, определено гильбертово пространство F^2_φ целых функций в $\mathbb{C}^n$. Оно представляет собой естественное обобщение классического пространства Фока. В заметке приведено альтернативное описание пространства F^2_φ в терминах коэффициентов степенных разложений целых функций, составляющих его. Отмечены простейшие свойства воспроизводящих ядер в пространстве F^2_φ. Для оператора ортогонального проектирования из пространства L^2_φ измеримых комплекснозначных функций f в $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty,$$

где для $z=(z_1,\ldots,z_n)$ $abs\, z = (|z_1|,\ldots,|z_1|)$, на его замкнутое подпространство F^2_φ получено интегральное представление. Также получена интегральная формула для следа положительного линейного непрерывного оператора на пространстве F^2_φ. С её помощью найдены условия, при которых весовой оператор композиции на F^2_φ является оператором Гильберта-Шмидта. Последние два результата обобщают соответствующие результаты Сей-Ичиро Уеки (Sei-Ichiro Ueki), изучавшего подобные вопросы для операторов в пространстве Фока.

Ключевые слова: целые функции, пространство типа Фока, линейные операторы, след оператора, весовые операторы композиции, оператор Гильберта-Шмидта.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E22, 47B33

1. Введение

1.1. О рассматриваемых задачах. Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, наделённое топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $abs\, u = (|u_1|,\ldots,|u_n|)$ для $u=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$.

Обозначим через $V(\mathbb{R}^n)$ множество полунепрерывных снизу функций $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

i_1). $v(x)=v(abs\, x),\ x\in\mathbb{R}^n$;

i_2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{v(x)}{\ln(1+\|x\|)} = +\infty$;

i_3). сужение v на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

Для $\varphi\in V(\mathbb{R}^n)$ через L^2_φ обозначим пространство измеримых функций $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ таких, что

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty.$$

Со скалярным произведением $(f,g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)}e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z),\ f,g\in L^2_\varphi$, L^2_φ – гильбертово пространство.

I.Kh. Musin, On some linear operators on Fock type space.

Поступила 24 августа 2018 г.

Пусть $F^2_\varphi = L^2_\varphi \cap H(\mathbb{C}^n)$. Нетрудно показать, что F^2_φ – замкнутое подпространство пространства L^2_φ. Кроме того, в силу условия $i_2)$ полиномы принадлежат F^2_φ.

Определение пространства F^2_φ – естественного обобщения пространства Фока – приводит к рассмотрению ряда задач, относящихся как к теории функций, так и к теории операторов. В данной заметке мы приводим альтернативное описание пространства F^2_φ и ограничиваемся рассмотрением оператора ортогонального проектирования из L^2_φ на F^2_φ и нахождением условий, при которых весовой оператор композиции из F^2_φ в F^2_φ является оператором Гильберта-Шмидта.

1.2. Обозначения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть $\langle u, v\rangle := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма u.

Для $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – длина мультииндекса α, $\tilde{\alpha} := (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1)$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$,

$$c_\alpha(\varphi) := \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z),\ e_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\sqrt{c_\alpha(\varphi)}}\ .$$

Для $R > 0$ через Π_R обозначим полидиск $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < R, \dots, |z_n| < R\}$.

Для функции u с областью определения, содержащей $(0, \infty)^n$, определим функцию $u[e]$ в $\mathbb{R}^n$ по правилу: $u[e](x) = u(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Преобразование Юнга-Фенхеля функции $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $u^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле: $u^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - u(y)),\ x \in \mathbb{R}^n$.

Для гильбертова пространства H через $(f, g)_H$ обозначаем скалярное произведение в H, через $\|x\|_H$ – гильбертову норму элемента $x \in H$. Вместо $(f, g)_{F^2_\varphi}$ пишем $(f, g)_\varphi$.

1.3. Об основных результатах. Теорема 1 даёт описание целых функций, составляющих пространство F^2_φ, в терминах коэффицентов их степенных разложений. Простейшие свойства воспроизводящих ядер пространства F^2_φ приведены в разделе 2. Явный вид оператора ортогонального проектирования из L^2_φ на F^2_φ получен в Теореме 3. В разделе 3 получена интегральная формула для следа положительного линейного непрерывного оператора на F^2_φ (Теорема 4). Она используется при доказательстве Теоремы 5, в которой сформулированы условия, при выполнении которых весовой оператор композиции на F^2_φ будет оператором Гильберта-Шмидта. Теорема 5 обобщает основной результат работы [2], в которой рассматривались весовые операторы композиции в классическом пространстве Фока. Она доказывается по схеме доказательства Теоремы 1 из [2].

2. О пространстве F^2_φ

2.1. **Вспомогательные сведения**.

Предложение. *Пусть* $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $(\varphi[e])^*(x) < +\infty$ *для* $x \in [0, \infty)^n$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty,\\ x\in[0,\infty)^n}} \dfrac{(\varphi[e])^*(x)}{\|x\|} = +\infty$ *и* $c_\alpha(\varphi) \ge \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})},\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Доказательство. Первое утверждение проверяется непосредственно.

Далее, для любых $x \in [0, \infty)^n$ и $t \in \mathbb{R}^n$ имеем $(\varphi[e])^*(x) \ge \langle x, t\rangle - (\varphi[e])(t)$. Отсюда, в частности, получаем, что для любого $M > 0$

$$(\varphi[e])^*(x) \ge M\|x\| - \varphi[e]\left(\frac{Mx}{\|x\|}\right) \ge M\|x\| - \varphi(e^M, \dots, e^M),\ x \in [0, \infty)^n \setminus \{0\}.$$

Отсюда следует второе утверждение.

Третье утверждение доказывается по той же схеме, что и Лемма 2 из [3]. $\square$

Следствие. *Пусть* $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для любого* $M > 0$ *найдётся постоянная* $C_M > 0$ *такая, что* $c_\alpha(\varphi) \ge C_M M^{|\alpha|}$ *для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

2.2. **Ортонормальный базис в F^2_φ.**

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$. Пусть целая функция $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \in F^2_\varphi$. Тогда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) < \infty$ и $\|f\|^2_\varphi = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$.*

Обратно, пусть последовательность $(a_\alpha)_{|\alpha|\geq 0}$ комплексных чисел a_α такова, что сходится ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. Тогда $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{C}^n)$, причём, $f \in F^2_\varphi$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{C}^n)$. Цепочка равенств

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) = \lim_{R\to\infty} \int_{\Pi_R} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Pi_R} \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \sum_{|\beta|\geq 0} \overline{a}_\beta \overline{z}^\beta e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+} a_\alpha \overline{a}_\beta \int_{\Pi_R} z^\alpha \overline{z}^\beta e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{|\alpha|\geq 0} \int_{\Pi_R} |a_\alpha|^2 |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Pi_R} \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\ z)}\ d\mu_n(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$$

показывает, что $f \in F^2_\varphi$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) < \infty$.

Обратно, из сходимости ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ и Следствия из Предложения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $c_\varepsilon > 0$ такое, что $|a_\alpha| \leq c_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Это означает, что $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha$ – целая функция в $\mathbb{C}^n$. Вышеприведённые равенства показывают, что $f \in F^2_\varphi$. $\square$

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$ и целая функция $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \in F^2_\varphi$. Тогда $(f, e_\alpha)_\varphi = a_\alpha \sqrt{c_\alpha(\varphi)}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.*

Доказательство. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$

$$(f, e_\alpha)_\varphi = \lim_{R\to\infty} \int_{\Pi_R} f(z)\overline{e_\alpha(z)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{|\beta|\geq 0} a_\beta \sqrt{c_\beta(\varphi)} \int_{\Pi_R} e_\beta(z)\overline{e_\alpha(z)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= a_\alpha \sqrt{c_\alpha(\varphi)} \lim_{R\to\infty} \int_{\Pi_R} |e_\alpha(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z) =$$

$$= a_\alpha \sqrt{c_\alpha(\varphi)} \int_{\mathbb{C}^n} |e_\alpha(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z) = a_\alpha \sqrt{c_\alpha(\varphi)}. \ \square$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}$ – ортонормальный базис в F^2_φ.*

Доказательство. Система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ортогональна в F_φ^2. Действительно, для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n:\alpha\neq\beta$

$$\int_{\Pi_R} e_\alpha(z)\overline{e_\beta(z)}e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z)=0,\ R>0,$$

поэтому

$$(e_\alpha,e_\beta)_\varphi=\int_{\mathbb{C}^n} e_\alpha(z)\overline{e_\beta(z)}e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z)=\lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R} e_\alpha(z)\overline{e_\beta(z)}e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z)=0.$$

Очевидно, $\|e_\alpha\|_\varphi=1$ для любого $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$.

Ортонормальная в F_φ^2 система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ полна в F_φ^2, так как в силу Теоремы 1 и Леммы 1 для любой функции $f(z)=\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}a_\alpha z^\alpha\in F_\varphi^2$ имеем $\|f\|_\varphi^2=\sum_{|\alpha|\geq 0}|(f,e_\alpha)_\varphi|^2$. Таким образом, система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ образует ортонормальный базис в F_φ^2. □

2.3. **Воспроизводящие ядра для** F_φ^2. Определим функцию $\mathcal{K}:\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}$ по правилу: $\mathcal{K}(z,w)=\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}\frac{z^\alpha w^\alpha}{c_\alpha(\varphi)}$, $z,w\in\mathbb{C}^n$. Так как (по следствию из Предложения) для любого $M>0$ найдётся число $C_M>0$ такое, что

$$c_\alpha(\varphi)\geq C_M M^{|\alpha|},\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n, \tag{1}$$

то ясно, что $\mathcal{K}\in H(\mathbb{C}^{2n})$.

Для $z\in\mathbb{C}^n$ определим функцию $\mathcal{K}_z:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ по правилу: $\mathcal{K}_z(w)=\mathcal{K}(z,w)$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi\in V(\mathbb{R}^n)$, $z\in\mathbb{C}^n$. Тогда $\mathcal{K}_z\in F_\varphi^2$, причём, $\|\mathcal{K}_z\|_\varphi^2=\mathcal{K}(z,\overline{z})$.*

Доказательство. Через ν обозначим меру в $\mathbb{C}^n$, определяемую по правилу: $d\,\nu(z)=e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z)$. Пусть $z\in\mathbb{C}^n$. Для любого $R>0$ имеем

$$\int_{\Pi_R}|\mathcal{K}_z(w)|^2\, d\,\nu(w)=\int_{\Pi_R}\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{z^\alpha w^\alpha}{c_\alpha(\varphi)}\sum_{|\beta|\geq 0}\frac{\overline{z}^\beta\overline{w}^\beta}{c_\beta(\varphi)}\, d\,\nu(w)=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{z^\alpha}{c_\alpha(\varphi)}\frac{\overline{z}^\beta}{c_\beta(\varphi)}\int_{\Pi_R}w^\alpha\overline{w}^\beta\, d\,\nu(w)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2}{c_\alpha^2(\varphi)}\int_{\Pi_R}|w^\alpha|^2\, d\,\nu(w)=$$

$$=\int_{\Pi_R}\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2|w^\alpha|^2}{c_\alpha^2(\varphi)}\, d\,\nu(w).$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{K}_z\|_\varphi^2=\int\limits_{\mathbb{C}^n}|\mathcal{K}_z(w)|^2\, d\,\nu(w)=\lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R}\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2|w^\alpha|^2}{c_\alpha^2(\varphi)}\, d\,\nu(w)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{C}^n}\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2|w^\alpha|^2}{c_\alpha^2(\varphi)}\, d\,\nu(w)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2}{c_\alpha^2(\varphi)}\int\limits_{\mathbb{C}^n}|w^\alpha|^2\, d\,\nu(w)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2}{c_\alpha(\varphi)}\ .$$

Таким образом, $\mathcal{K}_z\in F_\varphi^2$ (так как в силу неравенства (1) ряд $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}\frac{|z^\alpha|^2}{c_\alpha(\varphi)}$ сходится, причём, равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n$) и $\|\mathcal{K}_z\|_\varphi^2=\mathcal{K}(z,\overline{z})$. □

Лемма 4. *Пусть $\varphi\in V(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любых $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ и $z\in\mathbb{C}^n$*

$$(e_\alpha,\mathcal{K}_{\overline{z}})_\varphi=\int_{\mathbb{C}^n}e_\alpha(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\, w)}\, d\mu_n(w)=e_\alpha(z).$$

Доказательство. Пусть $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ и $z\in\mathbb{C}^n$. Тогда для любого $R>0$

$$\int\limits_{\Pi_R}e_\alpha(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\, w)}\, d\mu_n(w)=\int\limits_{\Pi_R}e_\alpha(w)\sum_{|\beta|\geq 0}e_\beta(z)\overline{e_\beta(w)}e^{-2\varphi(abs\, w)}\, d\mu_n(w)=$$

$$= \sum_{|\beta|\geq 0} e_\beta(z) \int_{\Pi_R} e_\alpha(w)\overline{e_\beta(w)} e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w) = e_\alpha(z) \int_{\Pi_R} |e_\alpha(w)|^2 e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w).$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} e_\alpha(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Pi_R} e_\alpha(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w) =$$

$$= e_\alpha(z) \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Pi_R} |e_\alpha(w)|^2 e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w) = e_\alpha(z) \int\limits_{\mathbb{C}^n} |e_\alpha(w)|^2 e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w) = e_\alpha(z).$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $f \in F^2_\varphi$*

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство. Пусть $f \in F^2_\varphi$. Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\ w)}\, d\mu_n(w) = (f, \mathcal{K}_{\overline{z}})_\varphi = (\sum_{|\alpha|\geq 0} (f, e_\alpha)_\varphi e_\alpha, \mathcal{K}_{\overline{z}})_\varphi =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} (f, e_\alpha)_\varphi (e_\alpha, \mathcal{K}_{\overline{z}})_\varphi = \sum_{|\alpha|\geq 0} (f, e_\alpha)_\varphi e_\alpha(z) = f(z). \ \square$$

Замечание 1. *Для любого $f \in F^2_\varphi$ в силу плюрисубгармоничности $|f|^2$ имеем*

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\nu_n(1)} \int\limits_{\|w-z\|\leq 1} |f(w)|^2\, d\mu_n(w),\ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $\nu_n(1)$ – объём единичного шара в $\mathbb{C}^n$. Следовательно,

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\nu_n(1)} \exp(\sup_{\|w-z\|\leq 1} 2\varphi(abs\ w))\, \|f\|^2_\varphi. \tag{2}$$

В силу оценки (2) для любого $z \in \mathbb{C}^n$ линейный функционал $\delta_z : F^2_\varphi \to \mathbb{C}$, действующий по правилу $\delta_z(f) = f(z)$, является непрерывным и, следовательно, существует единственная функция $K_z \in F^2_\varphi$ такая, что для любого $f \in F^2_\varphi$ имеем $f(z) = (f, K_z)_\varphi$. Функции K_z ($z \in \mathbb{C}^n$) называются воспроизводящими ядрами для F^2_φ. При этом $K_z(w) = \mathcal{K}(\overline{z}, w) = \mathcal{K}_{\overline{z}}(w)$. Отсюда, в частности, получаем, что $\|K_z\|^2_\varphi = \mathcal{K}(z, \overline{z})$.

3. Специальные классы линейных операторов на F^2_φ

3.1. **Оператор ортогонального проектирования на F^2_φ.**

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in V(\mathbb{R}^n)$, $P_\varphi : L^2_\varphi \to F^2_\varphi$ – оператор ортогонального проектирования. Тогда*

$$P_\varphi(f)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w),\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in L^2_\varphi$, тогда $P_\varphi(f)$ можно представить в виде сходящегося в F^2_φ ряда $P_\varphi(f) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} (f, e_\alpha)_\varphi\, e_\alpha$. Далее, для любого $z \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$P_\varphi(f)(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} (f, e_\alpha)_\varphi\, e_\alpha(z) = (f, \sum_{|\alpha|\geq 0} \overline{e_\alpha(z)} e_\alpha)_\varphi =$$

$$= (f, \mathcal{K}_{\overline{z}})_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(w)\mathcal{K}(z,\overline{w})e^{-2\varphi(abs\,w)}\, d\mu_n(w). \ \square$$

Замечание 2. *Равенство (3) может быть записано так: $P_\varphi(f)(z) = (f, K_z)_\varphi$.*

3.2. **След положительного линейного непрерывного оператора на F^2_φ.**

Определение 1. *Линейный непрерывный оператор A на гильбертовом пространстве H называют положительным, если $(Ax,x)_H \ge 0$ для любого $x \in H$.*

Известно [4, 12.32. Теорема], что положительный линейный непрерывный оператор A на гильбертовом пространстве H является самосопряжённым.

Определение 2. *Пусть H – гильбертово пространство, A – положительный линейный непрерывный оператор в H и $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – ортонормальный базис в H. След $tr(A)$ оператора A определяется по формуле $tr(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(A(\psi_k),\psi_k)_H$.*

Известно [5, Lemma 5.6.2, Lemma 5.5.1], что определение следа оператора A не зависит от выбора ортонормального базиса в H.

Теорема 4. *Пусть A – положительный линейный непрерывный оператор на F^2_φ. Тогда*

$$tr(A) = \int_{\mathbb{C}^n}(A(K_z),K_z)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{\mathbb{C}^n}(A(K_z),K_z)_\varphi e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z) = \lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R}(A(K_z),K_z)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R}(A(\sum_{|\alpha|\ge 0}\overline{e_\alpha(z)}e_\alpha), \sum_{|\beta|\ge 0}\overline{e_\beta(z)}e_\beta)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R}\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+}\overline{e_\alpha(z)}e_\beta(z)(A(e_\alpha),e_\beta)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+}\int_{\Pi_R}\overline{e_\alpha(z)}e_\beta(z)(A(e_\alpha),e_\beta)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\sum_{|\alpha|\ge 0}\int_{\Pi_R}|e_\alpha(z)|^2(A(e_\alpha),e_\alpha)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Pi_R}\sum_{|\alpha|\ge 0}|e_\alpha(z)|^2(A(e_\alpha),e_\alpha)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n}\sum_{|\alpha|\ge 0}|e_\alpha(z)|^2(A(e_\alpha),e_\alpha)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\ge 0}(A(e_\alpha),e_\alpha)_\varphi\int_{\mathbb{C}^n}|e_\alpha(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) = \sum_{|\alpha|\ge 0}(A(e_\alpha),e_\alpha)_\varphi = tr(A).\ \square$$

Замечание 3. *Отметим, что такого типа формула для следа положительного линейного непрерывного оператора на пространстве Бергмана в единичном круге имеется в работе* [1] *(см. Proposition 6.3.2), а в случае пространства Фока функций многих переменных – в работе* [2] *(см. Lemma 1).*

3.3. **Весовой оператор композиции на F^2_φ.**

Определение 3. *Пусть H – гильбертово пространство и $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – ортонормальный базис в H. Линейный непрерывный оператор $A: H \to H$ называется оператором Гильберта-Шмидта, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|A(\psi_k)\|^2_H < \infty$.*

Известно [5, Lemma 5.5.1], что значение суммы ряда не зависит от выбора ортонормального базиса в H.

Теорема 5. *Пусть голоморфное отображение* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *и функция* $u \in H(\mathbb{C}^n)$ *таковы, что линейный оператор* $uC_h : f \in F^2_\varphi \to u(f \circ h)$ *непрерывен на* F^2_φ. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) uC_h *– оператор Гильберта-Шмидта;*

2) $\int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 \mathcal{K}(h(z), \overline{h(z)}) e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty$.

3) $\int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |u(w)|^2 |K_z(h(w))|^2 e^{-2(\varphi(abs\, w) + \varphi(abs\, z))}\, d\mu_n(w) \right)\, d\mu_n(z) < \infty$.

Доказательство. Условия 1) и 2) эквивалентны. Действительно, так как

$$\sum_{|\alpha| \ge 0} \|uC_h(e_\alpha)\|^2_\varphi = \sum_{|\alpha| \ge 0} \int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 \frac{|h_1(z)|^{2\alpha_1} \cdots |h_n(z)|^{2\alpha_n}}{c_\alpha(\varphi)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{|h_1(z)|^{2\alpha_1} \cdots |h_n(z)|^{2\alpha_n}}{c_\alpha(\varphi)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 \mathcal{K}(h(z), \overline{h(z)}) e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z),$$

то uC_h является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 \mathcal{K}(h(z), \overline{h(z)}) e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty.$$

Покажем, что условия 1) и 3) также эквивалентны. Очевидно, оператор uC_h на F^2_φ является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда след оператора $(uC_h)^* uC_h$ конечен. Для этого необходимо и достаточно (по Теореме 4), чтобы $\int_{\mathbb{C}^n} ((uC_h)^* uC_h(K_z), K_z)_\varphi e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty$. А так как

$$((uC_h)^* uC_h(K_z), K_z)_\varphi = (uC_h(K_z), uC_h(K_z))_\varphi =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} |u(w)|^2 |K_z(h(w))|^2 e^{-2\varphi(abs\, w)}\, d\mu_n(w),$$

то uC_h на F^2_φ является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |u(w)|^2 |K_z(h(w))|^2 e^{-2(\varphi(abs\, w) + \varphi(abs\, z))}\, d\mu_n(w) \right)\, d\mu_n(z) < \infty. \ \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Zhu *Operator theory in function spaces.* Marcel Dekker, New York (1990).
2. Sei-Ichiro Ueki *Hilbert-Schmidt Weighted Composition Operator on the Fock space* // Int. Journal of Math. Analysis, Vol. **1**:16, 769 - 774 (2007).
3. Мусин И.Х. *О гильбертовом пространстве целых функций* // Уфимск. матем. журн. 2017. **9**:3, С. 111–118.
4. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1975.
5. E. Brian Davies *Linear operators and their spectra.* Cambridge University Press (2007).

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin_ildar@mail.ru