ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 111-122.

УДК 517.956

ТРЕТИЙ ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Т.Г. ЭРГАШЕВ

Аннотация. Потенциал двойного слоя играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений, при исследовании которого существенно используются свойства фундаментальных решений данного уравнения. В настоящее время все фундаментальные решения обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца известны, но, несмотря на это, только для первого из них построена теория потенциала. В данной работе исследуется потенциал двойного слоя, соответствующий третьему фундаментальному решению. Используя свойства гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных, доказываются предельные теоремы и выводятся интегральные уравнения, содержащие в ядре плотность потенциала двойного слоя.

Ключевые слова: обобщенное двуосесимметрическое уравнение Гельмгольца; формула Грина; фундаментальное решение; третий потенциал двойного слоя; гипергеометрические функции Аппеля от двух переменных; интегральные уравнения с плотностью потенциала двойного слоя в ядре.

Mathematics Subject Classification: 35A08, 35J05, 35J15,35J70

1. Введение

Многочисленные приложения теории потенциала можно найти в механике жидкости, эластодинамике, электромагнетизме и акустике. С помощью этой теории краевые задачи удаётся свести к решению интегральных уравнений.

Потенциал двойного слоя играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений. Потому что, метод разделения переменных и метод функции Грина позволяют получить явное выражение для решения краевых задач только в случае областей простейшего вида, а сведение краевых задач при помощи потенциала двойного слоя к интегральным уравнениям, с одной стороны, удобно для теоретического исследования вопроса о разрешимости и единственности краевых задач, с другой стороны, дает возможность эффективного численного решения краевых задач для областей сложной формы [1,2].

Применяя метод комплексного анализа (основанный на аналитических функциях), впервые Гильберт [3] построил интегральное представление решений следующего обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$H^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y - \lambda^2 u = 0, \qquad (H^{\lambda}_{\alpha,\beta})$$

где α, β и $\lambda-$ постоянные, причем $0 < 2\alpha, 2\beta < 1$.

T.G. Ergashev, Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation.

Поступила 1 августа 2017 г.

Фундаментальные решения уравнения $(H^{\lambda}_{\alpha,\beta})$ найдены в работе [4]. Когда $\lambda = 0$, все четыре фундаментальные решения $q_i(x, y; x_0, y_0)(i = \overline{1, 4})$ уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$ можно выразить с помощью гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных второго рода $F_2\left(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y\right)$, определенной по формуле [5,6,7]

$$F_2\left(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n m!n!} x^m y^n,$$

где $(a)_n$ — символ Похгаммера: $(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1), n = 1, 2, ...$

К такому направлению исследований примыкает работа [8], в которой построены фундаментальные решения B-эллиптических уравнений с младшими членами вида

$$u_{xx} + u_{yy} + 2\alpha u_x + \frac{2\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0.$$

В работах [9] и [10] изложена теория потенциала для простейшего вырождающегося эллиптического уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$ при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, соответственно.

В [11] построена теория потенциала двойного слоя для уравнения $(H^{\lambda}_{\alpha,\beta})$ при $\lambda = 0$ в области

$$\Omega \subset R^2_+ \left\{(x, y) : x > 0, y > 0\right\}$$

лишь для первого фундаментального решения $q_1(x, y; x_0, y_0)$.

В настоящей работе мы исследуем потенциал двойного слоя, соответствующий третьему фундаментальному решению

$$q_3(x, y; x_0, y_0) = \\ = k_3 \left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-1} y^{1-2\beta} y_0^{1-2\beta} F_2\left(1 + \alpha - \beta; \alpha, 1 - \beta; 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta\right), \tag{1.1}$$

где

$$k_3 = \frac{2^{2+2\alpha-2\beta}}{4\pi} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2-2\beta)}, \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ x + x_0 \\ x - x_0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} y - y_0 \\ y - y_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}^2, \qquad \xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2},\ \eta = \frac{r^2 - r_2^2}{r^2}. \tag{1.3}$$

Нетрудно проверить, что функция $q_3(x, y; x_0, y_0)$ обладает следующими свойствами

$$\left.\frac{\partial q_3(x, y; x_0, y_0)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{1.4}$$
$$\left. q_3(x, y; x_0, y_0)\right|_{y=0} = 0.$$

2. Формула Грина

Рассмотрим тождество

$$x^{2\alpha} y^{2\beta} \left[u H^0_{\alpha,\beta}(v) - v H^0_{\alpha,\beta}(u)\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^{2\alpha} y^{2\beta}\left(v_x u - v u_x\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x^{2\alpha} y^{2\beta}\left(v_y u - v u_y\right)\right].$$

Интегрируя обе части последнего тождества по области Ω, расположенной в первой четверти $(x > 0, y > 0)$ и пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\iint\limits_{\Omega} x^{2\alpha} y^{2\beta} \left[u H^0_{\alpha,\beta}(v) - v H^0_{\alpha,\beta}(u)\right] dxdy =$$

$$= \int\limits_S x^{2\alpha} y^{2\beta} u \left(v_x dy - v_y dx\right) - x^{2\alpha} y^{2\beta} v \left(u_x dy - u_y dx\right), \tag{2.1}$$

где $S = \partial\Omega$ — контур области Ω.

Формула Грина (2.1) выводится при следующих предположениях: функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, частные производные второго порядка непрерывны внутри Ω и интегралы по Ω, содержащие $H^0_{\alpha,\beta}(u)$ и $H^0_{\alpha,\beta}(v)$, имеют смысл. Если $H^0_{\alpha,\beta}(u)$ и $H^0_{\alpha,\beta}(v)$ не обладают непрерывностью вплоть до S, то это — несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей Ω_n, которые содержатся внутри Ω, когда эти области Ω_n стремятся к Ω, так что всякая точка, находящаяся внутри Ω, попадает внутрь областей Ω_n, начиная с некоторого номера n.

Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ суть решения уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$, то из формулы (2.1) имеем

$$\int\limits_S x^{2\alpha} y^{2\beta} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{dy}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.3}$$

— оператор производной по внешней нормали n к кривой S и

$$\frac{dy}{ds} = cos(n, x),\ \frac{dx}{ds} = -cos(n, y) \tag{2.4}$$

— направляющие косинусы этой нормали.

Полагая в формуле (2.1) $v \equiv 1$ и заменяя u на u^2, получим

$$\iint\limits_\Omega x^{2\alpha} y^{2\beta} \left[u_x^2 + u_y^2\right] dxdy = \int\limits_S x^{2\alpha} y^{2\beta} u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

где $u(x, y)$ — решение уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$.

Наконец, из формулы (2.2), полагая $v \equiv 1$, будем иметь

$$\int\limits_S x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \tag{2.5}$$

т.е. интеграл от нормальной производной решения уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$ с весом $x^{2\alpha}y^{2\beta}$ по контуру области равен нулю.

3. Потенциал двойного слоя $w^{(3)}(x_0, y_0)$

. Пусть Ω — область, ограниченная отрезками $(0, a)$ и $(0, b)$ осей x и y, соответственно, и кривой Γ с концами в точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, лежащей в первой четверти $x > 0, y > 0$ плоскости R^2.

Параметрическое уравнение кривой Γ пусть будет $x = x(s)$ и $y = y(s)\,(s \in [0, l])$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки B. Относительно кривой Γ будем предполагать, что:

1) функции $x = x(s)$ и $y = y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$ на отрезке $[0, l]$, не обращающиеся одновременно в нуль; вторые производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ на $[0, l]$, где l — длина кривой Γ;

2) в окрестностях точек $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ на кривой Γ выполняются условия

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq Cy^{1+\varepsilon}(s), \left|\frac{dy}{ds}\right| \leq Cx^{1+\varepsilon}(s), \tag{3.1}$$

где $C = const$. Координаты переменной точки на кривой Γ будем обозначать через (x, y).

Рассмотрим интеграл

$$w^{(3)}(x_0, y_0) = \int\limits_0^l x^{2\alpha} y^{2\beta} \mu_3(s) \frac{\partial q_3(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds, \tag{3.2}$$

где $\mu_3(s)$ — непрерывная функция в промежутке $[0, l]$, а $q_3(x, y; x_0, y_0)$ — фундаментальное решение уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$, определенное по формуле (1.1).

Интеграл (3.2) будем называть *третьим потенциалом двойного слоя с плотностью* $\mu_3(s)$. Очевидно, что $w^{(3)}(x_0, y_0)$ есть регулярное решение уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$ в любой области, лежащей в первой четверти, не имеющей общих точек ни с кривой Γ, ни с осью x, ни с осью y. Как и в случае логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (3.2) в точках кривой Γ для ограниченной плотности $\mu_3(s)$.

Лемма 1. *Справедливы следующие формулы*

$$w^{(3)}(x_0, y_0) = \begin{cases} j(x_0, y_0) - 1, & \textit{если } (x_0, y_0) \in \Omega, \\ j(x_0, y_0) - \frac{1}{2}, & \textit{если } (x_0, y_0) \in \Gamma, \\ j(x_0, y_0), & \textit{если } (x_0, y_0) \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$;

$$j(x_0, y_0) = (1 - 2\beta) k_3 y_0^{1-2\beta} \int\limits_0^a x^{2\alpha} \times$$

$$\times \left((x - x_0)^2 + y_0^2\right)^{-\alpha+\beta-1} F\left(1 + \alpha - \beta, \alpha; 2\alpha; \frac{-4xx_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\right) dx. \tag{3.4}$$

Здесь $F(a, b; c; z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$ — *гипергеометрическая функция Гаусса.*

Доказательство. **Случай 1**. Пусть точка (x_0, y_0) находится внутри Ω. Вырежем из области Ω круг малого радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0) и обозначим через Ω_ρ оставшуюся часть области Ω, а через C_ρ окружность вырезанного круга. В области Ω_ρ функция $q_3(x, y; x_0, y_0)$ — регулярное решение уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$. Используя формулу для производной гипергеометрической функции Аппеля [12]

$$\frac{\partial^{m+n} F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} =$$

$$= \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n} F_2(a + m + n; b_1 + m, b_2 + n; c_1 + m, c_2 + n; x, y) \tag{3.5}$$

имеем

$$\frac{\partial q_3(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} = -2(1 + \alpha - \beta) k_3 \left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2} y^{1-2\beta} y_0^{1-2\beta} P(x, y; x_0, y_0), \tag{3.6}$$

где

$$P(x, y; x_0, y_0) = (x - x_0) F_2(1 + \alpha - \beta; \alpha, 1 - \beta; 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta) +$$

$$+ x_0 F_2(2 + \alpha - \beta; 1 + \alpha, 1 - \beta; 1 + 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta) +$$

$$+ (x - x_0) \left[\frac{(1 + \alpha - \beta)\alpha}{2\alpha} \xi F_2(2 + \alpha - \beta; 1 + \alpha, 1 - \beta; 1 + 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta)\right.$$

$$+\frac{1-\beta}{2-2\beta}\eta F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,2-\beta;2\alpha,3-2\beta;\xi,\eta)\Big]. \tag{3.7}$$

Далее применяя известное соотношение [5]:

$$\frac{b_1}{c_1}xF_2\left(a+1;b_1+1,b_2;c_1+1,c_2;x,y\right)+\frac{b_2}{c_2}yF_2\left(a+1;b_1,b_2+1;c_1,c_2+1;x,y\right)=$$
$$=F_2\left(a+1;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right)-F_2\left(a;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right),$$

к квадратной скобке в (3.7), получим

$$\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial x}=-2(1+\alpha-\beta)k_3\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2}y^{1-2\beta}y_0^{1-2\beta}\times$$
$$\times\left[x_0F_2\left(2+\alpha-\beta;1+\alpha,1-\beta;1+2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)+\right.$$
$$\left.+(x-x_0)F_2\left(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)\right]. \tag{3.8}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial y}=-2(1+\alpha-\beta)k_3\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2}y^{1-2\beta}y_0^{1-2\beta}\times$$
$$\times\left[y_0F_2\left(2+\alpha-\beta;\alpha,2-\beta;2\alpha,3-2\beta;\xi,\eta\right)+\right.$$
$$\left.+\,(y-y_0)F_2\left(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)\right]+$$
$$+(1-2\beta)k_3\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-1}y^{-2\beta}y_0^{1-2\beta}F_2\left(1+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right). \tag{3.9}$$

Пользуясь (3.8) и (3.9), в силу (1.1),(2.3) и (2.4), найдем

$$\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}=(1+\alpha-\beta)k_3\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2}y^{-2\beta}y_0^{1-2\beta}Q\left(x,y;x_0,y_0\right), \tag{3.10}$$

где

$$Q\left(x,y;x_0,y_0\right)=-r^2yF_2\left(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)\frac{\partial}{\partial n}\left[\ln r^2\right]-$$
$$-2yy_0F_2\left(2+\alpha-\beta;1+\alpha,1-\beta;1+2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)\frac{dx}{ds}+$$
$$+2x_0yF_2\left(2+\alpha-\beta;\alpha,2-\beta;2\alpha,3-2\beta;\xi,\eta\right)\frac{dy}{ds}+$$
$$+(1-2\beta)r^2F_2\left(1+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta\right)\frac{dx}{ds}.$$

Теперь интегрируя нормальную производную $\frac{\partial}{\partial n}q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)$ с весом $x^{2\alpha}y^{2\beta}$ по границе области Ω_ρ, в силу (2.5), получим

$$\int\limits_0^a x^{2\alpha}\left[y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}\right]\Big|_{y=0}dx+\int\limits_0^l x^{2\alpha}y^{2\beta}\mu_3(s)\frac{\partial q_3(x,y;x_0,y_0)}{\partial n}ds-$$
$$-\lim_{\rho\to0}\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds-\int\limits_0^b x^{2\alpha}y^{2\beta}\left.\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}\right|_{x=0}dy=0.$$

Далее, с учетом (3.2) и (1.4), имеем

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\rho\to0}\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds+$$
$$+\int\limits_0^a x^{2\alpha}\left[y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial y}\right]\Big|_{y=0}dx. \tag{3.11}$$

Подставив (3.10) в (3.11), найдем

$$w_1^{(3)}(x_0,y_0)=k_3y_0^{1-2\beta}\lim_{\rho\to 0}\{(1+\alpha-\beta)[-J_1-2y_0J_2+2x_0J_3]+J_4\}+J_5, \tag{3.12}$$

где

$$J_1=\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-1}F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left[\ln r^2\right]ds,$$

$$J_2=\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2}F_2(2+\alpha-\beta;1+\alpha,1-\beta;1+2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)\frac{dx(s)}{ds}ds,$$

$$J_3=\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-2}F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,2-\beta;2\alpha,3-2\beta;\xi,\eta)\frac{dy(s)}{ds}ds,$$

$$J_4=(1-2\beta)\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}\left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-1}F_2(1+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)\frac{dx(s)}{ds}ds,$$

$$J_5=\int\limits_0^a x^{2\alpha}\left[y^{2\beta}\frac{\partial q_3(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=0}dx.$$

Вводя полярные координаты

$$x=x_0+\rho\cos\varphi,\ \ y=y_0+\rho\sin\varphi \tag{3.13}$$

в интеграле J_1, получим

$$J_1=\int\limits_0^{2\pi}(x_0+\rho\cos\varphi)^{2\alpha}(y_0+\rho\sin\varphi)\times$$

$$\times\left(\rho^2\right)^{-\alpha+\beta-1}F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)\,d\varphi. \tag{3.14}$$

Исследуем подынтегральное выражение в (3.14). Применяя последовательно известные формулы [13]

$$F_2(a;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b_1)_i(b_2)_i}{(c_1)_i(c_2)_i i!}x^iy^iF(a+i,b_1+i;c_1+i;x)\,F(a+i,b_2+i;c_2+i;y)$$

и

$$F(a,b;c,x)=(1-x)^{-b}F\left(c-a,b;c,\frac{x}{x-1}\right), \tag{3.15}$$

получим

$$F_2(a;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y)=\frac{(1-x)^{-b_1}}{(1-y)^{b_2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b_1)_i(b_2)_i}{(c_1)_i(c_2)_i i!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^i\left(\frac{y}{1-y}\right)^i\times$$

$$\times F\left(c_1-a,b_1+i;c_1+i;\frac{x}{x-1}\right)F\left(c_2-a,b_2+i;c_2+i;\frac{y}{y-1}\right). \tag{3.16}$$

Воспользовавшись теперь формулой (3.16) гипергеометрическую функцию Аппеля $F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)$ запишем в виде

$$F_2(2+\alpha-\beta;\alpha,1-\beta;2\alpha,2-2\beta;\xi,\eta)=$$

$$=\left(\rho^2\right)^{1+\alpha-\beta}\left(\rho^2+4x_0^2+4x_0\rho\cos\varphi\right)^{-\alpha}\left(\rho^2+4y_0^2+4y_0\rho\sin\varphi\right)^{\beta-1}P_{11}, \tag{3.17}$$

где

$$P_{11}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2+\alpha-\beta)_i(\alpha)_i(1-\beta)_i}{(2\alpha)_i(2-2\beta)_i i!}\times$$
$$\times\left(\frac{4x_0^2+4x_0\rho\cos\varphi}{\rho^2+4x_0^2+4x_0\rho\cos\varphi}\right)^i\left(\frac{4y_0^2+4y_0\rho\sin\varphi}{\rho^2+4y_0^2+4y_0\rho\sin\varphi}\right)^i\times$$
$$\times F\left(\alpha+\beta-2,\alpha+i;2\alpha+i;\frac{4x_0^2+4x_0\rho\cos\varphi}{\rho^2+4x_0^2+4x_0\rho\cos\varphi}\right)\times$$
$$\times F\left(-\alpha-\beta,1-\beta+i;2-2\beta+i;\frac{4y_0^2+4y_0\rho\sin\varphi}{\rho^2+4y_0^2+4y_0\rho\sin\varphi}\right).$$

Используя известную формулу для $F\left(a,b;c;1\right)$ [14]

$$F\left(a,b;c;1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)},c\neq 0,-1,-2,...,\operatorname{Re}\left(c-a-b\right)>0,\tag{3.18}$$

получим

$$\lim_{\rho\to 0}P_{11}=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(2+\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}.\tag{3.19}$$

Таким образом, в силу (3.14), (3.17) и (3.19), окончательно получим

$$-(1+\alpha-\beta)k_{30}^{1-2\beta}\lim_{\rho\to 0}J_1=-1.\tag{3.20}$$

Далее, учитывая, что

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\ln\rho=0,\tag{3.21}$$

мы имеем

$$\lim_{\rho\to 0}J_2=\lim_{\rho\to 0}J_3=\lim_{\rho\to 0}J_4=0.\tag{3.22}$$

Наконец, рассмотрим интеграл J_5, который, согласно формуле (3.9), можно привести к виду (3.4), т.е.

$$J_5=j(x_0,y_0).\tag{3.23}$$

Теперь, в силу (3.20) — (3.23), из (3.12) следует, что в точке $(x_0,y_0)\in\Omega$ имеет место равенство

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)=j(x_0,y_0)-1.$$

Случай 2. Пусть теперь точка (x_0,y_0) совпадает с некоторой точкой M_0, лежащей на кривой Γ. Проведем окружность малого радиуса ρ с центром в точке (x_0,y_0). Эта окружность вырежет часть Γ_ρ кривой Γ. Оставшуюся часть кривой обозначим через $\Gamma-\Gamma_\rho$. Обозначим через C'_ρ часть окружности C_ρ , лежащей внутри области Ω и рассмотрим область Ω_ρ, ограниченную кривыми $\Gamma-\Gamma_\rho$, C'_ρ и отрезками $[0,a]$ и $[0,b]$ осей x и y, соответственно. Тогда имеем

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)\equiv\int_0^l x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds=$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds.\tag{3.24}$$

Так как точка (x_0,y_0) лежит вне этой области, то в этой области функция $q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)$ является регулярным решением уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u)=0$ и в силу (2.5) верно равенство

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds=\int_0^a x^{2\alpha}\left[y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=0}dx+$$

$$+\int\limits_0^b x^{2\alpha}y^{2\beta}\left.\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial x}\right|_{x=0}dy+\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial n}\left\{q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)\right\}ds. \qquad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.24), с учетом (3.23) и (1.4), получим

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)=j(x_0,y_0)+\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial n}ds.$$

Вводя снова полярные координаты (3.13) с центром в точке (x_0,y_0) в интеграле

$$\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial n}\left\{q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)\right\}ds$$

и переходя к пределу при $\rho\to 0$, получим

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho}x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial n}\left\{q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)\right\}ds=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)=j(x_0,y_0)-\frac{1}{2}.$$

Случай 3. Положим, наконец, что точка (x_0,y_0) лежит вне области Ω. Тогда $q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)$ есть регулярное решение уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u)=0$ внутри области Ω с непрерывными производными всех порядков вплоть до контура Γ, и в силу (2.5)

$$w_1^{(3)}\left(x_0,y_0\right)\equiv\int\limits_0^l x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial n}\left\{q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)\right\}ds=$$

$$=\int\limits_0^a x^{2\alpha}\left.\left[y^{2\beta}\frac{\partial q_3\left(x,y;x_0,y_0\right)}{\partial y}\right]\right|_{y=0}dx=j(x_0,y_0).$$

□

Лемма 2. *Справедливы следующие формулы:*

$$w^{(2)}(0,y_0)=\begin{cases} j(0,y_0)-1, & \text{если } y_0\in(0,b),\\ j(0,y_0)-\frac{1}{2}, & \text{если } y_0=0 \text{ или } y_0=b,\\ j(0,y_0), & \text{если } b<y_0,\end{cases}$$

где

$$j\left(0,y_0\right)=\frac{1-2\beta}{1+2\alpha}\left(\frac{a^2}{y_0^2+a^2}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}k_3F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}+\alpha;\frac{3}{2}+\alpha;\frac{a^2}{y_0^2+a^2}\right). \qquad (3.26)$$

Доказательство. Сначала исследуем функцию $j(x_0,y_0)$, определенную формулой (3.4), при $x_0=0$:

$$j(0,y_0)=(1-2\beta)k_3y_0^{1-2\beta}\int\limits_0^a x^{2\alpha}\left(x^2+y_0^2\right)^{-\alpha+\beta-1}dx.$$

Используя известную формулу [14]

$$\int\limits_0^a x^{\lambda-1}\left(x^2+b^2\right)^{\nu}dx=\frac{1}{\lambda}b^{2\nu}a^{\lambda}F\left(-\nu,\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda+2}{2};\frac{-a^2}{b^2}\right),\ \ (ab>0,\lambda>0),$$

получим

$$j(0,y_0)=(1-2\beta)k_3a^{1+2\beta}y_0^{-1-2\beta}F\left(\alpha-\beta+1,\frac{1}{2}+\alpha;\frac{3}{2}+\alpha;\frac{-a^2}{y_0^2}\right). \tag{3.27}$$

Далее, воспользовавшись формулой (3.15) получим функцию $j(0,y_0)$, определенную формулой (3.26). Учитывая известную формулу (3.18) для $F(a,b;c;1)$ и значение k_3 из формулы (1.2), из (3.26) легко следует, что $j(0,0)=1$.

Пусть теперь точка (x_0,y_0) находится на оси y и пусть в первом случае будет $y_0\in(0,b)$. Проведем прямую $x=h$ ($h>0$ — достаточно мало) и рассмотрим область Ω_h, которая есть часть области Ω, лежащая справа от прямой $x=h$. Применяя формулу (2.5), получим

$$w_1^{(3)}(0,y_0)=J_6+J_7, \tag{3.28}$$

где

$$J_6=\lim_{h\to0}\int\limits_h^a x^{2\alpha}y^{2\beta}\frac{\partial q_3(x,y;0,y_0)}{\partial y}\bigg|_{y=0}dx,$$

$$J_7=\lim_{h\to0}\int\limits_0^{y_1} y^{2\beta}x^{2\alpha}\frac{\partial q_3(x,y;0,y_0)}{\partial x}\bigg|_{x=h}dx.$$

Здесь y_1 — ордината точки пересечения кривой Γ с прямой $x=h$.

Нетрудно заметить, что

$$J_6=j(0,y_0). \tag{3.29}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (3.28), которое, в силу (3.8), принимает вид

$$J_7=-2(1-\alpha-\beta)k_3y_0^{1-2\beta}J_8, \tag{3.30}$$

где

$$J_8=h^{1+2\alpha}\int\limits_0^{y_1} y\frac{F\left(2+\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta;-\frac{4yy_0}{(y-y_0)^2+h^2}\right)}{\left[(y-y_0)^2+h^2\right]^{2+\alpha-\beta}}dy.$$

Преобразуем J_8. Воспользовавшись формулой (3.15), получим

$$J_8=h^{1+2\alpha}\int\limits_0^{y_1} y\frac{F\left(-\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta;\frac{4yy_0}{(y+y_0)^2+h^2}\right)}{\left[(y-y_0)^2+h^2\right]^{1+\alpha}\left[(y+y_0)^2+h^2\right]^{1-\beta}}dx,$$

Теперь вместо y введем новую переменную интегрирования $y=y_0+ht$. Совершая замену переменных, получим

$$J_8(h,y_0)=\int\limits_{l_1}^{l_2}(y_0+ht)\frac{F\left(-\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta,\frac{4y_0(y_0+ht)}{(2y_0+ht)^2+h^2}\right)}{(1+t^2)^{\alpha+1}\left[(2y_0+ht)^2+h^2\right]^{1-\beta}}dt, \tag{3.31}$$

где

$$l_1=-\frac{y_0}{h},l_2=\frac{y_1-y_0}{h}.$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{h\to0}F\left(-\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta,\frac{4y_0\left(y_0+ht\right)}{\left(2y_0+ht\right)^2+h^2}\right)=$$

$$=F\left(-\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta;1\right)=\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\Gamma\left(2+\alpha-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}} = \frac{\pi\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha-1}\alpha\Gamma^2(\alpha)},$$

из (3.29) — (3.31) находим

$$w_1^{(3)}\left(0, y_0\right) = j(0, y_0) - 1.$$

Остальные три случая, когда $y_0 = 0$, $y_0 = b$ и $y_0 > b$, доказываются аналогично первому случаю.

$\square$

Лемма 3. *Для любых точек (x, y) и $(x_0, y_0) \in R_+^2$ при $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ справедливо неравенство*

$$|q_3\left(x, y; x_0, y_0\right)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\pi\Gamma(1+\alpha-\beta)} \frac{4^{\alpha-\beta} y^{1-2\beta} y_0^{1-2\beta}}{\left(r_1^2\right)^{\alpha} \left(r_2^2\right)^{1-\beta}} \times$$

$$\times F\left[\alpha, 1-\beta; 1+\alpha-\beta; \left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{r_2^2}\right)\right], \tag{3.32}$$

где α и β — действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta < 1$, а r, r_1 и r_2 — выражения, определенные в (1.3).

Доказательство. Из (3.16) следует, что

$$q_3\left(x, y; x_0, y_0\right) = k_3 y^{1-2\beta} y_0^{1-2\beta} \left(r_1^2\right)^{-\alpha} \left(r_2^2\right)^{\beta-1} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha-\beta)_i (\alpha)_i (1-\beta)_i}{(2\alpha)_i (2-2\beta)_i i!} \left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)^i \left(1-\frac{r^2}{r_2^2}\right)^i \times$$

$$\times F\left(\alpha+\beta-1, \alpha+i; 2\alpha+i; 1-\frac{r^2}{r_1^2}\right) \times$$

$$\times F\left(1-\alpha-\beta, 1-\beta+i; 2-2\beta+i; 1-\frac{r^2}{r_2^2}\right), \tag{3.33}$$

Теперь, ввиду следующих неравенств:

$$F\left(\alpha+\beta-1, \alpha+i; 2-2\alpha+i; 1-\frac{r^2}{r_1^2}\right) \leqslant \frac{(2\alpha)_i \Gamma(2\alpha)\Gamma(1-\beta)}{(1+\alpha-\beta)_i \Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)}$$

и

$$F\left(1-\alpha-\beta, 1-\beta+i; 2-2\beta+i; 1-\frac{r^2}{r_2^2}\right) \leqslant \frac{(2-2\beta)_i \Gamma(2-2\beta)\Gamma(\alpha)}{(1+\alpha-\beta)_i \Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)},$$

из (3.33) следует неравенство (3.32). $\square$

В силу известной формулы [6]

$$F\left(a, b; a+b; z\right) = -\frac{\Gamma\left(a+b\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)} F\left(a, b; 1; 1-z\right) \ln\left(1-z\right) +$$

$$+\frac{\Gamma\left(a+b\right)}{\Gamma^2\left(a\right)\Gamma^2\left(b\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(a+j\right)\Gamma\left(b+j\right)}{\left(j!\right)^2} \left[2\psi\left(1+j\right) - \psi\left(a+j\right) - \psi\left(b+j\right)\right] \left(1-z\right)^j,$$

$(-\pi < \arg\,(1-z) < \pi,\ a, b \neq 0, -1, -2, ...)$, из (3.32) следует [4], что функция $q_3\left(x, y; x_0, y_0\right)$ имеет логарифмическую особенность при $r = 0$.

Лемма 4. *Если кривая* Γ *удовлетворяет перечисленным выше условиям, то*

$$\int\limits_{\Gamma} x^{2\alpha} y^{2\beta} \left| \frac{\partial q_3\left(x, y; x_0, y_0\right)}{\partial n} \right| ds \leqslant C_1, \tag{3.34}$$

где C_1 *— постоянная.*

Доказательство. Неравенство (3.34) следует из условий (3.1) и формулы (3.10). □

Формулы (3.3) показывают, что при $\mu_3(s) \equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает разрыв непрерывности, когда точка (x, y) пересекает кривую Γ. В случае произвольной непрерывной плотности $\mu_3(s)$ имеет место

Теорема 1. *Потенциал двойного слоя* $w^{(3)}(x_0, y_0)$ *имеет пределы при стремлении точки* (x_0, y_0) *к точке* $(x(s), y(s))$ *кривой* Γ *извне или изнутри. Если предел значений* $w_i^{(3)}(x_0, y_0)$ *изнутри обозначить через* $w^{(3)}(s)$, *а предел извне — через* $w_e^{(3)}(s)$, *то имеют место формулы*

$$w_i^{(3)}(t) = -\frac{1}{2}\mu_3\left(t\right) + \int\limits_0^l \mu_3\left(s\right) K_3\left(s, t\right) ds$$

и

$$w_e^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\mu_3(t) + \int\limits_0^l \mu_3(s) K_3(s, t) ds,$$

где

$$K_3(s, t) = [x(s)]^{2\alpha} [y(s)]^{2\beta} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ q_3\left[x\left(s\right), y\left(s\right); x_0(t), y_0(t)\right] \right\}.$$

Доказательство. Справедливость утверждений теоремы 1 следует из лемм 1 — 4. □

Функция

$$w_0^{(3)}(s) = \int\limits_0^l \mu_3(t) K_3(s, t) dt$$

непрерывна при $0 \leqslant s \leqslant l$, что следует из хода доказательства теоремы 1. В силу результатов теоремы 1 и непрерывности функций $w_0^3(s)$ и $\mu_3(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant l$, следует, что потенциал двойного слоя $w^{(3)}(x_0, y_0)$ есть функция непрерывная внутри области Ω вплоть до кривой Γ. Точно также $w^{(3)}(x_0, y_0)$ непрерывна вне области D вплоть до кривой Γ.

В заключении отметим, что полученные в настоящем сообщении результаты играют важную роль при решении краевых задач для уравнения $H^0_{\alpha,\beta}(u) = 0$. При этом решение поставленной задачи ищется в виде третьего потенциала двойного слоя (3.2) с неизвестной плотностью $\mu_3(s)$, для определения которой используется известная теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа.* М.: ИЛ, 1957. 256 с.
2. Гюнтер Н.М. *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.* М.: Гостехиздат, 1953. 416 с.
3. R.P. Gilbert *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering.* Vol. 54. A Series of Monographs and Textbooks. New York and London, Academic Press, 1969. 308 p.
4. A. Hasanov *Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation* // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007, Vol. 52, No. 8. P. 673–683.

5. P. Appell, J. Kampé de Fériet *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques: Polynômes d'Hermite.* Gauthier - Villars. Paris, 1926. 440 p.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
7. H.M. Srivastava, P.W. Karlsson *Multiple Gaussian Hypergeometric Series.* Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chicherster), John Wiley and Sons. New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985. 386 p.
8. R.M. Mavlyaviev *Construction of Fundamental Solutions to B-Elliptic Equations with Minor Terms* // Russian Mathematics. 2017, Vol. 61, No. 6. P. 60–65.
9. Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.* М.: Наука, 1966. 292 с.
10. Пулькин С.П. *Некоторые краевые задачи для уравнения* $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Ученые записи Куйбышевского пединститута. 1958. Вып. 21. С. 3–54.
11. H.M. Srivastava, A. Hasanov, J. Choi *Double-Layer Potentials for a Generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation* // Sohag Journal of Mathematics. 2015, Vol. 2. No. 1, P. 1–10.
12. M. Rassias, A. Hasanov *Fundamental Solutions of Two Degenerated Elliptic Equations and Solutions of Boundary Value Problems in Infinite Area* // International Journal of Applied Mathematics Statistics. 2007, Vol. 8, No. M07. P. 87–95.
13. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy *Expansions of Appell's double hypergeometric functions* // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940, 11. P. 249—270.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Тухтасин Гуламжанович Эргашев,
Ташкентский институт инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства,
ул. Кари-Ниязи, 39,
100000, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: ertuhtasin@mail.ru