О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В p-АДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРУН

С.М. АНДРИЯН, А.К. КРОЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. Исследован один класс интегральных уравнений со степенной нелинейностью на всей прямой. Указанный класс уравнений возникает в p-адической теории открыто-замкнутых струн. С применением метода последовательных приближений и с обоснованием их сходимости доказано существование нетривиального непрерывного нечетного и ограниченного решения на всей числовой прямой. Изучено асимптотическое поведение решения при неограниченном возрастании аргумента. Получены интегральные оценки и ряд свойств аппроксимаций решения рассматриваемого уравнения. При некоторых дополнительных ограничениях устанавливается также единственность построенного решения в определенном классе непрерывных функций. Приведены примеры интегральных ядер уравнения, удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем. Когда ядерная функция – гауссовское распределение из доказанных результатов, как частный случай, получена теорема В.С. Владимирова – Я.И. Воловича.

Ключевые слова: последовательные приближения, предел решения, поточечная сходимость, непрерывность.

Mathematics Subject Classification: 47H10, 47H30

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию следующего нелинейного интегрального уравнения на всей прямой:

$$\varphi^p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(|x|,|t|\right) K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R} \tag{1.1}$$

относительно искомой нечетной и непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$. Здесь $p>2$ — произвольное нечетное число, а функции λ и K обладают следующими свойствами:

(a) $\lambda\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$; $K\in C(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^+\equiv[0,\infty)$;

(b) $K\in L_1(\mathbb{R})\bigcap L_\infty(\mathbb{R})$; $K(\tau)\geq 0$, $\tau\in\mathbb{R}$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,d\tau = 1$;

(c) $K(-\tau)=K(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}^+$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)\,dt < +\infty$; $K(\tau)\downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$;

(d) $0\leqslant\lambda(x,t)\leqslant 1$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$; $\int\limits_0^\infty t\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}\left(1-\lambda(x,t)\right)dt<+\infty$.

S.M. Andriyan, A.K. Kroyan, Kh.A. Khachatryan, On solvability of a class of nonlinear integral equations in p-adic string theory.

Поступила 15 июля 2017 г.

Уравнение (1.1) возникает в p-адической теории струн и описывает динамику тахионов открыто-замкнутых p-адических струн (см. [1]-[3]). Рассматриваемое уравнение является в некотором смысле дальнейшим обобщением уравнения с $\lambda(x,t) \equiv 1$ и с ядром вида

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

изученного академиком В. С. Владимировым и Я. И. Воловичем в работе [2]. В работе [4] одного из авторов это уравнение (и соответствующее двухмерное уравнение) исследовалось также в случае $\lambda(x,t) \equiv 1$, но с ядром K, удовлетворяющим только условиям $(a)-(c)$. В настоящей работе доказывается существование нетривиального непрерывного нечетного и ограниченного решения на всей числовой оси. Вычислены пределы построенного решения в $\pm\infty$. При некоторых дополнительных ограничениях устанавливается и единственность построенного решения в определенном классе непрерывных функций. В конце работы приводятся примеры функций $\lambda(x,t)$ и $K(x)$, удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем.

2. Существование нетривиального нечетного непрерывного и ограниченного решения на всей числовой оси

Сначала докажем ключевую лемму, которая будет использована при доказательстве теоремы существования нетривиального решения уравнения (1.1) на всей числовой оси. С этой целью рассмотрим следующее вспомогательное линейное однородное уравнение Вольтерра:

$$\mathscr{B}(x) = \int\limits_x^\infty \lambda(x,t)\big(V(t-x) - V(x+t)\big)\mathscr{B}(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

относительно функции $\mathscr{B}(x)$, где

$$V(\tau) = 2K(\tau), \ \ \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *При выполнении условий $(a)-(d)$ уравнение (2.1) обладает неотрицательным нетривиальным непрерывным и ограниченным на полуоси $\mathbb{R}^+$ решением $\mathscr{B}(x)$ с асимптотикой в бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{B}(x) = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим следующее линейное неоднородное уравнение Вольтерра:

$$\psi(x) = g(x) + \int\limits_x^\infty \lambda(x,t)\big(V(t-x) - V(t+x)\big)\psi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$

со специальным свободным членом

$$g(x) \equiv \int\limits_x^\infty \big(1 - \lambda(x,t)\big)V(t-x)\,dt + \int\limits_x^\infty V(t+x)\,\lambda(x,t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4}$$

Из свойств (b) и (c) ядра K легко следует, что

$$K(x-t) \geq K(x+t), \ \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{2.5}$$

На основании (2.2), (2.5) и первого свойства (c) ядра K имеем:

$$V(t-x) \geq V(x+t), \ \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{2.6}$$

А с учетом свойств (c) и (d) из (2.4) нетрудно убедиться, что свободный член обладает следующими свойствами:

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+); \;\; m_1(g) \equiv \int_0^\infty xg(x)dx < +\infty. \tag{2.7}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\psi_0(x) \equiv 1$ — решение уравнения (2.3). Докажем, что, кроме указанного решения, оно обладает также и суммируемым ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\psi_1(x)$. С этой целью рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\psi^{(n+1)}(x) = g(x) + \int_x^\infty \lambda(x,t)\big(V(t-x) - V(t+x)\big)\,\psi^{(n)}(t)\,dt, \;\; n = 0,1,2,\dots \tag{2.8}$$

с нулевым приближением $\quad \psi^{(0)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

Индукцией по n легко можно доказать, что последовательность функций $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ для $\forall x \in \mathbb{R}^+$ возрастает по n :

$$\psi^{(n)}(x) \quad \uparrow \quad \text{по} \quad n. \tag{2.9}$$

Ниже покажем, что эта последовательность функций также ограничена сверху некоторой суммируемой на $\mathbb{R}^+$ функцией. Наряду с уравнением (2.3) рассмотрим следующее консервативное уравнение восстановления:

$$\tilde{\psi}(x) = g(x) + \int_x^\infty V(t-x)\,\tilde{\psi}(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Учитывая результаты работы [5], заключаем, что уравнение (2.10) со свободным членом g структуры (2.4) и со свойствами (2.7), с ядром V структуры (2.2) и со свойствами $(a)-(c)$ обладает неотрицательным суммируемым ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\tilde{\psi}(x)$.

Индукцией по n докажем, что для $\forall x \in \mathbb{R}^+$ имеет место оценка:

$$\psi^{(n)}(x) \leqslant \tilde{\psi}(x), \;\; n = 0,1,2,\dots\,. \tag{2.11}$$

Действительно, в случае $n = 0$ неравенство (2.11) сразу следует из (2.10) в силу неотрицательности функций V и $\tilde{\psi}$. Далее, пусть (2.11) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду свойство (d), неравенство (2.6) и неотрицательность ядерной функции V, из (2.8) имеем:

$$\psi^{(n+1)}(x) \leqslant g(x) + \int_x^\infty \lambda(x,t)\big(V(t-x) - V(t+x)\big)\,\tilde{\psi}(t)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant g(x) + \int_x^\infty V(t-x)\,\tilde{\psi}(t)\,dt = \tilde{\psi}(x).$$

Применив вновь метод индукции по n, легко убеждаемся, что

$$\psi^{(n)}(x) \leqslant 1, \;\; x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \psi^{(n)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0,1,2,\dots\,.$$

Следовательно, на основании (2.9) и (2.11) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \psi^{(n)}(x) = \psi(x),$$

более того, для предельной функции имеют место следующие оценки:

$$\psi(x) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad g(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.12}$$

Так как поточечный предел измеримых функций является измеримым (см. [6]), то предельная функция ψ измерима. Поскольку $\tilde{\psi} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то согласно неравенству (2.12) можем утверждать, что и

$$\psi \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+). \tag{2.13}$$

Очевидно, что функция

$$\mathscr{B}(x) = 1 - \psi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.14}$$

является нетривиальным решением однородного уравнения (2.1). Принимая во внимание, что $\lambda \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $V \in C(\mathbb{R}^+)$, из (2.1), (2.13) и (2.14) следует, что

$$\mathscr{B} \in C(\mathbb{R}^+), \tag{2.15}$$

а $1 - \mathscr{B} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Убедимся, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{B}(x) = 1$. Действительно, на основании формулы (2.2) и свойств $(b), (d)$ из уравнения (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1-\mathscr{B}(x) &= \int\limits_x^\infty \big(1 - \lambda(x,t)\big) V(t-x)\,dt + \int\limits_{2x}^\infty V(\tau)\,d\tau \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_x^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \big(1 - \lambda(x,t)\big) V(t-x)\,dt + \int\limits_{2x}^\infty V(\tau)\,d\tau \leqslant \\ &\leqslant C \int\limits_x^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \big(1 - \lambda(x,t)\big)\,dt + \int\limits_{2x}^\infty V(\tau)\,d\tau \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \end{aligned}$$

где $C \equiv \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} V(x)$. Таким образом, лемма доказана. □

Теперь перейдем к формулировке и доказательству первого основного результата.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* $(a) - (d)$, *то уравнение* (1.1) *обладает нетривиальным нечетным непрерывным и ограниченным решением на всей числовой оси* $\mathbb{R}$, *причем*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm 1.$$

Более того, если для функции K *имеет место строгое неравенство:* $K(\tau) > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, *то*

$$1 - \varphi \in L_1(0, +\infty), \quad 1 + \varphi \in L_1(-\infty, 0).$$

Доказательство. Шаг I. Прямой проверкой легко убедиться, что если $f(x)$ — непрерывное на $\mathbb{R}^+$ решение следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$f^p(x) = \int\limits_0^\infty \lambda(x,t)\,\big(K(x-t) - K(x+t)\big)\, f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.16}$$

то

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ -f(-x), & \text{если } x < 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

— нечетное и непрерывное решение уравнения (1.1).

Полагая

$$S(x) = f^p(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.18}$$

сведем изучение уравнения (2.16) к изучению нелинейного интегрального уравнения с суммарно-разностным ядром на полуоси относительно функции $S(x)$:

$$S(x) = \int_0^\infty \lambda(x,t)\left(K(x-t) - K(x+t)\right) S^\alpha(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.19}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{p} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{2.20}$$

Шаг II. Для уравнения (2.19) рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{gathered} S_{n+1}(x) = \int_0^\infty \lambda(x,t)\left(K(x-t) - K(x+t)\right) S_n^\alpha(t)\,dt, \\ S_0(x) \equiv 1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Используя (2.5) и условия $(b)-(d)$, индукцией по n можно несложно доказать, что

$$S_n(x) \;\downarrow\; \text{по} \;\; n. \tag{2.22}$$

Теперь докажем, что для любого $n = 0,1,2,\ldots$ имеет место следующее неравенство:

$$S_n(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathscr{B}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.23}$$

В случае $n = 0$ справедливость неравенства (2.23) непосредственно следует из (2.14). Предположим (2.23) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом (2.5), (2.2), (2.14) и (2.1) из (2.21) имеем:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty \lambda(x,t)\left(K(x-t) - K(x+t)\right) \mathscr{B}^\alpha(t)\,dt \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_x^\infty \lambda(x,t)\left(K(x-t) - K(x+t)\right) \mathscr{B}(t)\,dt \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2}\mathscr{B}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathscr{B}(x). \end{aligned}$$

Индукцией по n можно также проверить, что

$$S_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.24}$$

Следовательно, на основании (2.22) и (2.23) последовательность функций $\{S_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, причем предельная функция согласно теореме Б. Леви (см. [6]) является решением уравнения (2.19) и удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathscr{B}(x) \leqslant S(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.25}$$

Принимая во внимание (a), из (2.19) и (2.24) приходим к тому, что

$$S \in C(\mathbb{R}^+). \tag{2.26}$$

Тогда на основании (2.24), (2.26) и теоремы Дини сходимость последовательности функций $\{S_n(x)\}_{n=0}^\infty$ в каждом компакте из $\mathbb{R}^+$ равномерна.

Шаг III. Целью этого шага является доказательство дополнительного свойства построенного решения S :

$$1 - S \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{2.27}$$

Сперва с учетом неравенства (2.23) заметим, что

$$S_n^{\frac{1}{p}}(t)+S_n^{\frac{2}{p}}(t)+\cdots+S_n^{\frac{p-1}{p}}(t)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathscr{B}^{\,\frac{1}{p}}(t)+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}}\mathscr{B}^{\,\frac{2}{p}}(t)+...+\frac{1}{2}\mathscr{B}^{\,\frac{p-1}{p}}(t). \tag{2.28}$$

Теперь воспользуемся леммой 2.1. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathscr{B}(t)=1$, $\mathscr{B}(t)\leqslant 1$ и $\mathscr{B}\in C(\mathbb{R}^+)$, то при всяком $\varepsilon>0$ существует число $r>0$ такое, что при $t>r$ выполняется неравенство $|1-\mathscr{B}(t)|\leqslant\varepsilon$. Тогда, в частности, для $\varepsilon=\frac{1}{2}$ существует число $r_0>0$ такое, что

$$0\leqslant 1-\mathscr{B}(t)\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{при}\ \ t\geq r_0$$

или

$$\frac{1}{2}\leqslant\mathscr{B}(t)\leqslant 1\quad\text{при}\ \ t\geq r_0. \tag{2.29}$$

Учитывая неравенство (2.29), из (2.28) получаем, что при $t\geq r_0$

$$\begin{aligned}&1+S_n^{\frac{1}{p}}(t)+S_n^{\frac{2}{p}}(t)+\cdots+S_n^{\frac{p-1}{p}}(t)\geq\\ \geq\ &1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{p}}+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-1}{p}}=\\ =\ &\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p-1}{p-1}}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p-1}{p(p-1)}}\right)^{-1}\equiv\rho_1>1.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Индукцией по n можно легко доказать, что

$$1-S_n\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad n=0,1,2,\ldots\,. \tag{2.31}$$

Имея ввиду свойства (b) ядра K, перепишем итерации (2.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned}1-S_{n+1}(x)&=\int\limits_0^\infty\big(1-\lambda(x,t)\,S_n^\alpha(t)\big)\,K(x-t)\,dt+\\ &+\int\limits_0^\infty\lambda(x,t)\,K(x+t)\,S_n^\alpha(t)\,dt+\int\limits_x^\infty K(\tau)\,d\tau,\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$S_0(x)=1,\ n=0,1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1$ и $K(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$, то имеет место неравенство

$$\rho_0\equiv\int\limits_{-\infty}^{r_0}K(y)dy<1. \tag{2.33}$$

Учитывая (2.30), (2.31), (2.33) и условия $(b)-(d)$, из (2.32) на основании теоремы Фубини имеем:

$$\int\limits_0^\infty\big(1-S_{n+1}(x)\big)\,dx=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\big(1-\lambda(x,t)\,S_n^\alpha(t)\big)\,K(x-t)\,dt\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\lambda(x,t)\,K(x+t)\,S_n^\alpha(t)\,dt\,dx+\int\limits_0^\infty\int\limits_x^\infty K(t)\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty \big(1-\lambda(x,t)\big)\,K(x-t)\,dt\,dx + \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(x,t)\,K(x-t)\,\big(1-S_n^\alpha(t)\big)\,dt\,dx+$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty K(x+t)\,dt\,dx + \int_0^\infty t\,K(t)\,dt \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty \big(1-\lambda(x,t)\big)\,K(x-t)\,dx\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\infty K(x-t)\,\big(1-S_n^\alpha(t)\big)\,dx\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\int_0^\infty K(x-t)\,dx\,dt + \int_0^\infty \big(1-S_n^\alpha(t)\big)\int_{-\infty}^t K(u)\,du\,dt+$$

$$+2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{1-S_n(t)}{1+S_n^{\frac{1}{p}}(t)+S_n^{\frac{2}{p}}(t)+\cdots+S_n^{\frac{p-1}{p}}(t)}\int_{-\infty}^t K(u)\,du\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt =$$

$$=\int_0^{r_0} \frac{1-S_n(t)}{1+S_n^{\frac{1}{p}}(t)+S_n^{\frac{2}{p}}(t)+\cdots+S_n^{\frac{p-1}{p}}(t)}\int_{-\infty}^t K(u)\,du\,dt+$$

$$+\int_{r_0}^\infty \frac{1-S_n(t)}{1+S_n^{\frac{1}{p}}(t)+S_n^{\frac{2}{p}}(t)+\cdots+S_n^{\frac{p-1}{p}}(t)}\int_{-\infty}^t K(u)\,du\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt \leqslant \rho_0\int_0^{r_0}\big(1-S_n(t)\big)\,dt + \frac{1}{\rho_1}\int_{r_0}^\infty \big(1-S_n(t)\big)\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt \leqslant \max\left(\rho_0,\frac{1}{\rho_1}\right)\int_0^\infty \big(1-S_{n+1}(t)\big)\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt.$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \big(1-S_{n+1}(x)\big)\,dx \leqslant \left(1-\max\left(\rho_0,\frac{1}{\rho_1}\right)\right)^{-1}\times\\ &\times\left(\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K\,(t)\,dt\right),\quad n=0,1,2,\ldots\,.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Итак, с учетом (2.22), (2.34) и теоремы Б. Леви убеждаемся в справедливости (2.27), а также получаем следующую оценку сверху:

$$\int_0^\infty \big(1-S(x)\big)\,dx \leqslant \left(1-\max\left(\rho_0,\frac{1}{\rho_1}\right)\right)^{-1}\left(\int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,dt + 2\int_0^\infty t\,K(t)\,dt\right). \quad (2.35)$$

Шаг IV. На последнем шаге докажем последнее утверждение теоремы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\pm 1,\quad 1-\varphi\in L_1(0,+\infty),\quad 1+\varphi\in L_1(-\infty,0). \quad (2.36)$$

Поэтому сперва покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)=1$. Действительно, с учетом (2.25), (2.27) и $(b)-(d)$ из (2.19) следует, что

$$0\leqslant 1-S(x)\leqslant \int_0^\infty \big(1-\lambda(x,t)\big)\,K(x-t)\,dt+\int_0^\infty \lambda(x,t)\,K(x-t)\,\big(1-S^\alpha(t)\big)\,dt+2\int_x^\infty K(u)\,du\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big(1-\lambda(x,t)\big)\,K(x-t)\,dt+\int_0^\infty K(x-t)\,\big(1-S(t)\big)\,dt+2\int_x^\infty K(u)\,du \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

поскольку свертка одновременно суммируемых и ограниченных функций стремится к нулю в бесконечности (см. [7]). Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)=1$. Тогда из (2.18) получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1. \quad (2.37)$$

Более того, из (2.18) с учетом (2.27) и следующего простого неравенства:

$$0\leqslant 1-f(x)\leqslant 1-f^p(x),\quad x\in\mathbb{R}^+$$

следует, что $1-f\in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Наконец, принимая во внимание непрерывность функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^+$, а также формулы (2.17) и (2.37), приходим к (2.36). Теорема доказана. □

3. Единственность решения уравнения (1.1) в одном частном случае

Ниже докажем три вспомогательные леммы, используемые при дальнейшем изложении.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Гаммерштейна-Вольтерра со степенной нелинейностью:

$$h(x)=\int_x^\infty \lambda(x,t)\big(K(t-x)-K(t+x)\big)h^\alpha(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

относительно искомой функции $h(x)$. Имеет место следующая

Лемма 3.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 уравнение* (3.1) *обладает неотрицательным непрерывным и ограниченным решением $h(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x)&=\int_x^\infty \lambda(x,t)\big(K(t-x)-K(t+x)\big)\,h_n^\alpha(t)dt;\\ h_0(x)&=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ n=0,1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Индукцией нетрудно доказать, что функции последовательности $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

$$h_n(x)\downarrow \text{ по } n, \tag{3.3}$$

$$h_n(x)\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\mathscr{B}(x),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

$$h_n\in C(\mathbb{R}^+),\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{3.5}$$

где $\mathscr{B}(x)$ — решение однородного уравнения (2.1) с асимптотикой в бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{B}(x)=1$. Следовательно, последовательность непрерывных функций $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n\to+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)$. Согласно теоремы Б. Леви предельная функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1), причем имеют место оценки сверху и снизу:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\mathscr{B}(x)\leqslant h(x)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.6}$$

Тогда, имея ввиду (3.6) и непрерывность функций λ и K, из (3.1) следует, что $h\in C(\mathbb{R}^+)$. Лемма доказана. □

Теперь убедимся, что если λ — *монотонно неубывающая функция по совокупности переменных* (x,t), т. е.

$$\text{при } (x_i,t_i)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\ i=1,2\quad\text{и}\quad x_1>x_2,\ t_1>t_2$$

справедливо неравенство

$$\lambda(x_1,t_1)\geq\lambda(x_2,t_2),$$

то построенное решение также является монотонно неубывающим. А именно, справедлива

Лемма 3.2. *Если выполнены условия леммы 3.1 и функция λ — монотонно неубывающая по совокупности переменных, то построенное решение $h(x)$ уравнения (3.1) — также монотонно неубывающее, причем имеет место следующее неравенство снизу:*

$$h^{\frac{p-1}{p}}(x)\geq\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2}-Q(2x)\right),\qquad x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.7}$$

где

$$Q(\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{\infty}K(u)du,\quad \tau\in\mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Доказательство. Итерации (3.2) перепишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}h_{n+1}(x)=\int\limits_0^{\infty}\lambda(x,x+\tau)\big(K(\tau)-K(2x+\tau)\big)\,h_n^{\alpha}(x+\tau)\,d\tau,\\ h_0(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad n=0,1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R}^+.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Монотонность нулевого приближения сразу следует из (3.9). Предположим, что $h_n(x)\uparrow$ по x при некотором фиксированном $n\in\mathbb{N}$. Тогда, если $x_1,\,x_2\in\mathbb{R}^+$ и $x_1>x_2$,, то, имея ввиду свойство монотонности по совокупности переменных функции λ, свойства (b), (c) ядра K и индукционное предположение, из (3.9) имеем:

$$h_{n+1}(x_1) - h_{n+1}(x_2) = \int\limits_0^\infty \lambda(x_1, x_1+\tau)\Big(K(\tau) - K(2x_1+\tau)\Big)\, h_n^\alpha(x_1+\tau)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^\infty \lambda(x_2, x_2+\tau)\Big(K(\tau) - K(2x_2+\tau)\Big)\, h_n^\alpha(x_2+\tau) d\tau \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty \Big(\lambda(x_1, x_1+\tau) - \lambda(x_2, x_2+\tau)\Big)\Big(K(\tau) - K(2x_2+\tau)\Big)\, h_n^\alpha(x_2+\tau)\, d\tau \geq 0,$$

т. е. $h_{n+1}(x_1) \geq h_{n+1}(x_2)$. Таким образом, монотонность по x каждой функции последовательности $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ установлена. Тогда и предельная функция h является монотонно неубывающей. С учетом и монотонности по совокупности переменных функции λ из (3.1) получаем

$$h(x) \geq h^\alpha(x) \int\limits_x^\infty \lambda(x,t)\big(K(t-x) - K(t+x)\big)\, dt \geq h^\alpha(x)\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right),$$

ибо $\int\limits_0^\infty K(t)dt = \frac{1}{2}$. Из последнего неравенства приходим к (3.7). Лемма доказана. □

В следующей лемме докажем, что если функция λ — монотонно неубывающая по совокупности переменных, то построенное посредством последовательных приближений (2.21) решение $S(x)$ снизу удовлетворяет следующему неравенству:

$$S(x) \geq \left(\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

Имеет место

Лемма 3.3. *При условиях леммы 3.2 для решения* $S(x)$ *уравнения* (2.19)*, построенного при помощи итераций* (2.21)*, имеет место оценка* (3.10)*.*

Доказательство. Рассмотрим итерации (2.21). Индукцией по n легко можно доказать, что

$$S_n(x) \geq h(x),\ n = 0, 1, 2, ..., \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.11}$$

Следовательно, для предельной функции $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ имеет место неравенство:

$$S(x) \geq h(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.12}$$

Учитывая (3.12) и (3.7), приходим к завершению доказательства. □

Теперь можем перейти к доказательству теоремы единственности решения, являющейся вторым основным результатом данной работы.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия леммы 3.2. Тогда, если*

$$\lambda(x,x)\Big(1 - 2Q(2x)\Big) > 1 - 2Q(x), \quad x > 0, \tag{3.13}$$

то решение уравнения (2.16) *единственно в следующие классе непрерывных на* $\mathbb{R}^+$ *функций:*

$$\mathfrak{M} \equiv \left\{ f(x) \;\middle|\; \left(\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2} - Q(2x)\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^+; \quad 1 - f \in L_1(\mathbb{R}^+) \right\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (2.16) имеет два решения $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}$. Тогда согласно теоремы Лагранжа о конечных приращениях и (3.14) из (2.16) имеем:

$$p\,\lambda(x,x)\left(\frac{1}{2}-Q(2x)\right)\Big|f_1(x)-f_2(x)\Big| \leqslant \int\limits_0^\infty \lambda(x,t)\left(K(x-t)-K(x+t)\right)\Big|f_1(t)-f_2(t)\Big|\,dt. \quad (3.15)$$

Из (3.14) непосредственно следует, что $f_1 - f_2 \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Интегрируя обе части (3.15) по x в пределах от 0 до $+\infty$, при этом учитывая условия $(b)-(d)$ и теорему Фубини, получаем

$$p\int\limits_0^\infty \lambda(x,x)\left(\frac{1}{2}-Q(2x)\right)\,\Big|f_1(x)-f_2(x)\Big|dx \leqslant \int\limits_0^\infty \Big|f_1(t)-f_2(t)\Big|\Big(1-2Q(t)\Big)\,dt,$$

откуда в силу условия $p > 2$ приходим к неравенству:

$$\int\limits_0^\infty \Big|f_1(x)-f_2(x)\Big|\,\Big(\lambda(x,x)\left(1-2Q(2x)\right)-\left(1-2Q(x)\right)\Big)\,dx \leqslant 0. \quad (3.16)$$

Учитывая (3.13), из (3.16) получим, что $f_1(x) = f_2(x)$ п. в. в $\mathbb{R}^+$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1. Так как в уравнении (1.1) искомая функция является нечетной и удовлетворяет граничным условиям $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = \pm 1$, то на основании формулы (2.17) и теоремы 3.1 заключаем, что граничная задача для уравнения (1.1) относительно нечетной непрерывной на $\mathbb{R}$ функции φ:

$$\begin{cases} \varphi^p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\big(|x|,|t|\big)\,K(x-t)\varphi(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}, \\ \varphi(\pm\infty) = \pm 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение в следующем классе нечетных непрерывных функций:

$$\mathfrak{P} \equiv \left\{\varphi(x)\ \middle|\ \varphi\in C(\mathbb{R});\ \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если}\quad x \geq 0, \\ -f(-x), & \text{если}\quad x < 0; \end{cases}\quad f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Замечание 3.2. Отметим, что решение уравнения (1.1) принимает на неотрицательной полуоси неотрицательные значения.

Замечание 3.3. Примеры функций $\lambda(x,t)$ и $K(x)$, удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем:

$$\lambda(x,t) = 1-\varepsilon e^{-x}e^{-t},\ \ \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\ \ (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \quad (3.17)$$

$$K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x\in\mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Очевидно, что ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям $(a)-(c)$. Прямой проверкой можно убедиться, что λ удовлетворяет условиям $(a), (d)$ и условию монотонности по совокупности аргументов.

Ниже докажем, что когда функции λ и K допускают представления (3.17) и (3.18), выполняется неравенство (3.13). Заметим, что в этом случае оценка (3.13) принимает следующий вид:

$$(1-e^{-2x})(1-\varepsilon e^{-2x}) > 1-e^{-x},\quad x>0. \quad (3.19)$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$e^x + \varepsilon e^{-2x} > \varepsilon + 1,\ x > 0. \quad (3.20)$$

Рассмотрим функцию

$$G(x) = e^x + \varepsilon e^{-2x} - (\varepsilon+1),\quad x>0.$$

Очевидно, что

$$G(+0) = 0, \quad G'(x) = e^x - 2\varepsilon e^{-2x} = e^{-2x}(e^{3x} - 2\varepsilon) \; > \; e^{-2x}(1 - 2\varepsilon) > 0$$

при $x > 0$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Итак, неравенство (3.20) имеет место, а, следовательно, и (3.19).

Замечание 3.4. В случае когда $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ и $\lambda(x,t) \equiv 1$, нетрудно заметить, что условие (3.13) также выполнено.

Выражаем благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. *О нелинейных уравнениях p-адических открытых замкнутых и открыто-замкнутых струны* // Теор. матем. физика. 2006. Т. 149. № 3. С. 354–367.
2. V. Vladimirov, Ya. Volovich *Nonlinear dynamics equation in p−adic string theory* // Theoret. and Math. Phys. 2004. V. 138. No. 3. P. 297–309.
3. V. Vladimirov *The equation of the p−adic open string for the scalar tachyon field* // Izv. Mathematics. 2005. V. 69. No. 3. P. 487–512.
4. Хачатрян Х.А. *О разрешимости одного класса двумерных интегральных уравнений Урысона на четверти плоскости* // Матем. труды. 2017. Т. 20. № 2. С. 193–205.
5. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения* //Итоги науки и техники, Мат. анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
6. Колмогоров А.Н., Фомин В.С. *Элементы теории функций и функционального анализа* // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 572 с.
7. Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С. *Об одном классе интегральных уравнений типа свертки* // Матем. сборник. 2007. Т. 198. № 7. С. 45–621.

Сильва Михайловна Андриян,
Национальный аграрный университет Армении,
ул. Теряна, 73,
0009, г. Ереван, Республика Армения
E-mail: smandriyan@hotmail.com

Арпеник Коляевна Кроян,
Национальный аграрный университет Армении,
ул. Теряна, 73,
0009, г. Ереван, Республика Армения
E-mail: arpi.kroyan.2013@mail.ru

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт математики НАН Армении,
пр.-т Маршала Баграмяна, 24/5,
0009, г. Ереван, Республика Армения
E-mail: Khach82@rambler.ru