

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СКОЛЬЗЯЩИХ ДВИЖЕНИЙ ПО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

С.А. КОЧЕТКОВ, С.А. КРАСНОВА, В.А. УТКИН

Аннотация. В работе рассматриваются объекты управления, описываемые системой дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. В случае идеальных релейных элементов в таких системах может возникать идеальный скользящий режим, в котором поведение системы описывается системой дифференциальных уравнений пониженного порядка. Задача описания движения в скользящем режиме не является тривиальной, поскольку на многообразии скольжения правая часть дифференциальных уравнений не удовлетворяет условиям Липшица и Каратеодори. В данной работе предложен новый метод регуляризации скользящих движений с учетом ряда неидеальностей релейных элементов. Данный подход позволяет локализовать точки разрыва и получить решение в смысле Каратеодори. Показано, что за счет увеличения коэффициентов обратной связи возможно осуществить регуляризацию скользящих движений с точностью до бесконечно малой.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, скользящие режимы, регуляризация задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема, связанная с доопределением решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, возникла в середине XX века. Одновременно с решением данной задачи в чисто математической постановке (например, см. [1], [2]), где правая часть уравнений предполагается разрывной в исходной постановке, разрабатывалась теория систем с переменной структурой (например, см. [3], [4]), где преднамеренно организовывался скользящий режим за счет целенаправленного синтеза управлений в классе разрывных функций.

В данной работе рассматриваются объекты управления, описываемые системой дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. В случае идеальных релейных элементов в таких системах может возникать идеальный скользящий режим, в котором происходит редукция порядка системы. Проблема состоит в том, что при возникновении скользящих режимов производная вектора состояния системы не удовлетворяет условию Липшица, при этом точки разрыва не являются локальными, а принадлежат некоторому многообразию скольжения. Возникает задача доопределения решений при движении по поверхности скольжения. Один из известных подходов к решению этой задачи состоит во введении пограничного слоя в окрестности многообразия скольжения (обусловленного, в частности, неидеальностями релейных элементов) и получения описания движения в скользящем режиме при стремлении пограничного слоя к нулю. Наличие нелинейностей в релейных элементах приводит к тому, что в замкнутой системе возникает реальный

S.A. Kochetkov, S.A. Krasnova, V.A. Utkin RE-DETERMINATION MOTION IN SLIDING MODE BY USING FEEDBACK.

© Кочетков С.А., Краснова С.А., Уткин В.А. 2009.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 09-08-00429-а), а также грантом Президента (МК-2548.2009.8).

Поступила 8 октября 2009 г.

скользящий режим в некоторой окрестности многообразия скольжения. В данной работе предложен другой подход к синтезу скользящих движений и регуляризации поставленной задачи на основе выбора параметров обратной связи, позволяющих обеспечить стремление пограничного слоя к нулю.

Учитывая, что последняя русскоязычная публикация по теории скользящих режимов (например, см. [4]) вышла почти тридцать лет назад, в разделе 2 приводятся основные положения теории скользящих режимов, на которых основывается дальнейшее изложение и аргументируется постановка задачи. Вводятся неидеальности различного типа релейных элементов, из-за которых движение системы происходит в некоторой Δ -окрестности многообразия скольжения. В разделе 3, следуя эффективному методу регуляризации разрывных систем с использованием пограничного слоя (например, см. [4]), в терминах переходных процессов, разделенных во времени на этап попадания в пограничный слой и движения в нем, показывается, что при стремлении пограничного слоя к нулю движение в скользящем режиме описывается методом эквивалентного управления. Очевидный факт, который заключается в том, что с увеличением коэффициента усиления на входе неидеального реле его характеристика стремится к идеальному реле, позволяет параметризовать величину пограничного слоя по обратной связи. Показано, что в пределе осуществляется регуляризация задачи описания скользящих движений, которая совпадает с известными результатами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается разрывная система управления, математическая модель которой описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (1)$$

где $x \in X \subset R^n$, $f : X \rightarrow R^n$, элементы вектор-функции $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы относительно всех аргументов и ограничены, $u \in U \subset R^p$, $\text{rank } B(x_1, s) = p$, $\forall x \in X$, X – ограниченное открытое множество, U – замкнутое непустое множество.

При разрывном управляющем воздействии u решение системы (1) полагается почти всюду удовлетворяющим условию

$$\dot{x}(t) \in \text{cl } \text{co}(f(x) + B(x)U),$$

где $\text{cl } \text{co}$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку.

В известных предположениях о гладкости правой части системы (1) (например, см. [5]) предполагается, что существует такое диффеоморфное гладкое преобразование координат

$$(x_1, x_2) = \varphi(x), \quad (x_1, x_2) \in X^* \subset R^n,$$

что система (1) может быть приведена к так называемой регулярной форме (например, см. [6])

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2) + B_2^*(x_1, x_2)u, \end{aligned}$$

где $x_1 \in X_1 \subset R^{n-p}$, $x_2 \in X_2 \subset R^p$, $\text{rank } B_2^*(x_1, x_2) = p$, $\forall x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ вектор-функции $g_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow R^{n-p}$, $g_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow R^p$, $\varphi : X \rightarrow R^n$. Элементы вектор-функций $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ предполагаются ограниченными липшицевыми функциями всех аргументов. X_1 , X_2 – ограниченные открытые множества.

Пусть управляющие воздействия u_i ($i = \overline{1, p}$) претерпевают разрывы на многообразии

$$s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0, \quad (2)$$

где $s : X_1 \times X_2 \rightarrow R^p$, $s_0 : X_1 \rightarrow R^p$. $s(x_1, x_2)$, $s_0(x_1)$ – гладкие вектор-функции. Выбор $s_0(x_1)$ поясним ниже.

Переписывая уравнения относительно переменных x_1, s , находим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, s), \\ \dot{s} &= f_2(x_1, s) + B_2(x_1, s)u, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f_1(x_1, s) = g_1(x_1, s - s_0(x_1))$, $f_2(x_1, s) = g_2(x_1, s - s_0(x_1)) + \frac{\partial s_0(x_1)}{\partial x_1} g_1(x_1, s - s_0(x_1))$, $\text{rank} B_2^*(x_1, x_2) = \text{rank} B_2(x_1, s) = p$.

Для упрощения процедуры синтеза можно воспользоваться свойством инвариантности движения в скользящем режиме как к диффеоморфному преобразованию поверхности скольжения, так и к диффеоморфному преобразованию вектора управляющих воздействий (например, см. [4]). В первом случае с помощью неособой замены преобразуется вектор многообразия $s' = \Omega(x_1, s)s$, где во втором уравнении (3) после замены переменных матрица

$$\left(\frac{\partial \Omega(x_1, s)}{\partial s} + \Omega(x_1, s) \right) B_2(x_1, s)$$

является диагональной. Здесь и далее все рассуждения справедливы только для указанных областей изменения переменных $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Во втором случае преобразуется вектор управлений с целью получить диагональную матрицу перед управляющими воздействиями вида $u = T_u(x_1, s)v$, где матрица $B_2(x_1, s)T_u(x_1, s)$ является диагональной.

Учитывая указанное выше свойство инвариантности, можно всегда свести исходную задачу к проблеме синтеза управляющих воздействий для преобразованной системы, в которой матрица перед управлениями является единичной. Поскольку $\text{rank} B_2(x_1, s) = p$, то для простоты выберем управление в виде

$$u = B_2^{-1}(x_1, s)v \quad (4)$$

и запишем уравнения замкнутой системы (4), (3):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, s), \\ \dot{s} &= f_2(x_1, s) + v. \end{aligned} \quad (5)$$

Для организации скользящего режима¹ по многообразию (2) решается задача стабилизации второго уравнения системы (5) с помощью выбора управляющих воздействий $v_i, i = \overline{1, p}$ в виде разрывных функций

$$v_i = -M_i \text{sign}(s_i), \quad M_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (6)$$

Достаточные условия возникновения скользящего режима по каждой компоненте s_i вектора s (2) имеют вид неравенств (например, см. [4])

$$s_i \dot{s}_i < 0, \quad i = \overline{1, p},$$

из которых получают нижнюю оценку для выбора амплитуд разрывных управлений

$$M_i > |f_{2i}(x_1, s)|, \quad i = \overline{1, p},$$

где $f_{2i}(x_1, s)$ – i -й элемент вектор-функции $f_2(x_1, s)$.

При попадании на многообразие скольжения $s(x) = 0$ понижается динамический порядок исходной системы (5), которая в скользящем режиме описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, 0) = g_1(x_1, -s_0(x_1)), \quad s = 0, \quad (7)$$

где выбором вектор-функции $s_0(x_1)$ можно обеспечить желаемые характеристики переходного процесса замкнутой системы.

¹отметим, что термин “скользящий режим”, используемый в данной работе не совпадает с возникающими в задачах оптимального управления скользящими движениями (например, см. [4])

Выше рассматривались вопросы организации скользящих движений с использованием идеальной релейной характеристики (6) и, соответственно, движение системы (5) происходило по многообразию скольжения (2). В следующем разделе вводится широкий класс релейных элементов с различными типами неидеальностей. Показано, что движение в реальном скользящем режиме принадлежит некоторой окрестности многообразия скольжения, величина которой параметризуется выбором коэффициента усиления на входе реле. Таким образом, ставится задача описания движения системы вида (5) при наличии нелинейностей исполнительных устройств и регуляризации скользящих движений, получаемых в результате предельного перехода.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Основной проблемой при описании движения системы в скользящем режиме является неопределенность вектора фазовых скоростей на поверхностях разрыва. Существует два основных подхода к доопределению движения на множестве $s = 0$. Согласно первому аксиоматическому подходу движения на поверхности разрыва не определены, известно только, что вектор скорости лежит в касательной плоскости, поэтому возможны любые способы доопределения движения в скользящем режиме (например, см. [1], [2], [7]). При другом подходе более точно доопределяется модель замкнутой системы, которая учитывает любые возможные неидеальности. В этом случае точки разрыва в правых частях дифференциальных уравнений полагались изолированными, и для конкретных неидеальностей оказалось возможным описать поведение системы с помощью хорошо известных методов припасовывания и усреднения (например, см. [8], [9]). Такой подход получил название „физического“, при этом идеальный скользящий режим трактуется как предельный случай реального при стремлении к нулю всех неидеальностей. Существенный недостаток этого подхода связан с необходимостью рассмотрения конкретных неидеальностей модели, для каждой из которых необходимо выполнить достаточно трудоемкие предельные переходы. Поэтому в свое время была предложена концепция пограничного слоя (например, см. [4]). Согласно этой концепции разрывное управление в некоторой Δ -окрестности поверхности скольжения заменялось некоторой гладкой функцией так, чтобы решение системы (5) существовало. Движения в идеальном скользящем режиме трактовались как предельный случай при $\Delta \rightarrow 0$. Применение данной концепции позволило описать движение в скользящем режиме, абстрагируясь от природы неидеальностей. Однако не было указано (например, см. [4]), за счет чего возможно устремление величины пограничного слоя к нулю. В данном разделе описывается новый метод регуляризации скользящих движений за счет выбора обратной связи.

Вместе с системой в регулярной форме (5) рассмотрим неидеальную систему также в регулярной форме в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= f_1(x_1^*, s^*), \\ \dot{s}^* &= f_2(x_1^*, s^*) + \tilde{v}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_1^* \in R^{n-p}$, $s^* \in R^p$, $\tilde{v} \in R^p$, $\tilde{v} = -\overline{\text{sign}(ls^*)}$ — управляющее воздействие, в котором учтены различные неидеальности релейных элементов, в том числе и несимметричность переключения вида (см. рис. 1):

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} -M^1 & , \quad s_i^* > \Delta_1/l; \\ M^2 & , \quad s_i^* < -\Delta_2/l, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases}$$

где $M^1, M^2 > 0$, $l > 0$, $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2$.

На рис. 1 представлены примеры характеристик переключения исполнительных устройств, содержащие различные нелинейности.

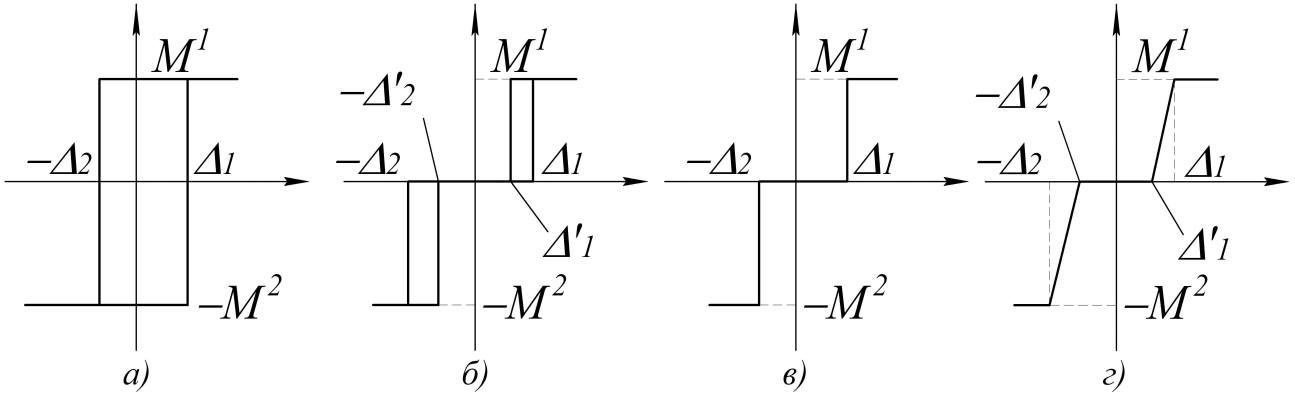


РИС. 1. Характеристики переключения исполнительного устройства: а – гистерезис; б – гистерезис с зоной нечувствительности; в – зона нечувствительности; г – усилитель с зоной нечувствительности

Одним из основных свойств систем с преднамеренной организацией скользящих режимов является конечность времени попадания на многообразие скольжения. Неидеальность исполнительных устройств обуславливает попадание за конечное время в некоторую окрестность многообразия скольжения. Данный факт сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1. Если для систем (5), (8) выполнены условия

$$\begin{aligned} -M^2 + \xi_2 &\leq f_{2i}(x_1^*, s^*) \leq M^1 - \xi_1, \\ -M^2 + \xi_2 &\leq f_{2i}(x_1, s) \leq M^1 - \xi_1, \quad (\xi_1, \xi_2 = \text{const} > 0), \quad i = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $f_{2i}(x_1^*, s^*)$, $f_{2i}(x_1, s)$ – i -е элементы вектор-функций $f_2(x_1^*, s^*)$, $f_2(x_1, s)$, то за конечный промежуток времени выполняется неравенство

$$\|s^*\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l,$$

где $-\Delta_2$, Δ_1 – амплитуды сигналов на входе исполнительного устройства, при котором управляющее воздействие \tilde{v} выходит на границы $-M^2$, M^1 , $\|s^*\| = \max\{|s_i^*|\}_{i=\overline{1, p}}$. Аналогичные рассуждения справедливы для системы (5).

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности в силу свойства инвариантности к преобразованию поверхности скольжения будем полагать, что в системе (8) матрица перед управлением является единичной. Рассмотрим составную функцию Ляпунова

$$V = \sum_{i=1}^p V_i, \quad V_i = \frac{1}{2} s_i^{*2},$$

производная которой в силу (8) имеет вид

$$\dot{V}_i = s_i^* [f_2(x_1^*, s^*) - \overline{\text{sign}}(l s_i^*)], \quad i = \overline{1, p}. \quad (10)$$

Покажем, что область $-\Delta_2/l \leq s_i^* \leq \Delta_1/l$ является областью притяжения, определяемой выражениями (9), причем попадание в данную область обеспечивается за конечное время.

1. Рассмотрим случай, когда $s_i^* > \Delta_1/l$: $\tilde{v}_i = -\overline{\text{sign}}(l s_i^*) = -M^1$.

Дифференциальное уравнение для s_i^* имеет вид

$$\dot{s}_i^* = f_2(x_1^*, s^*) - M^1.$$

Производная согласно условиям теоремы (9) ограничена сверху

$$\dot{s}_i^* \leq -\xi_1.$$

Поскольку $s_i^* > \Delta_1/l$, то с учетом (9),(10) имеем

$$\begin{cases} s_i^* > 0 \Rightarrow |s_i^*| = s_i^*, \sqrt{2V_i} = |s_i^*|; \\ \dot{V}_i = s_i^* f_{2i}(x_1^*, s^*) - s_i^* M^1 = |s_i^*| (f_{2i}(x_1^*, s^*) - M^1) \leq -\xi_1 \sqrt{2V_i}. \end{cases}$$

В соответствии с решением последнего дифференциального уравнения получим

$$V_i(t) = (-\xi_1 \sqrt{2}t + \sqrt{V_i(0)})^2.$$

Оценка времени попадания изображающей точки системы в заданную полуокрестность $s_i^* \leq \Delta_1/l$ определяется выражением

$$t_i^+ = \frac{\sqrt{2}}{\xi_1} \left(\sqrt{V_i(0)} - \frac{\Delta_1}{l\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\xi_1} \left(s_i^*(0) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\Delta_1}{l} \right) = \frac{1}{\xi_1} \left(s_i^*(0) - \frac{\Delta_1}{l} \right).$$

2. Рассуждения при $s_i^* < -\Delta_2/l$ аналогичны предыдущим. При выполнении условий (9) траектории системы (8) также сойдутся к границе рассматриваемой области $s_i^* \geq -\Delta_2/l$ за конечное время

$$t_i^- = \frac{\sqrt{2}}{\xi_2} \left(\sqrt{V_i(0)} + \frac{\Delta_2}{l\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\xi_2} \left(s_i^*(0) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\Delta_2}{l} \right) = \frac{1}{\xi_2} \left(s_i^*(0) + \frac{\Delta_2}{l} \right).$$

Из рассмотренных случаев следует, что

$$|s_i^*| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l, \quad \|s^*\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для системы (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть для систем (5) и (8) выполнены условия (9), тогда для любой пары решений систем (5), (8) существует такое положительное число $N_x > 0$, что

$$\|x_1(t) - x_1^*(t)\| = N_x \Delta/l.$$

При этом в пределе при $l \rightarrow +\infty$ получим

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|x_1(t) - x_1^*(t)\| = 0.$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$, $M = \max(M^1, M^2)$. По смыслу начальные условия для (5) и (8) совпадают

$$x_1^*(0) = x_1(0), \quad s^*(0) = s(0). \quad (11)$$

Пусть их величина такая, что $s_i^*(0) = s_i(0) \geq \Delta_1/l$ или $s_i^*(0) = s_i(0) \leq -\Delta_2/l$, т.е. все управляющие воздействия, как идеальные v , так и реальные \tilde{v} , в начальный момент времени находятся в зоне насыщения. Без ограничения общности предположим, что для системы (5) скользящий режим возникает в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_p в следующей последовательности: $s_1(t_1) = 0$, потом $s_2(t_2) = 0$ и т.д.

Введем в рассмотрение некоторые моменты времени t'_i такие, что

$$v_i(t) = \tilde{v}_i(t), \quad (t \leq t'_i), \quad i = \overline{1, p}. \quad (12)$$

Возможны две ситуации. Согласно первой t'_i соответствует моменту времени, когда s_i^* попадает в окрестность $-\Delta_2/l \leq s_i^* \leq \Delta_1/l$, т.е. начинаются переключения $\tilde{v}(t)$. Во втором случае $s_i(t'_i) = 0$ и начинаются переключения v , $t'_i = t_i$.

В качестве конструктивного доказательства теоремы рассмотрим пошаговую процедуру, в которой на каждом этапе показывается различие траекторий систем (5), (8) на малую величину порядка Δ/l .

Шаг 1. В силу (11), (12) для момента времени t'_i можно определенно сказать, что в зависимости от начальных условий выполняется одно из равенств

$$s_1(t'_1) = s_1^*(t'_1) = -\Delta_2/l, \quad s_1(t'_1) = s_1^*(t'_1) = \Delta_1/l, \quad (13)$$

так как системы (5), (8) полностью совпадают. Согласно теореме 1 и учитывая, что $s_1(t_1) = 0$, для оценки величины $t_1 - t'_1$ при начальном условии (13) получим оценку

$$t_1 - t'_1 \leq c_1 \Delta / l, \quad (14)$$

где $c_1 = \max\left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}\right)$.

Запишем решение систем (5), (8) в виде

$$x(t) = x(t'_1) + \int_{t'_1}^t \begin{pmatrix} f_1(x_1(\tau), s(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), s(\tau)) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$x^*(t) = x^*(t'_1) + \int_{t'_1}^t \begin{pmatrix} f_1(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \\ f_2(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) + \tilde{v}(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

соответственно, где для простоты изложения приняты обозначения $x(t) = (x_1(t), s(t))$, $x^*(t) = (x_1^*(t), s^*(t))$.

Теперь для момента времени t_1 оценим разность решений систем (5) и (8):

$$\begin{aligned} & \|x(t_1) - x^*(t_1)\| \leq \\ & \leq \int_{t'_1}^{t_1} \left\| \begin{pmatrix} f_1(x_1(\tau), s(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), s(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) + v(\tau) - \tilde{v}(\tau) \end{pmatrix} \right\| d\tau \leq \\ & \leq \int_{t'_1}^{t_1} \|v(\tau) - \tilde{v}(\tau)\| d\tau + \int_{t'_1}^{t_1} \left\| \begin{pmatrix} f_1(x_1(\tau), s(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), s(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \end{pmatrix} \right\| d\tau \leq \\ & \leq M(t_1 - t'_1) + \int_{t'_1}^{t_1} \left\| \begin{pmatrix} f_1(x_1(\tau), s(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), s(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s^*(\tau)) \end{pmatrix} \right\| d\tau, \end{aligned}$$

так как согласно (11), (12) начальные условия для систем (5), (8) совпадают $x(t'_1) = x^*(t'_1)$. Здесь и далее используются одни и те же L_∞ нормы.

В предположении, что для вектор-функций $f_1(x_1, s)$, $f_2(x_1, s)$ существует некоторая константа Липшица L , из последнего неравенства на основании леммы Беллмана-Гронуолла и (14) (например, см. [10]) имеем

$$\|x(t_1) - x^*(t_1)\| \leq M c_1 \Delta / l + \int_{t'_1}^{t_1} L \|x(\tau) - x^*(\tau)\| d\tau \leq N_1 \Delta / l, \quad (15)$$

где $N_1 = M c_1 e^{L c_1 \Delta / l}$.

Шаг 2. В момент времени t_1 порядок уравнений, описывающих (5), понижается на единицу, так как $s_1(t_1) = 0$. В то же время, согласно теореме 1 для переменной $s_1^*(t)$ при $t > t_1$ справедливо неравенство $|s_1^*(t)| \leq \Delta / l$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий с точностью до величины $|s_1^*(t)| \leq \Delta / l$ при $t > t_1$ движения системы (8) могут быть также описаны системой дифференциальных уравнений пониженного порядка. Перепишем уравнения (5), (8) при

$t > t_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, 0, s^1), \\ \dot{s}^1 = f_2^1(x_1, 0, s^1) + v^1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^* = f_1(x_1^*, s_1^*, s^{*1}), \\ \dot{s}^{*1} = f_2^1(x_1^*, s_1^*, s^{*1}) + \tilde{v}^1, \end{cases} \quad |s_1^*| \leq \Delta/l, \quad (16)$$

где $s^1 = (s_2, \dots, s_p)$, $s^{*1} = (s_2^*, \dots, s_p^*)$, $f_2^1(\cdot) = (f_{22}(\cdot), \dots, f_{2p}(\cdot))$,
 $v = (v_2, \dots, v_p)$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_p)$.

Обозначив $x^1 = (x_1, s^1)$, $x^{*1} = (x_1^*, s^{*1})$, найдем разницу решений для (16) в момент времени t_2 . Как было указано выше, рассмотрим 2 случая.

1. Пусть t'_2 соответствует моменту времени, когда $s_2^*(t'_2) = \Delta_1/l$, либо $s_2^*(t'_2) = -\Delta_2/l$ ($s_2(t_2) \neq 0$). С учетом (12) для управляющих воздействий v^1 , \tilde{v}^1 при $t_1 \leq t \leq t'_2$ выполняется соотношение

$$v^1(t'_2) = \tilde{v}^1(t'_2).$$

Тогда для момента времени t'_2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|x^1(t'_2) - x^{*1}(t'_2)\| \leq \\ & \leq \|x^1(t_1) - x^{*1}(t_1)\| + \int_{t_1}^{t'_2} \left\| \begin{matrix} f_1(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s_1^*, s^{*1}(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s_1^*, s^{*1}(\tau)) \end{matrix} \right\| d\tau \leq \\ & \leq N_1 \Delta/l + \int_{t_1}^{t'_2} \left\| \begin{matrix} f_1(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), 0, s^{*1}(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), 0, s^{*1}(\tau)) \end{matrix} \right\| d\tau + L(t'_2 - t_1) \Delta/l \leq \\ & \leq (N_1 + LT_1) \Delta/l + \int_{t_1}^{t'_2} L \|x^1(\tau) - x^{*1}(\tau)\| d\tau \leq N'_2 \Delta/l, \end{aligned}$$

где $T_1 = t'_2 - t_1$, $N'_2 = (N_1 + LT_1)e^{LT_1}$. Согласно теореме 1 отрезок времени T_1 конечен. Из последнего неравенства имеем

$$\|s_2(t'_2) - s_2^*(t'_2)\| \leq N'_2 \Delta/l.$$

С момента времени t'_2 согласно теореме 1 справедливо неравенство $|s_2^*| \leq \Delta/l$. Запишем оценку времени попадания на поверхность скольжения $s_2(t_2) = 0$ при начальном условии из последнего неравенства $|s_2(t'_2)| \leq \Delta/l + N'_2 \Delta/l$,

$$t_2 - t'_2 \leq \frac{\Delta/l + N'_2 \Delta/l}{\xi} \leq c_2 \Delta/l, \quad \xi = \min(\xi_1, \xi_2).$$

Таким образом, окончательно для момента времени t_2 получим

$$\begin{aligned}
 & \|x^1(t_2) - x^{*1}(t_2)\| \leq \|x^1(t'_2) - x^{*1}(t'_2)\| + \\
 & + \int_{t'_2}^{t_2} \left\| \begin{array}{l} f_1(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s_1^*(\tau), s^{1*}(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s_1^*(\tau), s^{1*}(\tau)) + v^1(\tau) - \tilde{v}^1(\tau) \end{array} \right\| d\tau \leq \\
 & \leq N'_2 \Delta / l + \int_{t'_2}^{t_2} \left\| \begin{array}{l} f_1(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), 0, s^{1*}(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), 0, s^{1*}(\tau)) \end{array} \right\| d\tau + \\
 & + (L\Delta / l + M)(t_2 - t'_2) \leq (N'_2 + (L + M)T_2)\Delta / l + \int_{t'_2}^{t_2} L \|x^1(\tau) - x^{*1}(\tau)\| d\tau,
 \end{aligned}$$

где $T_2 = t'_2 - t_2$.

Согласно лемме Беллмана-Гронуолла, как и на предыдущем шаге, находим

$$\|x^1(t_2) - x^{*1}(t_2)\| \leq N_2 \Delta / l,$$

где $N_2 = (N'_2 + (L + M)c_2 \Delta / l) e^{Lc_2 \Delta / l}$.

2. Если равенство (12) нарушается в силу возникновения скользящего движения по поверхности $s_2 = 0$, т.е. $s_2(t'_2) = s_2(t_2)$ ($s_2^*(t'_2)$ при этом находится за границами отрезка $[-\Delta_2 / l, \Delta_1 / l]$), то, учитывая (15), имеем

$$\begin{aligned}
 & \|x^1(t_2) - x^{*1}(t_2)\| \leq \|x^1(t_1) - x^{*1}(t_1)\| + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \left\| \begin{array}{l} f_1(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_1(x_1^*(\tau), s_1^*(\tau), s^{1*}(\tau)) \\ f_2(x_1(\tau), 0, s^1(\tau)) - f_2(x_1^*(\tau), s_1^*(\tau), s^{1*}(\tau)) + v^1(\tau) - \tilde{v}^1(\tau) \end{array} \right\| d\tau \leq \\
 & \leq (N_1 + (L + M)T_2)\Delta / l + \int_{t_1}^{t_2} L \|x^1(\tau) - x^{*1}(\tau)\| d\tau \leq N_2 \Delta / l,
 \end{aligned}$$

где $T_2 = t_2 - t_1$, $N_2 = (N_1 + (L + M)c_2 \Delta / l) e^{Lc_2 \Delta / l}$. В частности, получаем также, что $\|s_2(t_2) - s_2^*(t_2)\| \leq N_2 \Delta / l$.

Продолжая подобные рассуждения, на p шаге находим

$$s(t_p) = 0, \quad \|s^*(t_p)\| \leq N_p / l, \quad \|x_1(t_p) - x_1^*(t_p)\| \leq N_p \Delta / l,$$

где N_p — некоторая константа.

В заключении доказательства рассмотрим движения систем (5), (8) с момента времени t_p , когда в системе (5) скользящий режим возникает на всех поверхностях $s_i = 0$, $i = \overline{1, p}$:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, 0), \\
 \dot{x}_1^* &= f_1(x_1^*, s^*), \quad \|s^*\| \leq N_p \Delta / l.
 \end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы оценим разность решений на некотором интервале времени $T = t - t_p$:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_1^*(t)\| &\leq \|x^1(t_p) - x^{*1}(t_p)\| + \int_{t_p}^t \|f_1(x_1(\tau), 0) - f_1(x_1^*(\tau), s^*(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq N_p \Delta / l + LT N_p \Delta / l + \int_{t_p}^t \|f_1(x_1(\tau), 0) - f_1(x_1^*(\tau), 0)\| d\tau \leq \\ &\leq (1 + LT) N_p \Delta / l + \int_{t_p}^t L \|x_1(\tau) - x_1^*(\tau)\| d\tau \leq N_x \Delta / l, \end{aligned}$$

где $N_x = (1 + LT) N_p e^{LT}$.

Если теперь увеличивать коэффициенты усиления обратной связи l , то в пределе имеем

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|x_1(t) - x_1^*(t)\| = \lim_{l \rightarrow +\infty} N_x \Delta / l = 0.$$

Теорема доказана.

В теореме 2, по сути, говорится о том, что при стремлении коэффициентов усиления обратной связи к бесконечности траектории движений системы (5) с идеальными релейными воздействиями и системы (8) с неидеальными исполнительными устройствами близки с точностью до бесконечно малой Δ/l . При конечных же коэффициентах усиления траектории различаются на достаточно малую, но конечную величину Δ/l , что позволяет использовать теорию скользящих режимов в практических задачах. Пусть t_p — момент времени, когда скользящий режим возникает на всех поверхностях

$$s_i(t_p) = 0, \quad i = \overline{1, p}.$$

Тогда поведение системы (5), а также системы (8) при $l \rightarrow +\infty$, однозначно описывается системой дифференциальных уравнений (7).

Отметим некоторые особенности, используемые в доказательстве теорем 1,2, по сравнению с известными результатами. В (например, см. [4]) предполагается, что начальные условия принадлежат пограничному слою $\|s^*\| \leq \Delta$. Далее предполагается, что пограничный слой (а следовательно, и неидеальности различной природы) стремится к нулю $\Delta \rightarrow 0$. Этот подход позволил выписать уравнения скользящих движений для широкого класса объектов управления. Доказательства теорем 1, 2 построены в несколько ином ключе. А именно, в теореме 1 выделяется область начальных условий (9), из которых обеспечивается попадание в пограничный слой за конечное время и получена оценка этого времени. В теореме 2 релейные элементы предполагаются неотъемлемой составляющей модели объекта управления и какое-либо их стремление к идеальному реле не правомерно с физической точки зрения. Идея устремления пограничного слоя к нулю реализуется по обратной связи.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена проблема, связанная с доопределением решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Рассматривались некоторые неидеальности релейных элементов, из-за которых точки разрыва в правой части дифференциальных уравнений становятся локальными. Следуя эффективному методу регуляризации разрывных систем с использованием пограничного слоя, в терминах переходных процессов, разделенных во времени на этап попадания в пограничный слой и движения в нем, показано, что при стремлении к нулю пограничного слоя движение в скользящем режиме

однозначно описывается системой дифференциальных уравнений пониженного порядка. В отличие от известных результатов, вместо гипотетического стремления характеристик реле к идеальным сигнум-функциям осуществляется параметризация пограничного слоя за счет увеличения коэффициентов усиления обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филлипов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* // Матем. сб. Т. 51., № 93:1. 1960. С. 99–128.
2. Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. *Основы теории разрывных систем. Часть I* // АиТ. № 7. 1974. С. 33–47.
3. *Системы автоматического управления с переменной структурой* / под редакцией Емельянова С.В. М.: Наука. 1967. 592 с.
4. Уткин В.И. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*. М.: Наука. 1982. 368 с.
5. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*. М.: Наука. 1950. 468 с.
6. Лукьянов А.Г., Уткин В.И. *Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме* // АиТ. № 4. 1981. С. 5–13.
7. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*. М.: Наука. 1978. 400 с.
8. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука. 1985. 225 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука. 1974. 504 с.
10. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука. 1965. 471 с.

Сергей Александрович Кочетков,
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова,
ул. Профсоюзная, 65,
117997, г. Москва, Россия
E-mail: ser711@yandex.ru

Светлана Анатольевна Краснова,
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова,
ул. Профсоюзная, 65,
117997, г. Москва, Россия
Виктор Анатольевич Уткин,
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова,
ул. Профсоюзная, 65,
117997, г. Москва, Россия
E-mail: vicutkin@ipu.ru