ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 1. № 4 (2009). С. 24-32.

УДК 517.537.7

КЛАССЫ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ВЫПУКЛОЙ МАЖОРАНТОЙ РОСТА

А.М. ГАЙСИН

Аннотация. Изучается поведение рядов Дирихле с вещественными коэффициентами, рост которых ограничен некоторой выпуклой мажорантой. Получена асимптотическая оценка на положительном луче вне некоторого множества нулевой плотности.

Ключевые слова: ряды Дирихле, выпуклая мажоранта роста.

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z=x+iy) \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ $(n \geq 1)$ — последовательность перемен знаков коэффициентов (по определению $p_n = \min\limits_{k>p_{n-1}} \{k : a_{p_{n-1}} a_k < 0\}$, где $p_0 = \min\{k : a_k \neq 0\}$). Через $p(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_n\}$: $p(t) = \sum\limits_{p_n \leqslant t} 1$. Полиа показал, что если плотность последовательности $\{p_n\}$ $\Delta = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t}$ равна нулю, то в каждом угле $\{z : |\arg z| \leqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ целая функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости [1]. Позже выяснилось, что данный результат справедлив и для луча $\{z : \arg z = 0\}$: если функция (1) имеет конечный порядок ρ и $\Delta = 0$, то [2]

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)} = 1, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \ (r > 0). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\rho_0 = \rho$, где $\rho_0 = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln\ln|f(x)|}{\ln x}$. В [3] найдены неулучшаемые условия на функцию $p(t)$ (они слабее условия $\Delta = 0$), при выполнении которых для любой функции конечного порядка, заданной рядом (1), при $x \to \infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней логарифмической плотности справедливо асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x) = (1 + o(1)) \ln|f(x)|. \tag{3}$$

Множество $A = \mathbb{R}_+ \setminus E$, на котором справедлива оценка (3), называется асимптотическим.

Цель статьи — найти условия, при которых оценка (3) верна для целых функций (1) с более общей мажорантой роста, причем на гораздо массивном асимптотическом множестве.

A.M. Gaisin, Classes of Dirichlet Series with Real Coefficients Defined by Convex Majorants of a Growth.

Работа поддержана грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ– 3081-2008.1, РФФИ (грант 08-01-00779-а).

Поступила 12 октября 2009 г.

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ положительных функций. Пусть $\Phi \in L$ — выпуклая функция такая, что для ее обратной функции φ выполняется условие

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty. \tag{4}$$

Через $A(\varphi)$ будем обозначать класс положительных, неубывающих на $\mathbb{R}_+$ функций $\alpha = \alpha(t)$, $\alpha(t) = o(t\varphi(t))$ при $t \to \infty$ таких, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt = 0.$$

Подкласс $A(\varphi)$, состоящий из функций $\alpha \in L$ таких, что $\alpha(t) \geq \sqrt{t}$, обозначим $W(\varphi)$.

В статье рассматривается более общая ситуация, а именно, изучаются ряды Дирихле с вещественными коэффициентами.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1)\quad \sup_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty \quad \text{(условие несгущаемости)}; \tag{5}$$

$$2)\quad \ln(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > -\alpha(\lambda_n) \quad (n \geq 1) \quad \text{(условие несближаемости)},$$

где α — некоторая функция из $W(\varphi)$, $\alpha(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, $\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Обозначим $D(\Lambda)$ класс всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами a_n. Пусть $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M(\sigma) \leqslant \Phi(m\sigma)\} \quad (m \geq 1).$$

Положим $D(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$. Через $\mu(\sigma)$ будем обозначать максимальный член ряда (6), то есть $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geq 1}\{|a_n|e^{\lambda_n \sigma}\}$.

Пусть $\mu_n = \lambda_{p_n}$, где $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (6), $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$, $q(t) = \sum\limits_{q_n \leqslant t} 1$, где

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2},\ \lambda_{p_n} + 1\right).$$

Так как $\mu_n < q_n < \mu_{n+1}$, то $|l(t) - q(t)| \leqslant 1$.

В настоящей статье будет доказана следующая

Теорема A. *Пусть для некоторой функции $\theta \in A(\varphi)$ выполняется оценка*

$$\int\limits_1^{\lambda_n} \frac{l(t;\lambda_n)}{t}\, dt \leqslant \theta(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \tag{7}$$

где $l(t;\lambda_n)$ — число точек μ_j из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$. Если $l \in A(\varphi)$, то для любой функции $F \in D(\Phi)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности выполняется асимптотическое равенство

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|.$$

Отметим, что если $\Phi(\sigma)=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)$ $(k\geq 1)$, то при $k=1$ класс $D(\Phi)$ состоит из рядов Дирихле конечного порядка по Ритту. Поэтому результаты работ [1], [2] являются следствиями теоремы A. Для справедливости теоремы A условие $l\in A(\varphi)$ является, вообще говоря, существенным (это следует из работы [3], где рассматривается случай $\varphi(x)=\ln x$). Отметим (это можно показать тем же методом), что если выполняется условие (7), а условие $l\in A(\varphi)$ заменить на более слабое требование

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{\varphi(r)}\int\limits_1^r\frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt=0,$$

то асимптотическое равенство $\ln M(\sigma)=(1+o(1))\ln|F(\sigma)|$ справедливо вне некоторого множества нулевой нижней плотности.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобится следующая лемма типа Бореля-Неванлинны.

Лемма 1. *Пусть $\Phi\in L$, и для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие (4). Пусть, далее, $u(\sigma)$ — неубывающая, положительная и непрерывная на $[0,\infty)$ функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty}u(\sigma)=\infty,\quad \varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{u(\sigma)}{\ln\Phi(\sigma)}<\infty.$$

Если $w\in W(\varphi)$, а $v=v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w(v)=e^{u(\sigma)},\tag{8}$$

то при $\sigma\to\infty$ вне некоторого множества $E\subset[0,\infty)$,

$$mes(E\cap[0,\tau])\leqslant o(\varphi(v(\tau)))+4\int\limits_1^{v(\tau)}\frac{w^*(t)}{t^2}dt=o(\varphi(v(\tau))),\ \tau\to\infty,$$

(τ — решение уравнения $v(\tau)=x$), имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(\sigma+d\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right)=u(\sigma)+o(1)\quad(0<d<\infty).\tag{9}$$

Лемма 1 доказана в [4].

В лемме 1 w^* — некоторая функция из класса $W(\varphi)$, имеющая вид $w^*(t)=\beta(t)w(t)$, $\beta\in L$. Для любой функции $w\in W(\varphi)$ указанная функция w^* всегда существует. Асимптотическое множество, на котором имеет место оценка (9), зависит от функции w^*.

Для доказательства теоремы потребуется следующее утверждение об оценке ограниченной аналитической функции в круге.

Лемма 2. *Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $\{z:|z|<R\}$, причем*

$$|g(0)|>1,\quad \ln\sup_{|z|<R}|g(z)|=M<\infty.$$

Если $0<r<1-N^{-1}$ $(N>1)$, то существует не более чем счетное множество кружков $V_n=\{z:|z-z_n|<\rho_n\}$ таких, что

$$\sum_n\rho_n\leqslant Rr^N(1-r),$$

вне которых, но в круге $\{z:|z|\leqslant rR\}$ выполняется оценка

$$\ln|g(z)|\geq\frac{R-r}{R+r}\ln|g(0)|-5NL,\tag{10}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Оценка (10) является более точной, чем оценка $\ln|g(z)| \geq -5NM$ из [5]. Чтобы убедиться в справедливости (10), воспользуемся представлением

$$\ln|g(\rho e^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)\ln|g(Re^{i\theta})|}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)\, d\sigma(\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)} + \sum_{|\xi_n|<R} \ln\left|\frac{R(z-\xi_n)}{R^2-z\overline{\xi_n}}\right|, \qquad (11)$$

где $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho < R$, ξ_n — нули функции $g(z)$ в круге $\{z : |z| < R\}$, считаемые с учетом кратности, а $\sigma(\theta)$ — неубывающая функция, $\sigma'(\theta) = 0$ почти всюду.

Для борелевских множеств e плоскости введем неотрицательную меру μ равенством

$$\mu(e) = \frac{1}{2\pi}\int_{e\cap\{z:|z|=R\}} \ln^+\left|\frac{1}{g(Re^{i\theta})}\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{e\cap\{z:|z|=R\}} d\sigma(\theta) + \sum_{\xi_n\in e} \ln\left|\frac{R}{\xi_n}\right|. \qquad (12)$$

Полагая $\rho = 0$, из (11) имеем

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\theta) - \sum_{|\xi_n|<R} \left|\frac{R}{\xi_n}\right|. \qquad (13)$$

Следовательно, из (12), (13) получаем, что

$$L = \mu(\xi : |\xi| \leqslant R) = \int_{|\xi|\leqslant R} d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})| d\theta - \ln|g(0)|. \qquad (14)$$

Рассмотрим следующее ядро:

$$K(\xi, z) = \begin{cases} \frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}, & \text{при} \quad |\xi| = R,\ |z| < R, \\ -\ln\left|\frac{R(z-\xi)}{R^2-z\bar{\xi}}\right| / \ln\frac{R}{|\xi|}, & \text{при} \quad 0 < |\xi| < R,\ |z| < R, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это ядро позволяет равенство (11) записать в виде (см [5]):

$$\ln|g(\rho e^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)\ln^+|g(Re^{i\theta})|}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)} d\theta - \int_{|\xi|\leqslant R} K(\xi, z) d\mu(\xi), \qquad (15)$$

где $\rho < R$, $z = \rho e^{i\varphi}$.

Следовательно, из (14), (15) получаем, что

$$\ln|g(z)| \geq \frac{R-\rho}{R+\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|g(Re^{i\theta})| d\theta - \int_{|\xi|\leqslant R} K(\xi, z) d\mu(\xi) \geq$$

$$\geq \frac{R-\rho}{R+\rho}\ln|g(0)| - \int_{|\xi|\leqslant R} K(\xi, z) d\mu(\xi), \qquad (16)$$

$z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho < R$.

Следуя Н.В. Говорову, назовем точку z_0, $|z_0| \leqslant Rr$ $(r < 1)$, легкой, если для любого $\rho > 0$

$$\mu\{\xi : |\xi - z_0| \leqslant \rho\} \leqslant \frac{6L\rho}{Rr^N(1-r)}, \quad L = \mu\{\xi : |\xi| \leqslant R\}. \tag{17}$$

Точку z из круга $\{z : |z| \leqslant Rr\}$, не являющуюся легкой, назовем тяжелой (в [5] легкая точка также определяется посредством неравенства (17), только вместо L берется M). Множество тяжелых точек круга $\{z : |z| \leqslant Rr\}$ можно покрыть кружками $V_n = \{z : |z - z_n| \leqslant \rho_n\}$ такими, что

$$\sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1-r). \tag{18}$$

Действительно, для каждой тяжелой точки z найдется круг $V_z = \{\xi : |\xi - z| \leqslant \rho_z\}$ такой, что $\mu(V_z) > \frac{6L\rho_z}{Rr^N(1-r)}$. Из покрытия множества тяжелых точек кружками V_z ограниченного радиуса, как известно (см., н-р, [6]), можно выделить конечное или счетное множество $V_n = \{\xi : |\xi - z_n| \leqslant \rho_n\}$, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кружками. Следовательно, $\sum\limits_n \mu(V_n) \leqslant 6\mu\{\xi : |\xi| \leqslant R\} = 6L$, и

$$\sum_n \rho_n \leqslant \frac{Rr^N(1-r)}{6L} \sum_n \mu(V_n) \leqslant Rr^N(1-r).$$

Если $r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, а точка z $(|z| \leqslant Rr)$ легкая, то пользуясь рассуждениями из [5], получаем, что

$$\int\limits_{|\xi|\leqslant R} K(\xi, z) d\mu(\xi) \leqslant 5NL \tag{19}$$

(в правой части (19) вместо $5NL$ в [5] фигурирует величина $5NM$). Таким образом, если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то для всех z из круга $\{z : |z| = \rho \leqslant Rr\}$, но вне кружков V_n с общей суммой радиусов, удовлетворяющих условию (18), из (16), (19) получаем, что

$$\ln|g(z)| \geq \frac{R-\rho}{R+\rho} \ln|g(0)| - 5NL, \quad |g(0)| > 1,$$

что и требовалось.

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$,

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2}, \lambda_{p_n} + 1\right), \quad q(t) = \sum_{q_n \leqslant t} 1.$$

Положим

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right) \quad (a \geq q_1).$$

Имеет место следующая

Лемма 3 [3]. *Для любого $\lambda_n \leqslant a$ $(a \geq q_1)$ справедлива оценка*

$$-\ln|Q_a(\lambda_n)| \leqslant \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t} dt + 4N_q(2ea), \tag{20}$$

где $q(t;\lambda_n)$ — число точек q_i в отрезке $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$,

$$N_q(t) = \int\limits_0^t \frac{q(x)}{x} dx.$$

§ 2. Доказательство теоремы A

1. Достаточность. Поскольку $|l(t)-q(t)|\leqslant 1$, $l\in A(\varphi)$, то $q\in A(\varphi)$. Далее,

$$\int\limits_0^r \frac{q(t)}{t^2}dt=\int\limits_0^r \frac{dN_q(t)}{t}=\frac{N_q(r)}{r}+\int\limits_0^r \frac{N_q(t)}{t^2}dt,$$

где $N_q(t)=\int\limits_0^t \frac{q(x)}{x}dx$. Следовательно, $N_q\in A(\varphi)$. Значит, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_1(t)$, $1\leqslant\beta_1(t)\uparrow\infty$, $t\to\infty$ такая, что функция $N_q(2et)\beta_1(t)$ также принадлежит $A(\varphi)$. Оценим интеграл $\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt$, где $q(t;\lambda_n)$ — число точек q_i из отрезка $\{h:|h-\lambda_n|\leqslant t\}$. Имея в виду второе из условий (5), запишем

$$\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt=\int\limits_{\gamma_n}^{1}\frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt+\int\limits_1^{\lambda_n}\frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt=I_1+I_2,$$

где $\gamma_n=\frac12 e^{-\alpha(\lambda_n)}$. Но из условия $\sup\limits_t(\lambda(t+1)-\lambda(t))<\infty$ следует, что $q(t;\lambda_n)\leqslant dt+d$ $(0<d<\infty)$. Так как $\mu_n<q_n<\mu_{n+1}$, то $|q(t;\lambda_n)-l(t;\lambda_n)|\leqslant 1$. Поэтому, учитывая (7), имеем

$$I_1\leqslant d[1+\ln 2+\alpha(\lambda_n)],\quad I_2\leqslant\theta(\lambda_n)+\ln\lambda_n\quad(n\geq 1),\tag{21}$$

где $\alpha\in W(\varphi)$, $\theta\in A(\varphi)$. Следовательно, принимая во внимание (21), получаем, что

$$\int\limits_0^{\lambda_n}\frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt<\Theta_1(\lambda_n),\tag{22}$$

где $\Theta_1\in W(\varphi)$. Далее, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_2(t)$, $1\leqslant\beta_2(t)\uparrow\infty$, при $t\to\infty$ такая, что функция $\Theta_1(t)\beta_2(t)$ принадлежит $W(\varphi)$. Положим $w^*(t)=\beta(t)w(t)$, где $w(t)=\Theta_1(t)+N_q(2et)$, $\beta(t)=\min(\beta_1(t),\beta_2(t))$. Ясно, что $w^*\in W(\varphi)$.

Пусть $v=v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v)=3\ln\mu(\sigma),\tag{23}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (6). Положим

$$F_a(s)=\sum_{\lambda_n\leqslant a}a_ne^{\lambda_ns},\quad F_a^*(s)=\sum_{\lambda_n\leqslant a}a_nQ_a(\lambda_n)e^{\lambda_ns},$$

где

$$Q_a(z)=\prod_{q_n\leqslant 2a}\left(1-\frac{z^2}{q_n^2}\right).$$

Поскольку все $a_nQ_a(\lambda_n)$ $(\lambda_n\leqslant a)$ одного знака, можно считать, что $a_nQ_a(\lambda_n)\geq 0$ $(\lambda_n\leqslant a)$. Так как, очевидно,

$$M_a^*(\sigma)=\sup_{|t|<\infty}|F_a^*(\sigma+it)|=F_a^*(\sigma),$$

то

$$M_a^*(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\delta}q_a(t)F_a(t+\sigma)\,dt,\tag{24}$$

где $q_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q_a(z)$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. С учетом уравнения (23) показывается (см. в [3]), что при $\sigma \to \infty$

$$\delta \max_{|t|=\delta} |q_v(t)| \leqslant \delta \int\limits_0^\infty M(Q_v, r)e^{-\delta r}\, dv \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma), \tag{25}$$

где $M(Q_v, r) = \max\limits_{|z|=r} |Q_v(z)|$. Далее, применяя лемму 1 к функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu(\sigma)$, получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \in [0,\infty)$ нулевой плотности (это следует из оценок (8), (9))

$$\ln \mu(\sigma + 4\delta^*) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{26}$$

Тогда при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$\sum_{\lambda_n > v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + 3\delta^*)} \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*) \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta^* \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{1+o(1)}(\sigma) \exp[-3(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma)] < 1. \tag{27}$$

Учитывая первое из условий (5), видим, что $\lambda(v(\sigma)) = O(v(\sigma))$ при $\sigma \to \infty$. Значит, $\ln \lambda(v(\sigma)) \leqslant 2 \ln v(\sigma) \leqslant 2w(v(\sigma))$ при $\sigma \geq \sigma_0$ (мы учли, что $w \in W(\varphi)$). Отсюда с учетом (23), (26) при $\sigma \to \infty$ вне E_1 имеем

$$M(\sigma + 3\delta^*) \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*)[\lambda((v(\sigma)) + 1] \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma), \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Следовательно, при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$\ln M(\sigma + 3\delta^*) = (1 + o(1)) \ln M(\sigma). \tag{28}$$

Учитывая (25), (27), из (24) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M_v^*(\sigma) \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma)(\max_{|\xi - \sigma| \leqslant \delta} |F(\xi) + 1|). \tag{29}$$

Но при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M(\sigma) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} + 1 = \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} (|a_n||Q_v(\lambda_n)|e^{\lambda_n \sigma})|Q_v(\lambda_n)|^{-1} + 1.$$

Отсюда ввиду леммы 3, оценки (22), равенства (23) следует, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M(\sigma) \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma) M_v^*(\sigma) \leqslant M^{o(1)}(\sigma) M_v^*(\sigma).$$

С учетом этой оценки из (29) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне множества E_1 нулевой плотности ($DE_1 = 0$)

$$M^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi - \sigma| \leqslant \delta} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{30}$$

где $|\xi^* - \sigma| = \delta$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. Положим $B = [0,\infty) \setminus E_1$. Найдется последовательность $\{\sigma_i\}$ ($\sigma_i \in B$) такая, что $\sigma \uparrow \infty$, $\sigma_i + \delta_i \leqslant \sigma_{i+1}$, причем $\sigma_{i+1} - \delta_{i+1} < \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_i + \delta_i\}$, где $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$ ($i \geq 1$). Значит,

$$B \subset \bigcup_{i=1}^\infty [\sigma_i - \delta_i, \sigma_i + \delta_i].$$

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Из (30) видно, что $|g(0)| > 1$ при $\sigma \in B \cap [\sigma_0, \infty)$ ($\sigma_0 > 0$). В (30) положим $\sigma = \sigma_i$, $\delta = \delta_i$, а в лемме 2 возьмем $N = 3$, $r = [\beta(v(\sigma_i))]^{-1/2}$, $R = 2\delta_i^*$,

$\left(\delta_i^* = \frac{w^*(v(\sigma_i))}{v(\sigma_i)}\right)$. Тогда $Rr = 2\frac{w^*(v_i)}{v_i\sqrt{\beta(v_i)}} = 2\sqrt{\beta(v_i)}\frac{w(v_i)}{v_i} = \frac{2w_1(v_i)}{v_i} = 2\delta_i$ $(v_i = v(\sigma_i))$. Следовательно, из леммы 2 заключаем, что в круге $\{z : |z| \leqslant 2\delta_i\}$, но вне исключительных кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке

$$\sum_n p_n^{(i)} \leqslant 2\delta_i\beta_i^{-\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

верна оценка (10). Здесь $\beta_i = \beta(v(\sigma_i))$. Тогда для всех z из круга $\{z : |z| \leqslant \delta_i\}$, но вне кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке (31), из (10) при $i \to \infty$ имеем

$$\ln|g(z)| \geq \left[1 + o(1) - 15\frac{L}{\ln|g(0)|}\right]\ln|g(0)|. \tag{32}$$

Учитывая, что $g(z) = F(z + \xi^*)$, а также используя оценки (30), (28), (32), получаем, что для всех z из круга $\{z : |z - \sigma_i| \leqslant \delta_i\}$, но вне исключительных кружков $C_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов не больше $2\delta_i\beta_i^{-\frac{1}{2}}$,

$$\ln|F(z)| > (1 + o(1))\ln M(\sigma_i),\ i \to \infty \tag{33}$$

Пусть E_2 — проекция множества $\bigcup\limits_{i,n} C_n^{(i)}$ на вещественную ось. Убедимся, что плотность множества E_2 равна нулю ($DE_2 = 0$). Действительно, пусть $\sigma_i < \sigma \leqslant \sigma_{i+1}$. Тогда

$$\frac{mes(E_2 \cap [0,\sigma])}{\sigma} \leqslant \frac{4}{\sigma}\sum_{k=1}^{i}\delta_k\beta_k^{-\frac{1}{2}} + 4\beta_{i+1}^{-\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Поскольку $\beta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, а $\sigma \geq 2\sum\limits_{k=1}^{i}\delta_k$, из (34) следует, что $DE_2 = 0$. Так как $DE_1 = 0$, то учитывая (28), из (33) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$, $DE = 0$ будет верно асимптотическое равенство

$$\ln|F(\sigma)| = (1 + o(1))\ln M(\sigma).$$

Теорема полностью доказана.

Замечание. Если $\Phi(\sigma) = e^\sigma$, то $\varphi(x) = \ln x$. Как показано в [3], в этом случае условие (7) в теореме A выполняется автоматически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen* // Math. Z. V. 29. 1929. P. 549–640.
2. Шеремета М.Н. *Об одной теореме Полиа*// Укр. мат. журн. Т. 35, № 1. 1983. С. 119–124.
3. Гайсин А.М. *К одной теореме Пойа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора*// Сиб. мат. журн. Т. 38, № 1. 1997. С. 46–55.
4. Юсупова Н.Н. *Оценка роста монотонной функции сверху*// Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. Сборник трудов: Математика. Т. III. Уфа: РИО БашГУ. 2005. С. 309–315.
5. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге*// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 6. 1968. С. 130–150.
6. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука. 1966.
7. Красичков И.Ф. *Оценка снизу для целых функций конечного порядка*// Сиб. мат. журн. Т. 6, № 4. 1965. С. 840–861.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: GaisinAM@mail.ru