ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 79-88.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Н.М. ПОЛУБОЯРОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию экстремалей функционала потенциальной энергии на устойчивость и неустойчивость. Частным случаем этого функционала являются функционалы типа площади. Функционал потенциальной энергии представляет собой сумму функционалов типа площади и объемной плотности сил. Функционал потенциальной энергии так построен, чтобы учитывать нагрузки на поверхность снаружи и внутри. Под устойчивостью понимается знакоопределенность второй вариации функционала. Доказаны формулы первой и второй вариации функционала. В следствии доказано, что экстремальная поверхность может быть локально минимальной и локально максимальной, в зависимости от знакоопределенности матрицы G. С помощью G-емкости и второй вариации функционала были получены признаки неустойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии. Эта техника доказательства была развита в работах В.М. Миклюкова и В.А. Клячина. Для G-параболических экстремальных поверхностей доказана вырожденность в плоскость. Этот результат является аналогом теоремы М. до Кармо и Ч.К. Пенга. На примере n-мерных поверхностей вращения показано применение формул первой и второй вариаций функционала. Также доказаны критерий экстремальности и критерий устойчивости и неустойчивости n-мерных поверхностей вращения. Подобные экстремальные поверхности возникают в приложениях, в физических задачах (например, мыльные пленки, капиллярные поверхности, магнитные жидкости в гравитационном поле с потенциалом), а свойства экстремальных поверхностей применяются в прикладных задачах (например, моделирование тентовых покрытий).

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, G-емкость, G-параболичность, устойчивость.

Mathematics Subjects Classifications: 53A10, 30C70, 31A15

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости и неустойчивости экстремалей специального функционала. Это одна из актуальных и сложных проблем современного анализа. Подобные экстремальные поверхности возникают в приложениях, в физических задачах (например, мыльные пленки), а свойства экстремальных поверхностей применяются в прикладных задачах (например, моделирование тентовых покрытий).

Проблема устойчивости экстремальных поверхностей в различного рода пространствах изучалась в работах Д. Хоффмана и Р. Оссермана [1], Дж. Барбосы и до Кармо [2], Х. Лоусона [3], А.В. Погорелова [4], Дж. Саймонса [5], А.А. Тужилина [6], А.Т. Фоменко [7] и др.

N.M. Poluboyarova, On instability of extremals of potential energy functional.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (грант №15-41-02479 р_поволжье_а).

Поступила 18 июня 2017 г.

Экстремали частного случая рассматриваемого функционала описывают, например, равновесные жидкости в гравитационном поле с потенциалом, что описано в монографии Р. Финна [8]. Некоторые частные случаи экстремальных поверхностей для средней кривизны, зависящей только от одной фиксированной координаты, рассмотрены в работе Д. Хоффмана, Р. Оссермана [1]. А в работе [9] В.А. Клячин исследовал устойчивость поверхностей предписанной средней кривизны.

В данной работе функционал потенциальной энергии представляет собой линейную комбинацию функционалов типа площади и объемной плотности сил. Это обусловлено необходимостью в прикладных задачах учитывать нагрузки поверхности (системы) извне и изнутри. Поэтому в настоящей работе рассматривается более сложный функционал, чем функционал площади, результаты являются новыми, более общими сравнительно с классическими фактами, известными для минимальных поверхностей, а поверхности не имеют ограничений на среднюю кривизну. В доказательствах использована емкостная техника, развитая в работах В.М. Миклюкова, В.А. Клячина [10], которая позволила доказать аналогичные признаки для нового функционала.

2. Основные результаты

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Определим функционал потенциальной энергии на ориентируемой гиперповерхности $\mathcal{M} = (M, u)$, полученной C^2-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$.

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$, а $\Psi(x)$ с физической точки зрения объемная плотность сил, действующих на элемент жидкости, занимающей объем области Ω. Φ, $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкие функции, ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$.

Пусть V – C^2-векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое что $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, ξ – поле единичных нормалей к поверхности, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что если поверхность $\mathcal{M}$ погружена, то любое векторное поле $V = h \cdot \xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия. Заметим, что согласно работе [5] вторая вариация не зависит от выбора продолжений.

Пусть $U(\mathcal{M})$ – окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ – однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ есть решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)),$$
$$g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$. Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, иначе – *неустойчива*.

На поверхности $\mathcal{M}$ индуцируется риманова метрика и соответствующее скалярное произведение касательных векторов, которое мы будем обозначать так же, как и скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Символами $\overline{\nabla}$ и ∇ обозначим римановы связности в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Известны следующие соотношения:

$$\nabla h = (\overline{\nabla} h)^T,\ \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

справедливые для произвольных C^1–гладких функций $h:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ и C^1–гладких векторных полей X и Y, касательных к $\mathcal{M}$. Символом v^T обозначаем всюду ортогональную проекцию вектора v на касательную плоскость $T_m\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке $m\in\mathcal{M}$.

Обозначим

$$G=\{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\delta_{ij}(\Phi-\langle D\Phi,\xi\rangle), \tag{2}$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_1},\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_2},\ldots,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера; k_i – главные кривизны; E_i – главные направления поверхности.

Теорема 1. *Если $W(t)=W(\mathcal{M}_t)$, то*

$$W'(0)=\int\limits_{\mathcal{M}}(\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T-nH\Phi(\xi)+\Psi(x))h(x)\,d\mathcal{M},$$

где div *– дивергенция в метрике поверхности $\mathcal{M}$, $H=\langle\vec{H},\xi\rangle$ – средняя кривизна поверхности $\mathcal{M}$ относительно нормали ξ. Более того, если $W'(0)=0$ для любой функции $h(x)\in C_0^1(\mathcal{M})$, то выполнено*

$$W''(0)=\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{G(\nabla h,\nabla h)+h^2\left(\langle\overline{\nabla}\Psi(x),\,\xi\rangle-\sum_{i=1}^n k_i^2G(E_i,E_i)\right)\right\}d\mathcal{M},$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (2).

Функционал (1) является композицией ранее исследованных нами функционалов типа площади [11] и функционала с объемной плотностью сил [9].

Далее полагаем, что матрица G положительно определена и $\left\langle\overline{\nabla}\Psi,\,\xi\right\rangle\leqslant 0$.

Замечание. Ограничения на матрицу G продиктованы использованием в доказательствах понятия емкости и применениями в приложениях. Условие $\left\langle\overline{\nabla}\Psi,\,\xi\right\rangle\leqslant 0$ является по сути связующим между нагрузками на поверхность извне и внутри, его интерпретация в приложениях автору не известна, а его требование продиктовано исключительно особенностями методики доказательства, как и в работе [9].

Следствие 1. *Если матрица G положительно определена, то любая экстремаль является локально-минимальной для функционала* (1)*, если матрица G отрицательно определена, то – локально-максимальной.*

Пусть $\Omega_1\subset\mathcal{M}$ – произвольная область на поверхности $\mathcal{M}$ и $P,Q\subset\Omega_1$ – два непересекающихся замкнутых множества в $\overline{\Omega}_1$. Всякую такую тройку $(P,Q;\Omega_1)$ назовем конденсатором на $\mathcal{M}$.

G-емкостью конденсатора $(P,Q;\Omega_1)$ является величина

$$\operatorname{cap}_G(P,Q;\Omega_1)=\inf_{\varphi}\int\limits_{\mathcal{M}}G(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\,d\mathcal{M},$$

где точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\varphi:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^1$, $\varphi(m)=1$ при $m\in P$, $\varphi(m)=0$ при $m\in Q$.

Поверхность $\mathcal{M}$ будет G – *параболической*, если найдется такая последовательность подобластей $\Omega_k \subset \mathcal{M}$, $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$, что выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) = 0$$

для любого $P \Subset \mathcal{M}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ экстремальная поверхность для функционала* (1). *Если найдется область $\Omega_1 \subset \mathcal{M}$ и компакт $P \Subset \Omega_1$ такие, что*

$$\int\limits_P \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 G(E_i, E_i)\right) > \operatorname{cap}_G(P, \partial\Omega_1; \Omega_1),$$

то $\mathcal{M}$ – неустойчива.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ устойчивая внешне полная (без края) погруженная экстремальная для функционала* (1) *поверхность, вдоль которой $\langle \overline{\nabla}\Psi, \xi\rangle \leqslant 0$. Если $\mathcal{M}$ имеет G-параболический тип, то $\mathcal{M}$ является плоскостью.*

Замечание. Теорема 3 является аналогом известного результата М. до Кармо и Ч.К. Пенга [12].

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Доказательство сводится к сложению ранее полученных результатов. Чтобы ими воспользоваться, функционал (1) представим в виде

$$W(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}) + L(\mathcal{M}),$$

где

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M}, \tag{3}$$

$$L(\mathcal{M}) = \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx. \tag{4}$$

Следующая теорема о вариациях функционала (3) была доказана автором и В.А. Клячиным в [11].

Теорема 4. *Если $F(t) = F(\mathcal{M}_t)$, то*

$$F'(t) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi))h(x)\, d\mathcal{M}.$$

Более того, если $F'(0) = 0$ для любой функции $h \in C_0^1(\mathcal{M})$, то выполнено

$$F''(0) \equiv \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^n k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M}.$$

Теорема 5 для функционала (4) была доказана в [9] в рамках исследования другого функционала.

Теорема 5. *Если $L(t) = L(\mathcal{M}_t)$, то*

$$L'(t) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Psi(x)h(x)\,d\mathcal{M}.$$

Более того, если $L'(0) = 0$ для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то выполнено

$$L''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi\rangle - nH\Psi(x))h^2 d\mathcal{M}.$$

Очевидно, что $W'(t) = F'(t) + L'(t)$, $W''(0) = F''(0) + L''(0)$. Теорема 1 доказана. □

Приступая к доказательству следствия 1, отметим, что оно основано на методе, развитом в работе [13].

Доказательство следствия 1. По теореме 1 имеем, что для экстремальных поверхностей выполнено $W'(0) = 0$ и определена вторая вариация. Зафиксируем точку $p \in \mathcal{M}$ и окрестность $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ точки p. Положим

$$c = \sup_{\mathcal{U}} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) - \langle \overline{\nabla}\Psi(x),\, \xi\rangle \right).$$

Для произвольной функции $h \in C_0^1(\mathcal{U})$, имеем

$$Q(h) \equiv \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) - \langle \overline{\nabla}\Psi(x),\, \xi\rangle \right) \right\} d\mathcal{M} \geq$$

$$\geq \int\limits_{\mathcal{M}} \{G(\nabla h, \nabla h) - h^2 c\}\, d\mathcal{M} \geq \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \inf_{h_0 \in C_0^1(\mathcal{U})} \frac{\int\limits_{\mathcal{U}} G(\nabla h_0, \nabla h_0)}{\int\limits_{\mathcal{U}} h_0^2} - c \right\} h^2\, d\mathcal{M}.$$

В случае положительно определенной матрицы G можно утверждать, что

$$\inf_{h_0 \in C_0^1(\mathcal{U})} \frac{\int\limits_{\mathcal{U}} G(\nabla h_0, \nabla h_0)}{\int\limits_{\mathcal{U}} h_0^2} \to +\infty$$

при $\operatorname{diam}\mathcal{U} \to 0$ и тогда очевидно, что для достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ точки p величина $Q(h) \geq 0$. Тем самым вариация поверхности $\mathcal{M}$ в направлении векторного поля ξ не уменьшает площади, и поверхность $\mathcal{M}$ является локально минимальной.

Проводя аналогичные рассуждения для случая отрицательно определенной матрицы G, замечаем, что

$$\inf_{h_0 \in C_0^1(\mathcal{U})} \frac{\int\limits_{\mathcal{U}} G(\nabla h_0, \nabla h_0)}{\int\limits_{\mathcal{U}} h_0^2} \to -\infty$$

при $\operatorname{diam}\mathcal{U} \to 0$ и делаем вывод, что если носитель функции h достаточно мал, то, как и выше, получаем $Q(h) \leqslant 0$. Следовательно, вариация поверхности $\mathcal{M}$ не увеличивает площади, и поверхность $\mathcal{M}$ является локально максимальной. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 2. Доказательство основано на лемме, доказанной в [11].

Лемма. *Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ задана не равная нулю, неотрицательная функция $S(x)$. Тогда для любой ограниченной области $\Omega_1 \subset \mathcal{M}$ и компакта $P \Subset \Omega_1$ существует*

$h_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, *такая что* $h_0 \in C_0^1(\Omega_1)$, *для которой*

$$Q_S(h_0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h_0, \nabla h_0) - S h_0^2 \right\} d\mathcal{M} \leqslant \mathrm{cap}_G \left(P,\, \partial\Omega_1;\, \Omega_1\right) - \int\limits_{P} S \, d\mathcal{M}.$$

Применяя лемму ко второй вариации функционала и условие $\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle \leqslant 0$, получим неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \left(\langle \overline{\nabla}\Psi(x),\, \xi \rangle - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathcal{M} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{cap}_G \left(P,\, \partial\Omega_1;\, \Omega_1\right) - \int\limits_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M}.$$

И поскольку по условию теоремы G-емкость меньше вычитаемого, то получаем, что вторая вариация отрицательна. Это по определению означает неустойчивость поверхности $\mathcal{M}$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Доказательство аналогично проведенному в [11] для функционала (3).

Пусть $P \subset \mathcal{M}$ – произвольный компакт. Если поверхность $\mathcal{M}$ имеет G-параболический тип, то найдется последовательность подобластей $\Omega_k \subset \mathcal{M}$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ и $P \Subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \ldots$, что выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{cap}_G(P, \partial\Omega_k; \Omega_k) = 0.$$

Так как по условию теоремы $\mathcal{M}$ – устойчивая экстремальная поверхность, то по определению устойчивости вторая вариация будет неотрицательна

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) - \langle \overline{\nabla}\Psi(x),\, \xi \rangle \right) \right\} d\mathcal{M}.$$

А используя условие $\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle \leqslant 0$, получим

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) - h^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right\} d\mathcal{M}.$$

Известно [14], что вариационная задача

$$\int\limits_{\mathcal{M}} G\left(\nabla h, \nabla h\right) \, d\mathcal{M} \to \inf$$

имеет решения $h_k(x)$ для всех $k = 1,\, 2,\, \ldots$ такие, что

$$\mathrm{cap}_G \left(P,\, \partial\Omega_k;\, \Omega_k\right) = \int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h_k, \nabla h_k) \, d\mathcal{M}$$

и $h_k|_P = 1, \quad h_k|_{\partial\Omega_k} = 0$. Тогда будем иметь

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h_k, \nabla h_k) - h_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathcal{M} =$$

$$= \operatorname{cap}_G (P, \partial\Omega_k; \Omega_k) - \int\limits_{\mathcal{M}} h_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{cap}_G (P, \partial\Omega_k; \Omega_k) - \int\limits_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M}.$$

Откуда следует

$$0 \leqslant \operatorname{cap}_G (P, \partial\Omega_k; \Omega_k) - \int\limits_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M},$$

$$\operatorname{cap}_G (P, \partial\Omega_k; \Omega_k) \geq \int\limits_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M}.$$

Переходя в данном неравенстве к пределу при $k \to +\infty$ и используя определение G-параболичности поверхности, получаем

$$\int\limits_{P} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) d\mathcal{M} \leqslant 0,$$

что возможно только в случае, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \equiv 0$ на P. Так как компакт P был выбран произвольно, то заключаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \equiv 0$ на $\mathcal{M}$.

Так как матрица G положительно определена, значит, для всех i будут выполнены равенства $k_i = 0$, где k_i – главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$. Это означает, что $\mathcal{M}$ – плоскость. $\square$

4. Примеры использования полученных результатов

Пусть C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной радиус-вектором

$$\vec{R}(t, \theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{5}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ – радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2-гладкая функция на (a, b), ξ_{n+1} – координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$ и функции $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$, $\Psi(x) = \psi(x_{n+1}) = \psi(t)$.

Введем некоторые обозначения для более компактной записи формулировок

$$\tau = \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)},$$

$$\phi'(\tau) = d\phi/d\xi_{n+1},\ \phi''(\tau) = d^2\phi/d\xi^2_{n+1},$$

$$\dot{r}(t) = dr(t)/dt,\ \ddot{r}(t) = d^2r(t)/dt^2,$$

$$B(t) = \frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot{r}^2(t))\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right)},\ C(t) = \frac{r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}{\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}},$$

$$Q(t) = \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}.$$

Тогда из теоремы 1 следуют теорема 6 об уравнении экстремалей (доказательство приведено в [15]) и теорема 7 о выражении второй вариации для поверхности вращения.

Теорема 6. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2, заданная радиус-вектором* (5), *является экстремалью функционала* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{(n-1) + \Psi(x)C(t)}{B(t)+1} = 0.$$

Следующая теорема является логическим продолжением теоремы 6 и полезна при нахождении областей устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей вращения.

Теорема 7. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2, заданная радиус-вектором* (5), *устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} h'^2_t(t,\theta)\frac{\phi''(\tau) + Q(t)(1+\dot{r}^2(t))}{(1+\dot{r}^2(t))^2} + |D_\theta h(t,\theta)|^2\frac{Q(t)}{r^2(t)} -$$

$$-h^2(t,\theta)\cdot\left(\frac{\left((n-1)Q(t) + \psi(t)r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}\right)^2}{r^2(t)(\phi''(\tau) + Q(t)(1+\dot{r}^2(t)))} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)Q(t)}{r^2(t)(1+\dot{r}^2(t))} + \frac{\psi'(t)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right) d\mathcal{M}$$

знакоопределена в классе липшицевых функций $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, таких что $h \in C^1_0(\mathcal{M})$.

Доказательство теоремы 7. Поскольку все вспомогательные этапы вычислений коэффициентов квадратичных форм, главных кривизн и главных направлений поверхности довольно подробно описаны в [15], то здесь мы их приводить не будем. Для подстановки в формулу второй вариации нам необходимо выписать уже полученные формулы первой и второй квадратичных форм и пояснить, как были получены значения матрицы G на векторах E_i и ∇h.

Первая квадратичная форма

$$I = (1+\dot{r}^2(t))dt^2 + r^2(t)d\theta^2,$$

где $d\theta^2$ – элемент длины для $\mathbb{S}^{n-1}$.

Вторая квадратичная форма

$$II = \frac{\ddot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\ dt^2 + \frac{r(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\ d\widetilde{\theta}^2,$$

где $d\widetilde{\theta}^2$ – вторая квадратичная формы для $\mathbb{S}^{n-1}$.

Применяя общепринятые обозначения $||g_{ij}||$ для матрицы коэффициентов первой квадратичной формы, а $||g^{ij}||$ для обратной к ней матрице, записываем формулу для вычисления градиента функции h

$$(\nabla h)^i = \sum_{j=0}^{n-1} g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}, \; i = \overline{0, n-1},$$

и вычисляем координаты градиента функции h

$$(\nabla h)^0 = \sum_{j=0}^{n-1} g^{0j} \frac{\partial h}{\partial x_j} = g^{00} \frac{\partial h}{\partial x_0} = \frac{h'_t}{1+\dot{r}^2(t)},$$

$$(\nabla h)^i = \sum_{j=0}^{n-1} g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n-1} g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{1}{r^2(t)} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial h}{\partial \theta_{ij}} = \frac{1}{r^2(t)} (Dh)^i, \; i \neq 0.$$

Обозначая $D_\theta h = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (Dh)^i$, получим координатную запись вектора градиента

$$\nabla h = \left(\frac{h'_t}{1+\dot{r}^2(t)}, \; \frac{D_\theta h}{r^2(t)} \right).$$

Отсюда нетрудно видеть, что квадрат модуля градиента будет иметь вид

$$|\nabla h|^2 = h'^2_t/(1+\dot{r}^2(t)) + |D_\theta h|^2/r^2(t),$$

так как $|\nabla h|^2 = \sum\limits_{j=0}^{n-1} g_{ij} \left((\nabla h)^i\right)^2$. А значения матрицы G на векторах E_i и ∇h вычисляются через скалярное произведение $\langle\langle G, E_i\rangle, E_i\rangle$, $\langle\langle G, \nabla h\rangle, \nabla h\rangle$ и выписываются следующим образом

$$G(E_1, E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot{r}^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}, \; G(E_i, E_i) = \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}},$$

$$G(\nabla h, \; \nabla h) = \frac{\phi''(\tau) h'^2_t}{(1+\dot{r}^2(t))^2} + \left(\frac{h'^2_t}{1+\dot{r}^2(t)} + \frac{|D_\theta h|^2}{r^2(t)} \right) \left(\phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}} \right).$$

Далее, получаем требуемое при подстановке всех посчитанных выражений в формулу второй вариации из теоремы 1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Hoffman, R. Osserman *The area of generalized gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and R^n* // Math. Ann. 1982. No. 60. P. 437–452.
2. J.L.Barbosa, M. do Carmo *Stability of minimal surfaces and eigevalues of the Laplacian* // Math. Z. 1980. V. 173. No. 1. P. 13–28.
3. H.B. Lawson *Some intrinsic characterizations of minimal surfaces* // J. Analyse Math. 1971. V. 24. P. 151–161.
4. Погорелов А. В. *Об устойчивости минимальных поверхностей* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 2. С. 293–295.
5. J. Simons *Minimal varieties in riemannian manifolds* // Ann. of Math. 1968. V.88. No. 1. P. 62–105.
6. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей.* М.: Наука, 1991. 174 с.

7. Фоменко А. Т. *О скорости роста и наименьших объемах глобально минимальных поверхностей в кобордизмах* // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. Вып. 21. М.: МГУ, 1985. С. 3–12.
8. Финн Р. *Равновесные капиллярные поверхности* // Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
9. Клячин В. А. *О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны* // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. № 4. С. 77–90.
10. Клячин В. А., Миклюков В. М. *Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях* // Матем. сб. 1996. Т. 187. №11. С. 67–88.
11. Клячин В. А., Медведева Н. М. *Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади* // Сибирские электронные математические известия. Статьи. 2007. Т. 4. С. 113–132.
12. M. do Carmo , C. K. Peng, *The stable minimal surfaces in* R^3 *are planes* // Bull.(Ne Ser.) Amer. Math. Soc. 1979. V. 1. No. 6. P. 903–906.
13. Клячин В. А., Миклюков В. М. *Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55. № 1. С. 206–217.
14. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* М.: Наука, 1983. 284 с.
15. Полубоярова Н. М. *Уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии* // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. 2016. № 5(36). С. 60–72.

Наталья Михайловна Полубоярова,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: natasha_medvedeva@volsu.ru, npolub@gmail.com