УДК 517.9

К ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Р. ХАКИМОВА

Аннотация. Обсуждается задача построения обобщенных инвариантных многообразий для нелинейных уравнений в частных производных. Обобщенным инвариантным многообразием для заданного нелинейного уравнения называется дифференциальная связь, совместная с линеаризацией этого уравнения. Фактически это понятие обобщает симметрию. Приведены примеры обобщенных инвариантных многообразий, полученных из симметрий. Однако существуют такие обобщенные инвариантные многообразия, которые не сводятся к симметриям, именно они представляют наибольший интерес. Такие обобщенные инвариантные многообразия позволяют эффективно строить пары Лакса, операторы рекурсии и частные решения интегрируемых уравнений. Изложен алгоритм построения обобщенного инвариантного многообразия для заданного уравнения. Дано полное описание обобщенных инвариантных многообразий порядка $(2,2)$ для уравнения Кортевега–де Фриза. Кратко изложен способ построения пары Лакса и оператора рекурсии с помощью обобщенного инвариантного многообразия. В качестве примера рассмотрено уравнение Кортевега–де Фриза.

Ключевые слова: пара Лакса, высшая симметрия, инвариантное многообразие, рекурсионный оператор.

Mathematics Subject Classification: 35Q51; 35Q53

1. Введение

В литературе широко известен метод построения частных решений нелинейных уравнений в частных производных, основанный на понятии дифференциальной связи (или инвариантного многообразия) ([1], [2]). Идея метода состоит в том, что к заданному уравнению добавляется совместное с ним уравнение, как правило, более простое. Такой прием позволяет найти частные решения исследуемого уравнения. В работах [3]–[7] была предложена схема построения пар Лакса и рекурсионных операторов для интегрируемых уравнений в частных производных, основанная на использовании аналогичной идеи. Подходящее обобщение состоит в том, что мы накладываем дифференциальную связь не к самому уравнению, а к его линеаризации. Полученное в итоге уравнение мы называем обобщенным инвариантным многообразием. Более детально это понятие обсуждается в §2 настоящей работы, где также приводятся необходимые определения. В §3 дается полное описание класса обобщенных инвариантных многообразий порядков (2,0), (2,1) и (2,2) для уравнения Кортевега–де Фриза. Отметим, что ранее задача о полном описании таких многообразий для нелинейных уравнений не изучалась. Алгоритм построения пары Лакса и оператора рекурсии по известному нетривиальному обобщенному инвариантному многообразию иллюстрируется в §4 на примере уравнения КдФ.

A.R. Khakimova, On description of generalized invariant manifolds for nonlinear equations.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №15–11–20007).

Поступила 15 января 2018 г.

2. Основные определения

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x,t,u,u_x,u_{xx},\dots,u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_r = g(x,t,u,u_x,u_{xx},\dots,u_{r-1}) \tag{2}$$

называется инвариантным многообразием для уравнения (1), если оно совместно с (1), т.е. если выполняется следующее условие

$$D_x^r f - D_t g|_{(1),(2)} = 0. \tag{3}$$

Здесь D_x и D_t операторы полного дифференцирования по x и соответственно, по t. Отметим, что условие (3) равносильно некоторому уравнению в частных производных на искомую функцию g. Иногда это уравнение можно решить явно, хотя в общем случае задача отыскания функции g является весьма сложной.

Ситуация заметно меняется, если искать обыкновенное дифференциальное уравнение, совместное не с самим нелинейным уравнением (1), а с его линеаризацией

$$U_t = \frac{\partial f}{\partial u}U + \frac{\partial f}{\partial u_x}U_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}}U_{xx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k}U_k. \tag{4}$$

Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x,t,U,U_x,U_{xx},\dots,U_{m-1};u,u_x,u_{xx},\dots,u_n), \tag{5}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся произвольным решением уравнения (1), входит в (5) в качестве функционального параметра.

Замечание 1. *Предполагается, что в равенстве* (5) *переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, ..., U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, ..., u_n являются свободными переменными, принимающими произвольные значения.*

Определение 1. *Уравнение* (5) *определяет обобщенное инвариантное многообразие, если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m|_{(1),(4),(5)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$, x, t, U, U_x, ..., U_{m-1}.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1) и (4), а переменные $U_m, U_{m+1}, \dots$ – в силу равенства (5). Чтобы подчеркнуть, что решение $u(x,t)$ берется произвольным, мы рассматриваем переменные u, u_x, $u_{xx}, \dots$ как независимые. В силу этого задача отыскания функции $F(x,t,U,U_x,U_{xx},\dots,U_{m-1};u,u_x,u_{xx},\dots,u_n)$ является переопределенной и эффективно решается. Данный факт подтверждается многочисленными примерами, рассмотренными в работах [3]–[7]. В перечисленных работах также было показано, что обобщенное инвариантное многообразие является эффективным инструментом для построения пары Лакса и рекурсионного оператора.

Определение 2. *Пусть обобщенное инвариантное многообразие M определяется уравнением* (5)*. Пару чисел (m,n) назовем порядком многообразия M. Многообразие M назовем тривиальным, если произвольное решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$U = \varphi(x,t,u,u_x,\dots,u_s), \quad где \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_s} \neq 0.$$

Ниже мы приведем два примера тривиальных обобщенных инвариантных многообразий. Можно проверить, что уравнение

$$U_x = \frac{u_{xx}}{u_x} U \tag{6}$$

определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + u u_x. \tag{7}$$

Это следует из того, что общее решение уравнения (6) выражается через классическую симметрию $u_\tau = u_x$ уравнения КдФ в виде

$$U = c u_x$$

и поэтому удовлетворяет линеаризованному уравнению.

Аналогично проверяется, что уравнение второго порядка

$$U_{xx} = \frac{3u_1^2 u_2 + u_1 u_5 - u_3^2}{u_1 u_4 + u_1^3 - u_2 u_3} U_x + \frac{u_3(u_1^2 + u_4) - u_2 u_5 - 3u_1 u_2^2}{u_1 u_4 + u_1^3 - u_2 u_3} U, \quad u_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x,t) \tag{8}$$

задаёт обобщенное инвариантное многообразие для уравнения (7). Его общее решение есть линейная комбинация двух симметрий $u_\tau = u_x$ и $u_{\tau_1} = u_t$: $U = c_1 u_x + c_2 u_t$.

3. Полное описание обобщенных инвариантных многообразий второго порядка для уравнения КдФ

Примеры (6) и (8) показывают, что тривиальные инвариантные многообразия легко можно построить при помощи классических и высших симметрий рассматриваемого уравнения. Однако по таким многообразиям, по-видимому, невозможно построить пары Лакса и рекурсионные операторы. Более интересными объектами являются нетривиальные обобщенные инвариантные многообразия.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть уравнение $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx})$ определяет обобщенное инвариантное многообразие для уравнения КдФ (7), тогда оно имеет вид*

$$U_{xx} = \frac{u_x}{2(u + c_3)} U_x - \frac{2}{3}(u + c_3) U + \frac{u_x \sqrt{9U_x^2 + 6(u + c_3)(U^2 + 6c_4)}}{6(u + c_3)},$$

где c_3 и c_4 произвольные постоянные.

Обобщенных инвариантных многообразий вида $U_{xx} = F(U, U_x, u)$ и вида $U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x, u_{xx})$, с условием, что $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}$ отлично от тождественного нуля для уравнения (7), не существует.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся определением 1. Линеаризуем уравнение (7)

$$U_t = U_{xxx} + u U_x + u_x U \tag{9}$$

и будем искать обобщенное инвариантное многообразие в виде

$$U_{xx} = F(U, U_x, u, u_x) \tag{10}$$

из условия

$$D_x^2 U_t - D_t F\big|_{(7),(9),(10)} = 0. \tag{11}$$

Перепишем равенство (11) в более развернутом виде:

$$\begin{aligned}(U_{xxxxx} + uU_{xxx} + 3u_x U_{xx} + 3u_{xx} U_x + u_{xxx} U - F_U U_t \\ - F_{U_x} U_{x,t} - F_u u_t - F_{u_x} u_{x,t})\big|_{(7),(9),(10)} = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

В равенстве (12) переменные u_t и $u_{x,t}$ заменяем в силу уравнения (7), U_t и $U_{x,t}$ в силу (9), а U_{xxx} и U_{xxxxx} в силу (10). В итоге получаем:

$$\alpha_1(U,U_x,u,u_x)u_{xxx}u_{xx}+\alpha_2(U,U_x,u,u_x)u_{xxx}+\alpha_3(U,U_x,u,u_x)u_{xx}^3$$
$$+\alpha_4(U,U_x,u,u_x)u_{xx}^2+\alpha_5(U,U_x,u,u_x)u_{xx}+\alpha_6(U,U_x,u,u_x)=0, \qquad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=3F_{u_xu_x},\\
&\alpha_2=U+3U_xF_{Uu_x}+3FF_{U_xu_x}+3u_xF_{uu_x},\\
&\alpha_3=F_{u_xu_xu_x},\\
&\alpha_4=3U_xF_{Uu_xu_x}+3F_{uu_x}+3F_{U_xu_x}F_{u_x}+3FF_{U_xu_xu_x}+3u_xF_{uu_xu_x},\\
&\alpha_5=3U_xF_{UU_x}F_{u_x}+3U_xF_{Uu}+3u_x^2F_{uuu_x}+3u_xF_{U_xu_x}F_u+3F^2F_{U_xU_xu_x}+3FF_{U_xu}\\
&\quad+3U_xF_UF_{U_xu_x}+3U_x^2F_{UUu_x}+3U_x+3FF_{u_x}F_{U_xU_x}+6U_xFF_{UU_xu_x}+6u_xU_xF_{Uuu_x}\\
&\quad+6u_xFF_{U_xuu_x}+3FF_{U_x}F_{U_xu_x}+3u_xF_{uu}-UF_{U_x}+3FF_{Uu_x}+3u_xF_{u_x}F_{U_xu},\\
&\alpha_6=3u_xF+3F^2F_{UU_x}+3u_xFF_{Uu}+3U_x^2F_UF_{UU_x}+3u_x^2F_uF_{U_xu}+3U_xF^2F_{UU_xU_x}\\
&\quad+3u_xF^2F_{U_xU_xu}+3u_x^2U_xF_{Uuu}+3u_x^2FF_{U_xuu}+3U_x^2FF_{UUU_x}+3u_xU_x^2F_{UUu}\\
&\quad+3U_xFF_{UU}+F^3F_{U_xU_xU_x}+u_x^3F_{uuu}+3U_xFF_{U_x}F_{UU_x}+3u_xU_xF_uF_{UU_x}\\
&\quad+3u_xU_xF_UF_{U_xu}+3u_xFF_{U_x}F_{U_xu}+6u_xU_xFF_{UU_xu}-u_xUF_U+3U_xFF_UF_{U_xU_x}\\
&\quad+U_x^3F_{UUU}+3u_xFF_uF_{U_xU_x}+3F^2F_{U_x}F_{U_xU_x}-u_x^2F_{u_x}-2u_xU_xF_{U_x}.
\end{aligned}$$

Отметим, что переменные u_{xx}, u_{xxx} рассматриваются как независимые, поэтому (13) справедливо тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства

$$\alpha_i(U,U_x,u,u_x)=0,\quad i=\overline{1,6}. \qquad (14)$$

Исследуем систему уравнений (14). При $i=1$ и $i=3$ имеем наиболее простые соотношения. Из них находим

$$F(U,U_x,u,u_x)=F_1(U,U_x,u)u_x+F_2(U,U_x,u). \qquad (15)$$

Отталкиваясь от представления (15), мы можем в дальнейшем разваливать уравнения системы (14) по независимой переменной u_x. Сравнивая коэффициенты при u_x во втором уравнении системы (14), получим следующие два уравнения:

$$(F_1)_u+F_1(F_1)_{U_x}=0, \qquad (16)$$
$$U+3F_2(F_1)_{U_x}+3U_x(F_1)_U=0. \qquad (17)$$

Далее выразим из (16) функцию $(F_1)_u$, а из (17) функцию F_2:

$$(F_1)_u=-F_1(F_1)_{U_x}, \qquad (18)$$
$$F_2=-\frac{U+3U_x(F_1)_U}{3(F_1)_{U_x}},\quad \text{где}\quad (F_1)_{U_x}\neq 0. \qquad (19)$$

Действительно, предположим в (19), что $(F_1)_{U_x}=0$, тогда из (17) имеем:

$$U=0\quad \text{и}\quad (F_1(U,u))_U=0.$$

Это противоречит тому, что U – динамическая переменная.

Далее, в оставшихся уравнениях системы (14) заменим все производные функции F_1 по переменной u в силу (18), исключим функцию F_2 в силу (19) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной u_x. Таким образом, в дополнение к (18) имеем ещё четыре уравнения

$$\begin{aligned}
1.\quad & -\frac{3U_xF_1(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}} - \frac{F_1(F_1)_U(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_xU_x}}{(F_1)^3_{U_x}} + \frac{(F_1)_UU}{(F_1)_{U_x}} + U_x \\
& + \frac{F_1(U+6U_x(F_1)_U)(F_1)_{UU_x}}{(F_1)^2_{U_x}} = 0, \qquad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\quad & \frac{F_1(F_1)_U\left((3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_x} - 3F_1(F_1)_U\right)}{(F_1)^3_{U_x}}(F_1)_{U_xU_x} + 3F_1\left(U_x - \frac{F_1}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU} \\
& + F_1\left(\frac{6F_1(F_1)_U}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U+6U_x(F_1)_U}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_x} + F_1 - U(F_1)_U - U_x(F_1)_{U_x} = 0, \qquad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.\quad & \left(U_x^3 - \frac{6F_1U_x^2}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UUU} + \left(\frac{F_1(9U_x(F_1)_U+2U)}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U_x(3U_x(F_1)_U-2U)}{(F_1)_{U_x}}\right)(F_1)_{UU} \\
& + \left(\frac{2U_xF_1(2U+9U_x(F_1)_U) - U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_x}}{(F_1)^2_{U_x}}\right)(F_1)_{UUU_x} \\
& + \left(\frac{U_x(3U_x(F_1)_U+U)^2}{3(F_1)^2_{U_x}} - \frac{2F_1(3U_x(F_1)_U+U)(9U_x(F_1)_U+U)}{3(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_xU_x} \\
& + \left(\frac{2(F_1)_UF_1(3U_x(F_1)_U+U)^2}{3(F_1)^4_{U_x}} - \frac{(3U_x(F_1)_U+U)^3}{27(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{U_xU_xU_x} \\
& + \frac{3U_x^2(5F_1 - U_x(F_1)_{U_x})(F_1)_{UU_x}(F_1)_{UU}}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U}{3(F_1)_{U_x}} \qquad (22) \\
& + \left(\frac{U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{3U_xF_1(5U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{U_xU_x}(F_1)_{UU} \\
& + \left(\frac{2U_x^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)^2_{U_x}} - \frac{U_xF_1(30U_x(F_1)_U+7U)}{(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)^2_{UU_x} \\
& + \left(\frac{5F_1(3U_x(F_1)_U+U)(9U_x(F_1)_U+U)}{3(F_1)^4_{U_x}} - \frac{U_x(3U_x(F_1)_U+U)^2}{(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_x}(F_1)_{U_xU_x} \\
& + \left(\frac{9U_xF_1 - 6U_xU(F_1)_U + 18U_x^2(F_1)_U^2 - 2U^2}{3(F_1)^2_{U_x}} - \frac{F_1(F_1)_U(5U+18U_x(F_1)_U)}{(F_1)^3_{U_x}}\right)(F_1)_{UU_x} \\
& + \left(\frac{U^2(F_1)_U - UF_1 - 9U_x^2(F_1)_U^3 - 9U_xF_1(F_1)_U}{3(F_1)^3_{U_x}} + \frac{3F_1(F_1)_U^2(3U_x(F_1)_U+U)}{(F_1)^4_{U_x}}\right)(F_1)_{U_xU_x} \\
& + \left(\frac{(3U_x(F_1)_U+U)^3}{9(F_1)^4_{U_x}} - \frac{F_1(F_1)_U(3U_x(F_1)_U+U)^2}{3(F_1)^5_{U_x}}\right)(F_1)^2_{U_xU_x} = 0,
\end{aligned}$$

$$4.\quad G(U, U_x, u, F_1, (F_1)_U, (F_1)_{U_x}, (F_1)_u, (F_1)_{UU}, \ldots, (F_1)_{U_xU_xU_xU_x}) = 0. \qquad (23)$$

Мы не приводим явного вида уравнения (23), поскольку оно слишком большое. Рассмотрим уравнения (20) и (21). Умножим уравнение (20) на

$$(3F_1(F_1)_U - (3U_x(F_1)_U+U)(F_1)_{U_x})$$

и вычтем из него уравнение (21), умноженное на $(3U_x(F_1)_U+U)$, в результате получим:

$$\frac{3(F_1)^2_U}{(F_1)_{U_x}} + \frac{3F_1(F_1)_{UU}}{(F_1)_{U_x}} - \frac{3F_1(F_1)_U(F_1)_{UU_x}}{(F_1)^2_{U_x}} - 1 = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство по переменной U и разрешим относительно $(F_1)_U$:

$$(F_1)_U = \frac{(F_1)_{U_x}(U+F_3)}{3F_1}, \quad F_3 = F_3(U_x, u). \tag{24}$$

Искомая функция должна удовлетворять всем уравнениям (18), (20)–(23), (24). Из условия совместности (18) и (24) вытекает следующее равенство

$$\frac{\partial}{\partial U}(F_1)_u - \frac{\partial}{\partial u}(F_1)_U\bigg|_{(18),(24)} = 0. \tag{25}$$

Таким образом, в силу уравнений (18) и (24) равенство (25) принимает вид:

$$-\frac{(F_1)_{U_x}\left(F_1(F_3)_{U_x} + (F_3)_u\right)}{3F_1} = 0,$$

из которого заключаем, что $F_3(U_x, u) = c_1$, где c_1 – произвольная постоянная.

Далее в уравнениях (20)–(23) заменим все прозводные функции F_1 по переменной U в силу (24). Тогда получаем, что уравнения (20) и (21) тождественно выполняются. Затем из уравнения (22) выразим $(F_1)_{U_xU_xU_x}$:

$$\begin{aligned}(F_1)_{U_xU_xU_x} = {} & \frac{3(F_1)^2_{U_xU_x}}{(F_1)_{U_x}} - \frac{3(6F_1U_x + U^2 - c_1^2)(F_1)^3_{U_x}}{U^2F_1^2} + \frac{9(F_1)^2_{U_x}}{U^2} \\ & + \frac{9((F_1)_{U_x}U_x - F_1)(F_1)_{U_xU_x}}{U^2} + \frac{3U_x(3F_1U_x + U^2 - c_1^2)(F_1)^4_{U_x}}{U^2F_1^3}.\end{aligned} \tag{26}$$

Пользуясь условием совместности уравнений (24) и (26), приходим к двум возможным вариантам:

$$3U_xF_1(F_1)_{U_x} + c_1U(F_1)_{U_x} + U^2(F_1)_{U_x} - 3F_1^2 = 0, \tag{27}$$

либо

$$c_1^2(F_1)^3_{U_x} - 3U_xF_1(F_1)^3_{U_x} + 3F_1^2(F_1)^2_{U_x} - 3F_1^3(F_1)_{U_xU_x} = 0. \tag{28}$$

Предположим, что выполняется уравнение (27), тогда

$$F_1 = \frac{U_x}{2F_4} + \frac{\sqrt{9U_x^2 + 6F_4U(c_1+U)}}{6F_4}, \quad F_4 = F_4(U, u). \tag{29}$$

Подставляя полученное равенство (29) в уравнения (18) и (24), определяем, что

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad F_4 = u + c_2. \tag{30}$$

Мы проверили, что при выполнении (30) функция (29) удовлетворяет уравнению (23). Следовательно, в случае (27), искомая функция F имеет вид:

$$F = \frac{u_xU_x}{2(u+c_2)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_2)U^2}}{6(u+c_2)} - \frac{2}{3}(u+c_2)U. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь случай (28). Перепишем его в виде:

$$(F_1)_{U_xU_x} = \frac{(F_1)^2_{U_x}(c_1^2(F_1)_{U_x} - 3U_xF_1(F_1)_{U_x} + 3F_1^2)}{3F_1^3}. \tag{32}$$

Далее подстановка (32) в уравнение (23) даёт:

$$c_1 = 0 \quad \text{или} \quad 3U_xF_1 + 2Uc_1 + U^2 = 0. \tag{33}$$

Второе уравнение (33) противоречит равенству (24), поэтому выберем $c_1 = 0$.

Заметим, что при $c_1 = 0$, уравнение (28) явно решается:

$$F_1 = \frac{U_x}{2F_5} + \frac{\sqrt{U_x^2 + 4F_5F_6}}{2F_5}, \quad F_5 = F_5(U, u), F_6 = F_6(U, u). \tag{34}$$

Вид функций F_5 и F_6 определим при помощи уравнений (18) и (24). Подставим (34) в (18) и (24), получим:

$$F_5 = u + c_3, \quad F_6 = \frac{1}{6}U^2 + c_4.$$

Таким образом, в случае выполнения условия (28), имеем

$$F = \frac{u_x U_x}{2(u+c_3)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_3)(U^2+6c_4)}}{6(u+c_3)} - \frac{2}{3}(u+c_3)U, \tag{35}$$

где c_3 и c_4 произвольные постоянные. Следовательно, (31) и (35) представляют собой два нелинейных обобщенных инвариантных многообразия. Однако, заметим, что (31) является частным случаем (35), поэтому фактически уравнение (11) имеет ровно одно решение

$$U_{xx} = \frac{u_x U_x}{2(u+c_3)} + \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_3)(U^2+6c_4)}}{6(u+c_3)} - \frac{2}{3}(u+c_3)U, \tag{36}$$

зависящее от двух произвольных постоянных c_3, c_4. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Обобщенное инвариантное многообразие* (36) *не является тривиальным.*

Предположим, что произвольное решение уравнения (36) имеет вид:

$$U = \varphi(x, t, u, u_x, \dots, u_j), \quad \text{где} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \neq 0. \tag{37}$$

Найдем U_x и U_{xx} из уравнения (37):

$$U_x = \varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \dots + \varphi_{u_j} u_{j+1}, \tag{38}$$

$$U_{xx} = \varphi_{uu} u_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \dots + \varphi_{u_j} u_{j+2}. \tag{39}$$

Заменим в уравнении (36) функции U, U_x, U_{xx} в силу равенств (37), (38) и (39):

$$\varphi_{uu} u_x^2 + \varphi_u u_{xx} + \dots + \varphi_{u_j} u_{j+2} = \frac{u_x}{2(u+c_3)}\left(\varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \dots + \varphi_{u_j} u_{j+1}\right)$$
$$+ \frac{u_x\sqrt{9\left(\varphi_u u_x + \varphi_{u_x} u_{xx} + \dots + \varphi_{u_j} u_{j+1}\right)^2 + 6(u+c_3)(\varphi^2+6c_4)}}{6(u+c_3)} - \frac{2}{3}(u+c_3)\varphi. \tag{40}$$

Приравнивая коэффициенты при старшей производной u_{j+2} в (40), имеем равенство

$$\varphi_{u_j} = 0,$$

которое противоречит предположению (37).

4. Связь между обобщенными инвариантными многообразиями, парами Лакса и рекурсионными операторами

Инвариантные многообразия задаются обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими зависимость от постоянных параметров. К ним можно применить обычные способы понижения порядка, посредством отыскания интегралов либо повышение порядка путем исключения постоянных параметров. Применим одно из таких преобразований к многообразию (36), найденному выше. Исключим параметр c_4 из уравнения (36) и его дифференциального следствия. В результате получим линейное по U, U_x, U_{xx} обобщенное инвариантное многообразие третьего порядка. Действительно, перепишем (36) в виде

$$U_{xx} - \frac{u_x U_x}{2(u+c_3)} + \frac{2}{3}(u+c_3)U = \frac{u_x\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_3)(U^2+6c_4)}}{6(u+c_3)}. \tag{41}$$

Возведем в квадрат обе части равенства (41) и разрешим полученное выражение относительно постоянной c_4:

$$c_4 = \frac{u+c_3}{u_x^2}U_{xx}^2 + \left(\frac{4(u+c_3)^2}{3u_x^2}U - \frac{1}{u_x}U_x\right)U_{xx} - \frac{2(u+c_3)}{3u_x}UU_x + \left(\frac{4(u+c_3)^3}{9u_x^2} - \frac{1}{6}\right)U^2. \quad (42)$$

Продифференцируем равенство (42) по переменной x:

$$\left(\frac{2(u+c_3)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_3)^2}{3u_x^2}U\right)U_{xxx} - \frac{2(u+c_3)u_{xx}}{u_x^3}U_{xx}^2 - \frac{2(u+c_3)}{3u_x}U_x^2$$
$$- \left(\frac{8(u+c_3)u_{xx}}{3u_x^3} - \frac{2(u+c_3)}{u_x}\right)UU_{xx} + \left(\frac{2(u+c_3)u_{xx}}{3u_x^2} + \frac{8(u+c_3)^3}{9u_x^2} - 1\right)UU_x$$
$$+ \left(\frac{u_{xx}}{u_x^2} + \frac{4(u+c_3)^2}{3u_x^2}\right)U_xU_{xx} + \left(\frac{4(u+c_3)^2}{3u_x} - \frac{8(u+c_3)^3u_{xx}}{9u_x^3}\right)U^2 = 0.$$

Упростим полученное выражение и перепишем его в следующем виде:

$$\left(\frac{2(u+c_3)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_3)^2}{3u_x^2}U\right) \times$$
$$\left(U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + \frac{2}{3}(u+c_3)U_x - \left(\frac{2(u+c_3)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на следующие два уравнения:

$$1. \quad \frac{2(u+c_3)}{u_x^2}U_{xx} - \frac{1}{u_{xx}}U_x + \frac{4(u+c_3)^2}{3u_x^2}U = 0, \quad (43)$$

$$2. \quad U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} + \frac{2}{3}(u+c_3)U_x - \left(\frac{2(u+c_3)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U = 0. \quad (44)$$

Предположим, что выполняется условие (43). Тогда, с учетом (41), имеем равенство

$$\left(\frac{1}{u_{xx}} - \frac{1}{u_x}\right)U_x - \frac{\sqrt{9U_x^2 + 6(u+c_3)(U^2+6c_4)}}{3u_x} = 0,$$

которое противоречит тому, что переменные U_x, U, u, u_x, u_{xx}, c_3, c_4 являются свободными переменными, принимающими произвольные значения (см. Замечание 1, §2). Следовательно, имеет место только (44), т.е.

$$U_{xxx} = \frac{u_{xx}}{u_x}U_{xx} - \frac{2}{3}(u+c_3)U_x + \left(\frac{2(u+c_3)u_{xx}}{3u_x} - u_x\right)U. \quad (45)$$

Удивительный факт состоит в том, что полученное уравнение третьего порядка оказалось линейным.

Отметим, что уравнения (36) и (45) являются различными формами записи одного и того же объекта. Переход от одной формы записи к другой заключается в простом преобразовании в классе обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, эти формы записи отличаются друг от друга с точки зрения приложения. Для построения пары Лакса удобно пользоваться формулой (36), а для построения оператора рекурсии больше подходит уравнение (45).

Напомним, что оператор рекурсии и пара Лакса являются важными атрибутами теории интегрируемости. Способы построения пары Лакса ранее обсуждались в работах [8]–[15]. По поводу рекурсионного оператора см., например, обзор [16]. Обсуждаемый в данной работе способ построения этих объектов через обобщенное инвариантное многообразие был разработан в работах [3]–[7].

Найдем пару Лакса для уравнения КдФ, воспользовавшись формулой (36). Положим $c_4 = 0$, тогда подкоренное выражение будет квадратичной формой от U, U_x с коэффициентом, зависящим от u, c_3. Перепишем линеаризованное уравнение (9) с учетом уравнения (36)

$$U_t = \frac{u_{xx}\sqrt{9U_x^2 + 6(u + c_3)U^2}}{6(u + c_3)} + \left(\frac{u_{xx}}{2(u + c_3)} + \frac{u - 2c_3}{3}\right) U_x. \tag{46}$$

Отметим, что пара, составленная из уравнений (36) и (46), является парой Лакса для уравнения КдФ (7), но представленной в нелинейной форме. Опыт показывает, что полученная таким образом пара Лакса линеаризуется при помощи подходящей замены переменных (см. [6]). Для приведения этой пары к линейному виду выразим переменные U и U_x как некоторые квадратичные формы от новых переменных φ и ψ, так чтобы подкоренное выражение в уравнении (36) было полным квадратом. Воспользуемся следующей леммой (см. [6])

Лемма 1. *Квадратичная форма* $w(P, Q) = P^2 + Q^2$, *где*

$$P = \alpha_1\varphi^2 + \beta_1\varphi\psi + \gamma_1\psi^2, \quad Q = \alpha_2\varphi^2 + \beta_2\varphi\psi + \gamma_2\psi^2 \tag{47}$$

может быть записана в виде $P^2 + Q^2 = (\alpha_3\varphi + \beta_3\psi)^2$ *тогда и только тогда, когда коэффициенты формы* (47) *удовлетворяют одному из следующих двух условий*

1. $\beta_2 = \alpha_1 = \gamma_1 = 0$, $\beta_1^2 + 4\alpha_2\gamma_2 = 0$;
2. *существует функция* h *такая что* $\alpha_2 = h\alpha_1$, $\gamma_2 = h\gamma_1$, $\beta_1 = -h\beta_2$, $\beta_2^2 + 4\alpha_1\gamma_1 = 0$.

Следуя Лемме 1, выберем следующую замену переменных

$$U = \frac{2}{\sqrt{6}}\varphi\psi, \quad U_x = \frac{1}{3}\sqrt{u + c_3}(\varphi^2 - \psi^2).$$

Тогда вместо пары уравнений (36), (46) получим две системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_x = \dfrac{u_x}{4(u + c_3)}\varphi - \dfrac{\sqrt{u + c_3}}{\sqrt{6}}\psi, \\ \psi_x = \dfrac{\sqrt{u + c_3}}{\sqrt{6}}\varphi - \dfrac{u_x}{4(u + c_3)}\psi, \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} \varphi_t = \left(\dfrac{3u_{xxx} + u_x(u - 2c_3)}{12(u + c_3)}\right)\varphi - \dfrac{\sqrt{6}}{18}(u - 2c_3)\sqrt{u + c_3}\psi, \\ \psi_t = \left(\dfrac{u_{xx}}{\sqrt{6}\sqrt{u + c_3}} + \dfrac{\sqrt{6}}{18}(u - 2c_3)\sqrt{u + c_3}\right)\varphi - \left(\dfrac{3u_{xxx} + u_x(u - 2c_3)}{12(u + c_3)}\right)\psi. \end{cases} \tag{49}$$

Пара (48), (49) представляет собой линейную пару Лакса для уравнения КдФ (7). Приведем пару (48), (49) к известной паре Лакса. Исключим в системе (48) зависимость от u_x. С этой целью сделаем замену переменных $\varphi = \alpha p$ и $\psi = \beta q$, которая приводит (48) к виду

$$\begin{cases} p_x = \left(\dfrac{u_x}{4(u + c_3)} - \dfrac{\alpha_x}{\alpha}\right)p - \dfrac{\sqrt{u + c_3}}{\sqrt{6}}\dfrac{\beta}{\alpha}q, \\ q_x = \dfrac{\sqrt{u + c_3}}{\sqrt{6}}\dfrac{\alpha}{\beta}p - \left(\dfrac{u_x}{4(u + c_3)} + \dfrac{\beta_x}{\beta}\right)q. \end{cases} \tag{50}$$

Потребуем выполнения равенств

$$\frac{\alpha_x}{\alpha} = \frac{u_x}{4(u + c_3)}, \quad \frac{\beta_x}{\beta} = -\frac{u_x}{4(u + c_3)}.$$

Откуда имеем $\alpha = (u + c_3)^{\frac{1}{4}}$, $\beta = (u + c_3)^{-\frac{1}{4}}$, и, следовательно, (50) запишется в виде

$$\begin{cases} p_x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} q, \\ q_x = \dfrac{1}{\sqrt{6}} (u + c_3) p. \end{cases} \tag{51}$$

Перейдем от системы (51) к уравнению второго порядка на переменную p, т.е. имеем

$$p_{xx} = -\frac{1}{6}(u + c_3)p. \tag{52}$$

В результате указанных выше преобразований система (49) перейдет к уравнению вида

$$p_t = \frac{1}{3}(u - 2c_3)p_x - \frac{1}{6}u_x p. \tag{53}$$

Пара уравнений (52), (53) совпадает с известной парой Лакса для уравнения КдФ (см. [17]).

Покажем теперь, как при помощи обобщенного инвариантного многообразия (45) найти рекурсионный оператор уравнения КдФ (7). Перепишем уравнение (45) в следующем виде

$$U_{xxx} - \frac{u_{xx}}{u_x} U_{xx} + \frac{2}{3} u U_x - \left(\frac{2u u_{xx}}{3u_x} - u_x \right) U = -\frac{2}{3} c_3 u_x D_x \left(\frac{1}{u_x} U \right). \tag{54}$$

Для получения рекурсионного оператора из уравнения (54) необходимо представить его в виде $RU = \lambda U$. Для этого умножим уравнение (54) на оператор $u_x D_x^{-1} \left(\frac{1}{u_x} \right)$ и после несложных преобразований получим выражение

$$\left(D_x^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x D_x^{-1} \right) U = \lambda U, \quad \lambda = -\frac{2}{3} c_3.$$

Таким образом, искомый рекурсионный оператор представляется в виде

$$R = D_x^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_x D_x^{-1}. \tag{55}$$

Построенный оператор (55) совпадает с известным рекурсионным оператором уравнения КдФ (см. [18]).

Автор выражает искреннюю признательность И. Т. Хабибуллину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также благодарит участников семинара кафедры ВВТС УГАТУ под руководством Р. К. Газизова за полезные замечания и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике.* Новосибирск: Наука, 1984.
2. Яненко Н.Н. *Об инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений* // Изв. вузов. Матем. 3, 1961. С. 185–194.
3. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, M.N. Poptsova *On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**:3, id 035202. 2016. 35p.
4. Павлова Е.В., Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. *Об одной интегрируемой дискретной системе* // Дифференциальные уравнения. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН, М., **140**. 2017. С. 30–42.
5. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. *Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек* // Теоретическая и математическая физика **191**:3. 2017. С. 369–388.

6. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova *On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**:30, id 305206 (19 pp.) (2017).
7. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. *О прямом алгоритме построения рекурсионных операторов и пар Лакса для интегрируемых моделей* // ТМФ, 196:2. 2018. С. 294–312.
8. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I* // Функц. анализ и его прил. **8**:3.1974. С. 43–53.
9. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II* // Функц. анализ и его прил. **13**:3. 1979. С. 13–22.
10. H.D. Wahlquist, F B. Estabrook *Prolongation structures of nonlinear evolution equations* // Journal of Mathematical Physics **16**:1. 1975. P. 1–7.
11. F.W. Nijhoff, A.J. Walker *The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system* // Glasgow Mathematical Journal **43**:A. 2001. P. 109–123.
12. A.I. Bobenko, Yu.B. Suris *Integrable systems on quad-graphs* // Int. Math. Res. Notes **11**. 2002. P. 573–611.
13. F.W. Nijhoff *Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system* // Physics Letters A **297**:1–2. 2002. P. 49–58.
14. Ямилов Р.И. *О классификации дискретных уравнений* // в сб. Интегрируемые системы, ред. А. Б. Шабат (Уфа: БФАН СССР). 1982. С. 95–114.
15. P. Xenitidis *Integrability and symmetries of difference equations: the Adler-Bobenko-Suris case* // Proc. 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” arXiv:0902.3954. 2009. P. 226–42.
16. V.V. Sokolov *Algebraic structures related to integrable differential equations* // arXiv:1711.10613. 2017.
17. P.D. Lax *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Commun. Pure Appl. Math. **21**:5.1968. P. 67–90.
18. C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura *Korteweg-devries equation and generalizations. VI. methods for exact solution* // Communications on pure and applied mathematics **27**:1. 1974. P. 97–133.

Айгуль Ринатовна Хакимова,
Башкирский государственный университет,
ул.Заки Валиди, 32,
450077, г. Уфа, Россия

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: aigulya.khakimova@mail.ru