ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 35-43.

УДК 517.925

О ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

В.И. КАЧАЛОВ

Аннотация. Метод голоморфной регуляризации, являющийся логическим продолжением метода С.А. Ломова, позволяет строить решения нелинейных сингулярно возмущенных начальных задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра. Сам метод основан на обобщении теоремы Пуанкаре о разложении: в регулярном случае решения голоморфным образом зависят от малого параметра, в сингулярном — такую зависимость наследуют первые интегралы. Возникшая в рамках метода регуляризации, С.А. Ломова концепция псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения сингулярно возмущенных задач, положила начало становлению аналитической теории сингулярных возмущений. Эта теория призвана уравнять в правах регулярную и сингулярную теории. В первом случае, при достаточно общих предположениях, получающиеся при решении задач ряды по степеням малого параметра, сходятся в обычном смысле, а во втором — в основном асимптотически. Яркий пример голоморфной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра дает теорема Пуанкаре о разложении.

В представленной работе метод голоморфной регуляризации будет применен к построению псевдоголоморфных решений сингулярно возмущенного уравнения первого порядка и тихоновской системы второго порядка.

Ключевые слова: голоморфная регуляризация, коммутационное соотношение, псевдоголоморфное решение, тихоновская система, предельный переход.

Mathematics Subject Classifcation: 34K26

1. Введение

Метод регуляризации С. А. Ломова [2, 3] позволяет строить решения сингулярно возмущенных задач в виде рядов по степеням малого параметра, сходящихся не только асимптотически, но и в обычном смысле. Такие решения называются псевдоаналитическими (псевдоголоморфными) и, тем самым, теорема Пуанкаре о разложении по параметру получает дальнейшее развитие и теории дифференциальных уравнений.

2. Голоморфные по параметру первые интегралы сингулярно возмущенных уравнений

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{dw}{dz} = f(z,w), \\ w(z_0,\varepsilon) = w_0 \end{gathered} \tag{1}$$

в некоторой области Ω_0 комплексных переменных z и w, содержащей начальную точку $P_0(z_0, w_0)$. В регулярном случае, т.е. когда малый комплексный параметр ε голоморфным

V.I. Kachalov, On the holomorphic regularization of strongly nonlinear singularly perturbed problems.

Поступила 29 мая 2017 г.

образом входит в правую часть уравнения, в соответствии с теоремой Пуанкаре такое уравнение имеет голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение, удовлетворяющее заданному начальному условию. Ясно, что для уравнения (1) такого не может быть, при сколь нибудь сложной правой части, поскольку при $\varepsilon = 0$ оно перестает быть дифференциальным. Тем не менее, как показывает следующая теорема, существует характеристика, наследующая голоморфное (даже целое) вхождение малого параметра в левую часть уравнения (1).

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{A}_{z_0}$ — алгебра функций одной комплексной переменной z, голоморфных в точке z_0, а $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$ — алгебра функций двух комплексных переменных, голоморфных в точке $P_0(z_0, w_0)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в Ω_0 и отлична там от нуля. Тогда отображения, задаваемые формулой*

$$\begin{gathered}H_f^\varepsilon[\varphi(z)] \equiv \varphi(z) - \varepsilon \int\limits_{w_0}^{w} \frac{\varphi'(z)dw_1}{f(z,w_1)} + \varepsilon^2 \int\limits_{w_0}^{w} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z)dw_2}{f(z,w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z,w_1)} - \\ -\varepsilon^3 \int\limits_{w_0}^{w} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z)dw_3}{f(z,w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z,w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z,w_1)} + \dots,\end{gathered} \tag{2}$$

составляют голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ семейство $\{H_f^\varepsilon\}$ непрерывных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_{z_0}$ в алгебру $\mathcal{A}_{z_0 w_0}$, удовлетворяющих коммутационному соотношению

$$H_f^\varepsilon[\varphi(z)] = \varphi(H_f^\varepsilon[z]), \quad \varphi(z) \in \mathcal{A}_{z_0}. \tag{3}$$

Образ этого семейства состоит из первых интегралов $U_\varphi(z,w,\varepsilon) = H_f^\varepsilon[\varphi(z)]$ уравнения (1), голоморфных по малому параметру ε.

Доказательство теоремы 1 основано на использовании интегральной формулы Коши для функций нескольких комплексных переменных и общих свойствах интегралов дифференциальных уравнений [5].

3. Псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач

Определение 1. *Решение $w(z,\varepsilon)$ задачи Коши (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $W(z,\eta,\varepsilon)$, голоморфная в точке $Q(z_0,0,0)$ пространства комплексных переменных (z,η,ε) такая, что для любого ε из некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ найдется такая окрестность ω_z^ε точки z_0, что выполняется равенство*

$$w(z,\varepsilon) = W\left(z, \frac{\varphi(z)}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \tag{4}$$

в котором $\varphi(z)$ — некоторая функция из $\mathcal{A}_{z_0}$, удовлетворяющая условию $\varphi(z_0) = 0$.

Если же ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(z,\eta)\varepsilon^n, \tag{5}$$

представляющий функцию $W(z,\eta,\varepsilon)$ сходится равномерно по z на некотором компакте T_{z_0}, содержащем точку z_0, при каждом η из неограниченного связного множества G комплексной плоскости переменной η, в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от η), то решение $w(z,\varepsilon)$ называется псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Мы остановимся на более важной, на наш взгляд, глобальной псевдоголоморфности.

Теорема 2. *Если уравнение*

$$\varphi'(z)\int\limits_{w_0}^{w}\frac{dw_1}{f(z,w_1)}=\eta \tag{6}$$

разрешимо относительно w, *при каждом* η *из неограниченной односвязной области* $G\subset \mathbf{C}_\eta$, *и его решение* $w=W_0(z,\eta)$ *ограничено на множестве* $T_{z_0}\times G$, *где* $T_{z_0}\subset \mathbf{C}_z$ *— некоторый компакт, содержащий точку* z_0, *то решение* $w(z,\varepsilon)$ *начальной задачи* (1) *является псевдоголоморфным в глобальном смысле.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — компакт, содержащий точку $\eta=0$ и являющийся замыканием некоторой односвязной подобласти области G. По теореме о неявной функции и в соответствии с условием теоремы, для каждой точки $\eta\in\mathcal{K}$ существует окрестность σ_η, в которой уравнение

$$V(z,w,\varepsilon)=\eta, \tag{7}$$

где

$$cV(z,w,\varepsilon)=\varphi'(z)\int\limits_{w_0}^{w}\frac{dw_1}{f(z,w_1)}-\varepsilon\int\limits_{w_0}^{w}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{w_0}^{w_1}\frac{\varphi'(z)dw_2}{f(z,w_2)}\right)\frac{dw_1}{f(z,w_1)}+$$
$$+\varepsilon^2\int\limits_{w_0}^{w}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{w_0}^{w_1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{w_0}^{w_2}\frac{\varphi'(z)dw_3}{f(z,w_3)}\right)\frac{dw_2}{f(z,w_2)}\right)\frac{dw_1}{f(z,w_1)}-\ldots,$$

имеет голоморфное по ε решение $W(z,\eta,\varepsilon)$ равномерно по $z\in T_{z_0}$. Выберем из покрытия $\{\sigma_\eta\}$ компакта $\mathcal{K}$ конечное подпокрытие $\{\sigma_\eta\}_1^N$. Тогда функция $W(z,\eta,\varepsilon)$ будет голоморфной, равномерно по $z\in T_{z_0}$, при каждом $\eta\in\mathcal{K}$ в окрестности $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0>0$ — наименьшее из соответствующих конечному подпокрытию.

Далее, пусть параметр ε в уравнении (1) удовлетворяет неравенству $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Обозначим через $\widetilde{T}_{z_0}$ множество тех точек из T_{z_0}, для которых значения $\eta=\varphi(z)/\varepsilon$ принадлежат $\mathcal{K}$. Тогда решение $w(z,\varepsilon)$ представимо в виде сходящегося на $\widetilde{T}_{z_0}$ в обычном смысле ряда

$$w(z,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n W_n\left(z,\frac{\varphi(z)}{\varepsilon}\right). \tag{8}$$

Теорема доказана. □

Выпишем формулы для первых членов ряда (8):

$$W_1=-\frac{V_1}{V_2}\bigg|_{w=W_0(z,\varphi(z)/\varepsilon)},\qquad W_2=-\frac{V_{11}V_2^2-2V_{12}V_1V_2+V_{22}V_1^2}{2V_2^2}\bigg|_{w=W_0(z,\varphi(z)/\varepsilon)},$$

где

$$V_1 = -\int\limits_{w_0}^{w} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_1} \frac{\varphi'(z)dw_2}{f(z,w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z,w_1)};$$

$$V_2 = \frac{\varphi'(z)}{f(z,w)};$$

$$V_{11} = 2\int\limits_{w_0}^{w} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w_2} \frac{\varphi'(z)dw_3}{f(z,w_3)} \right) \frac{dw_2}{f(z,w_2)} \right) \frac{dw_1}{f(z,w_1)};$$

$$V_{12} = -\frac{1}{f(z,w)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{w_0}^{w} \frac{\varphi'(z)dw_1}{f(z,w_1)} \right);$$

$$V_{22} = -\frac{\varphi'(z) f'_w(z,w)}{f^2(z,w)}.$$

В следующих примерах будем считать, что $G = (-\infty; 0]$, T_{z_0} — некоторый отрезок вещественной оси, левый конец которого совпадает с точкой $z_0 = 0$ и $\varepsilon > 0$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши:

$$l\varepsilon \frac{dw}{dz} = w^2 - e^{2z},$$
$$w(0,\varepsilon) = 0.$$

Построенное методом голоморфной регуляризации решение имеет следующий вид:

$$w(z,\varepsilon) = e^z \operatorname{th} \frac{1-e^z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{th}^2 \frac{1-e^z}{\varepsilon} + \ldots .$$

Пример 2. Имеем задачу Коши:

$$\varepsilon \frac{dw}{dz} = e^{-we^z} - 10,$$
$$w(0,\varepsilon) = 0.$$

Тогда,

$$w(z,\varepsilon) = e^{-z} \ln \frac{1 + 9e^{10(1-e^z)/\varepsilon}}{10} + \varepsilon \frac{e^{-2z}}{10} \ln \frac{1 + 9e^{10(1-e^z)/\varepsilon}}{10} + \ldots$$

— искомое, псевдоголоморфное в глобальном смысле решение.

4. Голоморфная регуляризация тихоновской системы

Перейдем в вещественную область и рассмотрим на отрезке $[0,T]$ начальную задачу для тихоновской системы с одной медленной и одной быстрой переменной

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y,v) \\ \varepsilon \dfrac{dv}{dt} = F(t,y,v) \end{cases} \tag{9}$$
$$y(0,\varepsilon) = y_0, \quad v(0,\varepsilon) = v_0.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, причем y_0 и v_0 не зависят от него. Если положить $\varepsilon = 0$, то получится вырожденная система

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt} = f(t, \overline{y}, v) \\ 0 = F(t, \overline{y}, v), \end{cases} \tag{10}$$

для которой оставим только первое начальное условие: $\overline{y}(0) = y_0$.

Пусть $v = \Phi(t, \overline{y})$ — решение второго уравнения системы (10), тогда имеем задачу Коши:

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{y}}{dt} = f(t, \overline{y}, \Phi(t, \overline{y})) \\ \overline{y}(0) = y_0. \end{gathered} \tag{11}$$

При выполнении условий теоремы А. Н. Тихонова [1] имеет место предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} y(t, \varepsilon) = \overline{y}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lim_{\varepsilon \to +0} v(t, \varepsilon) = \Phi(t, \overline{y}(t)), \quad 0 < t \leqslant T.$$

Изложим формализм метода голоморфной регуляризации применительно к данной системе. Предположим, что ее правые части голоморфны в замкнутой области $\overline{D}$ пространства вещественных переменных (t, y, v), содержащей точку $Q_0(0, y_0, v_0)$ и, пусть, $F(t, y, v) \neq 0$ в этой области.

В соответствии с алгоритмом метода, перейдем от *нелинейной* системы (9) к *линейному* уравнению ее интегралов

$$\varepsilon LU + F\frac{\partial U}{\partial v} = 0, \tag{12}$$

где

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y}.$$

В предположении подчиненности оператора L оператору $F\frac{\partial}{\partial v}$ будем искать решение уравнения (12) в виде *регулярного* ряда по степеням ε:

$$U(t, y, v, \varepsilon) = U_0(t, y, v) + \varepsilon U_1(t, y, v) + \ldots + \varepsilon^n U_n(t, y, v) + \ldots, \tag{13}$$

для коэффициентов которого имеем серию задач (метод неопределенных коэффициентов):

$$\begin{aligned} &F\frac{\partial U_0}{\partial v} = 0, \\ &F\frac{\partial U_1}{\partial v} = -LU_0, \\ &F\frac{\partial U_2}{\partial v} = -LU_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F\frac{\partial U_n}{\partial v} = -LU_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве решения первого из уравнений (14) возьмем произвольную голоморфную функцию $U_0 = \psi(t, y)$, независящую от v.

Решив остальные уравнения, при условии $U_n(t,y,v_0)=0,\ \ n=1,2,\ldots$, получим

$$\begin{gathered}U(t,y,v,\varepsilon)=\psi(t,y)-\varepsilon\int\limits_{v_0}^{v}\frac{L\psi dv_1}{F(t,y,v_1)}+\\ +\varepsilon^2\int\limits_{v_0}^{v}\left(L\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{L\psi dv_2}{F(t,y,v_2)}\right)\frac{dv_1}{F(t,y,v_1)}-\ldots.\end{gathered}\tag{15}$$

Доказательство сходимости рядов вида (15) можно найти в [6]. Далее, нетрудно видеть, что равенство (15) задает линейное отображение H_F^ε алгебры $\mathcal{A}_{ty}$ функций, голоморфных на проекции области $\overline{D}$ на пространство переменных (t,y), в алгебру $\mathcal{A}_{tyv}$ функций, голоморфных на самой $\overline{D}$. Итак, $H_F^\varepsilon:\ \mathcal{A}_{ty}\to\mathcal{A}_{tyv}$ и $U(t,y,v,\varepsilon)=H_F^\varepsilon[\psi]$.

Если теперь положить $\psi=t$, а, затем, $\psi=y$, то получится два независимых интеграла системы (9): $H_F^\varepsilon[t]$ и $H_F^\varepsilon[y]$. В соответствии с общей теорией систем дифференциальных уравнений, существует функция Ψ такая, что $H_F^\varepsilon[\psi]=\Psi(H_F^\varepsilon[t],H_F^\varepsilon[y])$.

Положим в этом равенстве $v=v_0$, тогда получится, что $\psi=\Psi$, и оно приобретет вид коммутационного соотношения:

$$H_F^\varepsilon[\psi(t,y)]=\psi(H_F^\varepsilon[t],H_F^\varepsilon[y]).\tag{16}$$

Докажем, что отображения $H_F^\varepsilon:\ \mathcal{A}_{ty}\to\mathcal{A}_{tyv}$ являются гомоморфизмами. Действительно, для любых $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{A}_{ty}$ имеют место равенства:

$$\begin{gathered}H_F^\varepsilon[\psi_1\psi_2]=(\psi_1\psi_2)(H_F^\varepsilon[t],H_F^\varepsilon[y])=\psi_1(H_F^\varepsilon[t],H_F^\varepsilon[y])\psi_2(H_F^\varepsilon[t],H_F^\varepsilon[y])=\\ =H_F^\varepsilon[\psi_1]H_F^\varepsilon[\psi_2].\end{gathered}$$

В итоге справедлива

Теорема 3. *Каждой системе вида* (9) *соответствует голоморфное в точке* $\varepsilon=0$ *семейство* $\{H_F^\varepsilon\}$ *гомоморфизмов алгебры* $\mathcal{A}_{ty}$ *в алгебру* $\mathcal{A}_{tyv}$*, удовлетворяющих коммутационному соотношению* (16) *и задаваемых равенством* (15)*. Образами этих гомоморфизмов являются интегралы* $U(t,y,v,\varepsilon)$ *этой системы, голоморфные в точке* $\varepsilon=0$.

Далее, введем понятие псевдоголоморфного решения тихоновской системы второго порядка [7].

Определение 2. *Решение* $(y(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ *начальной задачи* (9) *называется псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon=0$*, если существуют голоморфные в точке* $M_0(0,0,0)$ *функции* $Y(t,\eta,\varepsilon)$ *и* $V(t,\eta,\varepsilon)$ *такие, что для любого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *(*ε_0 *— некоторое малое положительное число) существует* $\delta>0$ *такое, что при всех* $t\in[0,\delta)$ *выполняются равенства*

$$y(t,\varepsilon)=Y\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)$$
$$v(t,\varepsilon)=V\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)$$

для некоторой голоморфной на отрезке $[0,T]$ *функции* $\varphi(t)$*, причем* $\varphi(0)=0$ *и* $\varphi'(t)<0$ $\forall t\in[0,T]$.

Если же ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(t,\eta)\varepsilon^n,\qquad\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t,\eta)\varepsilon^n,$$

представляющие указанные функции, сходятся равномерно на отрезке $[0,T]$, при каждом фиксированном $\eta \in (-\infty; 0]$, в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (зависящей от η), то решение $(y(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ называется псевдоголоморфным в глобальном смысле.

Следующая теорема дает достаточные условия глобальной псевдоголоморфности.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы Тихонова о предельном переходе, решение $(y(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ в глобальном смысле.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — голоморфная на отрезке $[0,T]$ функция, такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) < 0\ \ \forall t \in [0,T]$ и $\overline{y}(t)$ — решение задачи Коши (11). Имеем два независимых первых интеграла (которые получаются из (15) при $\psi(t,y) = \varphi(t)$ и $\psi(t,y) = y - \overline{y}(t)$), неявным образом определяющих решение $(y(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$:

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{L\varphi dv_1}{F(t,y,v_1)} - \varepsilon \int\limits_{v_0}^{v} \left(L \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{L\varphi dv_2}{F(t,y,v_2)} \right) \frac{dv_1}{F(t,y,v_1)} + \ldots = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} y - \overline{y}(t) - \varepsilon \int\limits_{v_0}^{v} \frac{L(y-\overline{y}(t))dv_1}{F(t,y,v_1)} + \\ + \varepsilon^2 \int\limits_{v_0}^{v} \left(L \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{L(y-\overline{y}(t))dv_2}{F(t,y,v_2)} \right) \frac{dv_1}{F(t,y,v_1)} - \ldots = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

С учетом того, что $L\varphi = \varphi'(t)$, запишем эти уравнения в виде системы, обозначив правую часть (17) через η:

$$\begin{cases} \varphi'(t) \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv_1}{F(t,y,v_1)} - \varepsilon \int\limits_{v_0}^{v} \left(L \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{\varphi'(t) dv_2}{F(t,y,v_2)} \right) \frac{dv_1}{F(t,y,v_1)} + \ldots = \eta \\ y - \overline{y}(t) - \varepsilon \int\limits_{v_0}^{v} \frac{-\overline{y}'(t) + f(t,y,v_1)}{F(t,y,v_1)} dv_1 + \\ \qquad + \varepsilon^2 \int\limits_{v_0}^{v} \left(L \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{-\overline{y}'(t) + f(t,y,v_1)}{F(t,y,v_2)} dv_2 \right) \frac{dv_1}{F(t,y,v_1)} - \ldots = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Далее к этой системе применяется теорема о неявной функции и доказательство завершается по той же схеме, что и в теореме 2. При этом используется тот факт, что ограниченность функции $v = V_0(t, \varphi(t)/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $t \in [0,T]$, определяемой уравнением

$$\varphi'(t) \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv_1}{F(t,\overline{y}(t),v_1)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon},$$

является следствием асимптотической устойчивости точки покоя $\widetilde{v} = \Phi(t,y)$ так называемого присоединенного уравнения

$$\frac{d\widetilde{v}}{d\tau} = F(t,y,\widetilde{v}), \quad \tau \geq 0$$

— условие IV теоремы Тихонова о предельном переходе [1, с. 30]. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Выбор регуляризирующей функции $\varphi(t)$ в различных асимптотических методах производится по-разному. В методе Васильевой–Бутузова–Нефёдова $\varphi(t) = -t$; в методе регуляризации Ломова — спектром некоторого оператора, связанного с решаемой сингулярно возмущенной задачей. Весьма эффективным для решения нелинейных задач является метод нормальных форм Сафонова [4]. В большинстве случаев оба метода приводят к появлению экспоненциального пограничного слоя.

Что же касается метода голоморфной регуляризации, то здесь имеет место следующее утверждение: если уравнение

$$\varphi'(t)\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv_1}{F(t,\overline{y}(t),v_1)}=\eta$$

имеет решение вида $v = V_0(t, e^{\eta})$, где функция $V_0(t, q)$ является голоморфной на прямоугольнике $\Pi_{tq} = \{(t, q) :\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant q \leqslant 1\}$, то решение начальной задачи (9) является псевдоголоморфным в глобальном смысле на отрезке $[0, T]$.

Выпишем формулы первого порядка по ε:

$$y(t,\varepsilon)=\overline{y}(t)+\varepsilon\int\limits_{v_0}^{v}\frac{L(y-\overline{y}(t))dv_1}{F(t,y,v_1)}\Bigg|_{\substack{y=\overline{y}(t)\\ v=V_0(t,\varphi(t)/\varepsilon)}}+\overline{\overline{o}}(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0;$$

$$v(t,\varepsilon)=V_0\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\frac{F(t,y,v)}{\varphi'(t)}\left[\int\limits_{v_0}^{v}\left(L\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{\varphi'(t)dv_2}{F(t,y,v_2)}\right)\frac{dv_1}{F(t,y,v_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{v_0}^{v}\frac{L(y-\overline{y}(t))dv_1}{F(t,y,v_1)}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{v_0}^{v}\frac{\varphi'(t)dv_1}{F(t,y,v_1)}\right]\Bigg|_{\substack{y=\overline{y}(t)\\ v=V_0(t,\varphi(t)/\varepsilon)}}+\overline{\overline{o}}(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} l\dfrac{dy}{dt}=v^2,\\ \varepsilon\dfrac{dv}{dt}=v^2-y^2e^{2t},\quad t\in[0,T],\quad \varepsilon>0,\\ y(0,\varepsilon)=-2,\quad v(0,\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Имеем, с помощью предложенного подхода:

$$y(t,\varepsilon)=-2e^{-2t}-2\varepsilon e^{-t}\operatorname{th}\frac{2(e^{-t}-1)}{\varepsilon}+\overline{\overline{o}}(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0,$$
$$v(t,\varepsilon)=2e^{-t}\operatorname{th}\frac{2(e^{-t}-1)}{\varepsilon}+\overline{\overline{o}}(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

5. Заключение

В теоретической физике известен так называемый «аргумент Дайсона» [8], выражающий свойство неаналитичности решения любой (в общем случае) сингулярно возмущенной задачи и вытекающий из теоремы Пуанкаре о разложении. В частности, в нерелятивистской теории гравитации, при решении задачи гидростатического равновесия звезд в отсутствие локальной электронейтральности, разложение ведется по гравитационной константе G в окрестности значения $G = 0$. В представленной статье приведены условия псевдоголоморфности и, тем самым, появляется возможность строить решения сингулярно возмущенных задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач*, М.: Наука. 1973. 274 с.
2. Ломов С.А *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, М.: Наука. 1981. 400 с.
3. Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя*, М.: Изд-во МГУ. 2011. 456 с.
4. Сафонов В.Ф. *Нелинейная регуляризация сингулярно возмущенных резонансных задач и аналитичность их решений по параметру* // Сиб. матем. журнал. Т. 33, № 6. 1992. С. 178-187.
5. Качалов В.И. *Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач* // Вестник МЭИ. № 6. 2010. С. 54-62.
6. Качалов В.И. *Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных систем* // Вестник МЭИ. № 6. 2011. С. 57-68.
7. Качалов В.И. *Теорема Тихонова о предельном переходе и псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач* // Докл. РАН. Т. 458, № 6. 2014. С. 630-632.
8. Krivoruchenko M., Nadyozhin D., Yudin A. *Hydrostatic equlibrium of stars without elertroneutrality constraint* // arXiv: 1802. 10082 V1 [astro-ph.SR], 27 Feb. 2018, Cornell University. P. 1-20.

Василий Иванович Качалов,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
ул. Красноказарменная, 14,
111250, г. Москва, Россия
E-mail: `vikachalov@rambler.ru`