ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 3 (2018). С. 3-10.

УДК 519.2

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.С. АСЫЛГАРЕЕВ

Аннотация. Получены два результата, затрагивающие потраекторные свойства стохастических дифференциальных уравнений (далее — СДУ) с интегралом Стратоновича. Во-первых, доказаны теоремы сравнения для СДУ с интегралом Стратоновича относительно стандартного винеровского процесса, т.е. получены условия на коэффициенты СДУ при которых решение одного уравнения для фиксированной траектории винеровского процесса всегда находится выше или ниже решения другого уравнения для той же фиксированной траектории. При этом коэффициенты диффузии и сноса исследуемых уравнений могут быть различающимися. Во-вторых, на основе доказанных теорем сравнения были выведены условия устойчивости с вероятностью 1 возмущенных решений скалярных СДУ с интегралом Стратоновича относительно тривиального решения. Устойчивость с вероятностью 1 влечёт за собой устойчивость по Ляпунову для почти всех решений СДУ. Следует отметить, что для СДУ, как правило, рассматривается устойчивость в более слабых смыслах: по вероятности, p-устойчивость, экспоненциальная устойчивость. Используя формулу перехода между интегралами Ито и Стратоновича, справедливую при условии достаточной гладкости коэффициентов СДУ, эти результаты можно распространить на СДУ с интегралом Ито. Изложенный в работе подход основан на том, что решение СДУ можно представить в виде детерминированной функции от случайного аргумента, которая, в свою очередь, является решением цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений со случайной правой частью. В силу того, что данная техника является потраекторной, представленные в работе результаты могут быть также переформулированы для детерминированных аналогов СДУ (уравнений с симметричными интегралами).

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, устойчивость с вероятностью 1, теоремы сравнения, уравнения с симметричным интегралом, винеровский процесс.

Mathematics Subject Classification: 60H10

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим два стохастических дифференциальных уравнения (далее — СДУ) с интегралами Стратоновича относительно стандартного винеровского процесса

$$d\xi_t^{(1)} = \sigma_1(t, \xi_t^{(1)}) * dW_t + b_1(t, \xi_t^{(1)})dt,\ \xi_t^{(1)}|_{t=0} = \xi_0^{(1)}, \tag{1}$$

$$d\xi_t^{(2)} = \sigma_2(t, \xi_t^{(2)}) * dW_t + b_2(t, \xi_t^{(2)})dt,\ \xi_t^{(2)}|_{t=0} = \xi_0^{(2)}, \tag{2}$$

где функции $\sigma_i(t,u)$, $b_i(t,u)$, $i = 1, 2$ — детерминированные.

A.S. Asylgareev, On applying comparison theorems to studying stability with probability 1 of stochastic differential equations .

Поступила 3 ноября 2017 г.

Данная работа, являющаяся продолжением исследования [1], преследует две основные цели. Первая цель заключается в развитии подхода к сравнению решений СДУ, применённого в работе [1], на более широкий класс уравнений. Насколько нам известно, впервые теорема сравнения была доказана Скороходом [2] для СДУ Ито вида $d\xi_t^{(i)} = b_i(t, \xi_t^{(i)})dt + \sigma(t, \xi_t^{(i)})dW(t)$, $i = 1, 2$, с совпадающими коэффициентами диффузий, наиболее общий её вид приведён в монографии [3]. Предложенный Скороходом метод получил своё развитие в работе [4]. В дальнейшем Гейбу и Мантею в работе [5] удалось распространить полученные Скороходом результаты на СДУ Ито с многомерным винеровским процессом и на стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (далее — СДУЧП). Теоремы сравнения для СДУЧП также рассматривались в работе [6]. В исследовании [7] доказаны теоремы сравнения для СДУ Ито с дополнительным возмущением в виде пуассоновского процесса. Менее изучен случай СДУ с отличающимися коэффициентами диффузии. Наиболее известный результат в этой области принадлежит О'Брайну, который, в исследовании [8], доказал теоремы сравнения для уравнений $d\xi_t^{(i)} = \sigma_i(\xi_t^{(i)})dW_t + \frac{1}{2}\sigma_i(\xi_t^{(i)})\sigma_i'(\xi_t^{(i)})dt$, $i = 1, 2$, которые можно переписать в форме Стратоновича в виде уравнений без сноса $d\xi_t^{(i)} = \sigma_i(\xi_t^{(i)}) * dW_t$. Существенным отличием текущей работы является то, что доказанные в ней теоремы сравнения применимы к значительно более широкому классу СДУ, нежели в работе [8].

Второй целью данной работы является вывод условий устойчивости с вероятностью 1 для СДУ

$$d\xi_t = \sigma(t, \xi_t) * dW(t) + b(t, \xi_t)dt,\ \xi_t|_{t=t_0} = \xi_0, \qquad (3)$$
$$\sigma(t, 0) = 0,\ b(t, 0) = 0.$$

Обычно для СДУ рассматривается устойчивость в более слабых смыслах: по вероятности, p-устойчивость, экспоненциальная устойчивость. Напомним, что возмущенное решение ξ_t уравнения (3) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *устойчиво по вероятности,* если для любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{\xi_0 \to 0} P\{\sup\limits_{t>0} |\xi_t| > \varepsilon\} = 0$. Возмущенное решение ξ_t уравнения (3) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *p-устойчиво,* если $\sup\limits_{|x_0| \leqslant \delta,\, t \geqslant 0} E|\xi_t|^p \to 0$ при $\delta \to 0$.

Условия устойчивости по вероятности и p-устойчивости даны в [9, 10] и основаны на построении функции Ляпунова $V(t, x)$, оператор Ляпунова

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(b(t, u) + \frac{\partial \sigma(t, u)}{\partial u} \sigma(t, u) \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}(\sigma)^2(t, u) \frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

для которой удовлетворяет некоторым неравенствам. Различные виды экспоненциальной устойчивости подробно рассмотрены в монографии [11].

Определение 1. *Возмущенное решение ξ_t уравнения* (3) *с начальным условием $\xi_0 = x_0$ устойчиво с вероятностью 1, если при п.в. ω для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, \omega) > 0$ такое, что для всякого x_0, для которого $|x_0| < \delta$, решение ξ_t удовлетворяет неравенству $|\xi_t| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.*

В последнем определении функция δ зависит от ω, иными словами, устойчивость с вероятностью 1 влечет за собой устойчивость по Ляпунову для почти всех траекторий решений уравнения (3).

Наш подход основан на том, что решения уравнений (1), (2) можно представить в виде $\xi_t^{(k)} = \varphi_k(t, W_t + C_k(t))$, $k = 1, 2$, где функции $\varphi_k(t, u)$ — детерминированные, а $C_k(t) = C_k(t, \omega)$ являются решениями ОДУ со случайной правой частью (см [12]). В силу того, что изложенная техника является, по сути, потраекторной, полученные в работе результаты могут быть переформулированы для детерминированных аналогов СДУ (уравнений с симметричными интегралами) (см [12]), а также для СДУ над более широким классов процессов (например для СДУ над фрактальным броуновским движением).

Настоящее исследование было предварительно представлено на Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2017» [13].

2. Предварительные сведения

Приведём основные идеи монографии [12], положенные в основу текущей работы. Рассмотрим СДУ с интегралом Стратоновича:

$$d\xi_t = \sigma(t, \xi_t) * dW_t + b(t, \xi_t)dt. \tag{4}$$

Для уравнения (4) справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([12, гл. 2, §10, теорема 10.1]). *Пусть функции $\sigma(t,u)$, $\sigma'_t(t,u)$, $\sigma'_u(t,u)$, $b(t,u)$ непрерывны на $R^+ \times R$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если функция $\xi_t = \varphi^*(t, W_t)$ есть решение уравнения (4), такое, что функция $\varphi^*(t,u)$ имеет совместно непрерывные частные производные $(\varphi^*)'_t(t,u)$, $(\varphi^*)'_u(t,u)$, $(\varphi^*)''_{tu}(t,u)$, то она удовлетворяет соотношениям

$$(\varphi^*)'_u(t,u) = \sigma(t, \varphi^*(t,u)), \;\; (\varphi^*)'_t(t, W_t) = b(t, \varphi^*(t, W_t)), \text{ для всех } t \geqslant 0. \tag{5}$$

2. Пусть функция $\varphi^*(t,u)$ имеет непрерывные частные производные $(\varphi^*)'_t(t,u)$, $(\varphi^*)'_u(t,u)$, $(\varphi^*)''_{tu}(t,u)$ и является решением цепочки уравнений (5) с начальным условием $\xi_0 = \varphi^*(0, W_0)$. Тогда функция $\xi_t = \varphi^*(t, W_t)$ — есть решение уравнения (4).

Введём обозначение:

$$G(t,u) = \int\limits_{\xi_0}^{u} \frac{d\psi}{\sigma(t,\psi)}.$$

В случае когда функция $\sigma^{-1}(t,u)$ является локально суммируемой для всех $t \geqslant 0$, в силу первого соотношения из (5) выполнено следующее равенство

$$G(t, \varphi(t,v)) = v + C(t), \text{ для всех } t \geqslant 0 \text{ п.н.} \tag{6}$$

Заметим, что решение (6) определяет детерминированную функцию $\varphi(t,v)$ такую, что $\varphi(t, v + C(t)) = \varphi^*(t,v)$ п.н., где $C(t) = C(t,\omega)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения со случайной правой частью

$$C'(t) = \frac{b(t, \varphi(t, W_t + C(t))) - \varphi'_t(t,v)|_{v=W_t+C(t)}}{\sigma(t, \varphi(t, W_t + C(t)))}, \; C(0) = 0. \tag{7}$$

Производную $\varphi'_t(t,v)$ в уравнении (7) можно вычислить, продифференцировав (6) с помощью формулы Лейбница:

$$\varphi'_t(t,v) = \sigma(t, \varphi(t,v)) \int\limits_{\xi_0}^{\varphi(t,v)} \frac{\sigma'_t(t,\psi)d\psi}{(\sigma(t,\psi))^2}.$$

В дальнейшем функцию $\varphi(t,v)$ будем называть *структурой решения*, а функцию $C(t)$ —*функцией сноса* уравнения (4).

3. Теоремы сравнения

Вернёмся к исследованию уравнений (1), (2). Положим $m(t) = \min\limits_{s \leqslant t} W_s$, $M(t) = \max\limits_{s \leqslant t} W_s$, $ran(t, \varphi) = \{y \in R | \, y = \varphi(t,v), \, v \in R\}$. Обозначим через $\varphi_1(t,v)$, $C_1(t)$, $G_1(t,u)$, $\varphi_2(t,v)$, $C_2(t)$, $G_2(t,u)$ — структуры решений, функции сноса и функции $G(t,u)$ для уравнений (1), (2) соответственно. Везде в дальнейшем будем считать, что при всех $t \geqslant 0$ выполнены следующие условия:

- Для всех $u \in R$ функции $\sigma_i(t,u)$, $(\sigma_i)'_t(t,u)$, $(\sigma_i)'_u(t,u)$, $b_i(t,u)$ являются непрерывными, а функции $\sigma_i^{-1}(t,u)$ — локально суммируемыми, $i = 1,2$.
- Для всех $u, u' \in R$ выполнено неравенство $|\sigma_i(t,u) - \sigma_i(t,u')| \leqslant K|u-u'|$, где $K = const > 0$, $i = 1,2$.
- Для всех $u \in R$ выполнено неравенство $|b_i(t,u)| + |\sigma_i(t,u)| \leqslant K(1+|u|)$, где $K = const > 0$, $i = 1,2$.

Запишем уравнения (7) для $C_i(t)$, $i = 1,2$:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{b_i(t,\varphi_i(t,W_t + C_i(t))) - (\varphi_i)'_t(t,v)|_{v=W_t+C_i(t)}}{\sigma_i(t,\varphi_i(t,W_t+C_i(t)))},\ C_i(0) = 0. \tag{8}$$

Обозначим правые части уравнений (8) через:

$$F_i(t,y) = \frac{b_i(t,\varphi_i(t,W_t+y)) - (\varphi_i)'_t(t,v)|_{v=W_t+y}}{\sigma_i(t,\varphi_i(t,W_t+y))}.$$

Лемма 1. *Пусть функции $F_i(t,y)$, $i = 1,2$, являются непрерывными и при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют следующим условиям:*

(a) $|F_i(t,x) - F_i(t,x')| \leqslant L|x-x'|$, $L = const > 0$, для всех x, $x' \in R$ при п.в. ω,

(b) $F_2(t,y) \geqslant F_1(t,y)$ для всех $y \in R$, при п.в. ω.

Тогда $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ для всех $t \in I$ п.н., где I — общий интервал существования решений уравнений (8).

Доказательство. Пусть существует момент времени $t_1 \in I$ в котором

$$C_2(t_1) < C_1(t_1) \text{ п.н.} \tag{9}$$

Так как на интервале I существуют решения уравнений (8), а $C_2(0) = C_1(0)$, то найдётся такой момент времени $t_2 < t_1$, что

$$t_2 = \sup\{t \in [0,t_1] |\, C_2(t) \geqslant C_1(t) \text{ п.н.}\}.$$

Из определения t_2 следует, что $C_2(t_2) = C_1(t_2)$, а $C_2(t) < C_1(t)$, для всех $t \in (t_2,t_1]$ с вероятностью 1. Обозначим через $\delta(t) = C_1(t) - C_2(t)$, $\delta(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [t_2,t_1]$ при п.в. ω. С другой стороны, так как $\delta'_t(t) = (C_1)'_t(t) - (C_2)'_t(t)$, то с вероятностью 1

$$0 \leqslant \delta(t) = C_1(t_2) - C_2(t_2) + \int_{t_2}^{t} (F_1(s,C_1(s)) - F_2(s,C_2(s)))\,ds \leqslant |(b)| \leqslant$$

$$\int_{t_2}^{t} |F_2(s,C_1(s)) - F_2(s,C_2(s))|\,ds \leqslant |(a)| \leqslant L\int_{t_2}^{t} |C_1(s) - C_2(s)|\,ds = L\int_{t_2}^{t} \delta(s)ds.$$

Последнее в силу леммы Гронуолла означает, что $\delta(t) = 0$ для всех $t \in [t_2,t_1]$ при п.в. ω, что противоречит (9). Следовательно $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ для всех $t \in I$ п.н. $\square$

Теорема 2. *Пусть для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство:*

$$\sigma_2(t,u) \geqslant \sigma_1(t,u)\ \textit{для всех}\ u \in R.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $\varphi_2(t,m(t)+C_2(t)) > \varphi_1(t,m(t)+C_1(t))$ для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1, то $\xi_t^{(2)} > \xi_t^{(1)}$ для всех $t \geqslant 0$ п.н.

2. Если $\varphi_2(t,m(t)+C_2(t)) \geqslant \varphi_1(t,m(t)+C_1(t))$ для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1, то $\xi_t^{(2)} \geqslant \xi_t^{(1)}$ для всех $t \geqslant 0$ п.н.

Доказательство. 1. Согласно теореме 1 при всех фиксированных $t \geqslant 0$ функции $\varphi_2(t, v + C_2(t))$, $\varphi_1(t, v + C_1(t))$, $v \in [m(t), M(t)]$, с вероятностью 1 являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{d}{dv}\varphi_i(t, v + C_i(t)) = \sigma_i(t, \varphi_i(t, v + C_i(t))),$$
$$\varphi_i(t, v + C_i(t))\Big|_{v=m(t)} = \varphi_i(m(t) + C_i(t)),$$

где $i = 1, 2$.

Ввиду условий теорем 2 для этих дифференциальных уравнений справедлива теорема сравнения для ОДУ [14, §2, теорема 4], следовательно $\varphi_2(t, v + C_2(t)) > \varphi_1(t, v + C_1(t))$ для всех $t \geqslant 0$, $v \in [m(t), M(t)]$, при п.в. ω, а значит $\xi_t^{(2)} > \xi_t^{(1)}$ для всех $t \geqslant 0$ п.н.

2. Доказательство аналогично доказательству леммы 1. □

Следствие 1. *Пусть для всех $t \geqslant 0$ выполнены следующие условия:*
(a) $\varphi_2(t, v) > \varphi_1(t, v)$ для всех $v \in [m(t) + C_1(t), M(t) + C_2(t)]$,
(b) $\sigma_2(t, u) \geqslant \sigma_1(t, u)$, $\sigma_2(t, u) > 0$ для всех $u \in R$,
(c) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ п.н.
Тогда справедливо утверждение 1 теоремы 2.

Доказательство. Согласно условию (b) следствия 1 функция $\varphi_2(t, v)$ возрастает по v при всех $t \geqslant 0$, а значит $\varphi_2(t, v_2) \geqslant \varphi_2(t, v_1) > \varphi_1(t, v_1)$ при всех $v_2 \geqslant v_1$. Таким образом, для проверки требований теоремы 2, достаточно показать, что $m(t) + C_2(t) \geqslant m(t) + C_1(t)$ для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1. Последнее неравенство следует из условия (c) следствия 1. □

Следствие 2. *Для справедливости утверждения 1 теоремы 2 достаточно, чтобы при всех $t \geqslant 0$:*
(a) $m(t) + C_1(t) > 0$ с вероятностью 1,
(b) $\sigma_2(t, u) \geqslant \sigma_1(t, u) > 0$ для всех $u \in R$,
(c) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ с вероятностью 1,
(d) $\xi_0^{(2)} \geqslant \xi_0^{(1)} > 0$.

Доказательство. Так как согласно условию (b) следствия 2 функция $\varphi_2(t, v)$ при всех $t \geqslant 0$ является возрастающей по переменной v, то $\varphi_2(t, m(t) + C_2(t)) \geqslant \varphi_2(t, m(t) + C_1(t))$ для всех $t \geqslant 0$ п.н. Для завершения доказательства следствия 2 осталось проверить условие утверждения 1 теоремы 2. В силу (6) и условия (a) следствия 2 выполнено следующее соотношение:

$$G_2(t, \varphi_2(t, m(t) + C_1(t))) = G_1(t, \varphi_1(t, m(t) + C_1(t))) = m(t) + C_1(t) > 0.$$

Значит $\varphi_2(t, m(t) + C_1(t)) > \varphi_1(t, m(t) + C_1(t)) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ п.н., следовательно $\varphi_2(t, m(t) + C_2(t)) > \varphi_1(t, m(t) + C_1(t))$ при п.в. ω. □

Замечание 1. *Можно показать, что, если в условиях* (a) *следствий* 1, 2 *строгое неравенство заменить на нестрогое, то те же самые рассуждения позволят доказать справедливость утверждения 2 теоремы 2.*

Теорема 3. *Пусть при всех $t \geqslant 0$ выполнены следующие условия:*
(a) $\varphi_2(t, G_1(t, u)) \geqslant u$ для всех $v \in R$,
(b) $\sigma_2(t, u) > 0$ для всех $u \in ran\,(t, \varphi_2)$,
(c) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ при п.в. ω.
Тогда $\xi_t^{(2)} \geqslant \xi_t^{(1)}$ для всех $t \geqslant 0$ п.н.

Доказательство. В силу соотношения (6) структура решения уравнения (2) представима в виде функции от структуры решения уравнения (1):

$$\varphi_2(t, u + C_2(t)) = \varphi_2\left(t, G_1\left(t, \varphi_1(t, u + C_1(t))\right) + C_2(t) - C_1(t)\right).$$

Ввиду условия (b) теоремы 3, функция $\varphi_2(t,v)$ является возрастающей по v при всех $t \geqslant 0$, следовательно

$$\varphi_2\left(t, G_1(t, \varphi_1(t, v + C_1(t))) + C_2(t) - C_1(t)\right) \geqslant \varphi_2\left(t, G_1\left(t, \varphi(t, v + C_1(t))\right)\right).$$

Последнее неравенство в силу условия (a) теоремы 3 влечет, что для любого $t \geqslant 0$ при всех $v \in R$ с вероятностью 1 выполнено неравенство

$$\varphi_2(t, v + C_2(t)) \geqslant \varphi_1(t, v + C_1(t)). \tag{10}$$

Подставив $v = W_t$ в (10), получим что $\xi_t^{(2)} \geqslant \xi_t^{(1)}$ для любого $t \geqslant 0$ при п.в. ω. □

Доказательство теоремы 4, приведённой ниже, аналогично доказательству теоремы 3, только в этом случае в силу условия (b) теоремы 4 функция $\varphi_2(t,v)$ убывает по v при всех $t \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть при всех $t \geqslant 0$ справедливы следующие неравенства:*
(a) $\varphi_2(t, G_1(t,u)) \leqslant u$ для всех, $u \in R$,
(b) $\sigma_2(t,u) < 0$ для всех $v \in ran\,(t, \varphi_2)$,
(c) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ при п.в. ω.
Тогда $\xi_t^{(2)} \leqslant \xi_t^{(1)}$ для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1.

Если функции $\sigma_i(t,u)$ не зависят от переменной t, то функции $G_i(u) = G_i(t,u)$ также будут независимыми от переменной t, где $i = 1, 2$.

Лемма 2. *Пусть $\eta_t^{(i)}$ — решения СДУ:*

$$d\eta_t^{(i)} = \sigma_i(\eta_t^{(i)}) * dW_t,\ \eta_t^{(i)}|_{t=0} = \eta_0^{(i)},\ \text{где } i = 1, 2, \tag{11}$$

и для всех $u \in R$ справедливы условия:
(a) $\sigma_i(u) \geqslant 0$, где $i = 1, 2$,
(b) $\varphi_2(G_1(u)) \geqslant u$, где $\varphi_2(v)$ — структура решения уравнения на $\eta_t^{(2)}$ при всех $v \in R$.
Тогда для всех $u \in R$ выполнено неравенство

$$G_1(u) \geqslant G_2(u). \tag{12}$$

Доказательство. Приняв во внимание, что коэффициенты уравнений (11) и структуры их решений не зависят от времени, запишем соотношение (6) для $\varphi_2(v)$:

$$G_2(\varphi_2(v)) = v + C(t). \tag{13}$$

Заметим, что $C'(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$ в силу (7), следовательно $C(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$, так как $C(0) = 0$. В условиях леммы 2 функции $G_i(u)$, $i = 1, 2$, являются неубывающими. Подставив в (13) $v = G_1(u)$, из условия (b) леммы 2 получим

$$G_1(u) = G_2(\varphi_2(G_1(u))) \geqslant G_2(u).$$

□

Замечание 2. *Представленные в работе* [8] *результаты следуют из неравенства* (12). *Таким образом лемма 2 говорит о том, что результаты, полученные О'Брайном в работе* [8], *являются частным случаем результатов, изложенных в текущем исследовании.*

Пример 1. Приведём пример применения теоремы 3. Рассмотрим два СДУ с интегралами Стратоновича, коэффициенты диффузии которых отличны друг от друга:

$$d\xi_t^{(1)} = 1 * dW_t + 2dt,\ \xi_0^{(1)} = 0,$$

$$d\xi_t^{(2)} = 2\sqrt{\xi_t^{(2)} - 1} * dW_t + 4\sqrt{\xi_t^{(2)} - 1}dt,\ \xi_0^{(2)} = 1.$$

Поскольку для этих уравнений выполнены условия теоремы 3, то $\xi_t^{(2)} \geqslant \xi_t^{(1)}$ для любого $t \geqslant 0$ с вероятностью 1. Последнее неравенство можно проверить явно, так как решения рассматриваемых уравнений имеют вид $\xi_t^{(1)} = W_t + 2t$, $\xi_t^{(2)} = (W_t + 2t)^2 + 1$.

4. Устойчивость с вероятностью 1

Перейдём к исследованию устойчивости с вероятностью 1 уравнения (3). Основная идея нашего подхода заключается в применении теорем сравнения для оценки возмущенного решения уравнения (3) с помощью решения СДУ, устойчивого с вероятностью 1. В работе [1] было показано, что в качестве такого уравнения можно взять уравнение

$$d\eta_t^{(\alpha)} = t\eta_t^{(\alpha)} * dW_t - t^{\alpha+\frac{1}{2}}\eta_t^{(\alpha)}dt,\ t \geqslant 0, \tag{14}$$

возмущенное решение которого устойчиво с вероятностью 1 при всех $\alpha > 0$.

Положим $sgn(x) = -1$ при $x < 0$, $sgn(x) = 0$ при $x = 0$, $sgn(x) = 1$ при $x > 0$, $\varphi_1(t, v)$, $C_1(t)$, $G_1(t, u)$, $\varphi_2(t, v)$, $C_2(t)$, $G_2(t, u)$ — структурами решения, функциями сноса и функциями $G(t, u)$ для уравнений (3), (14) соответственно.

Теорема 5. *Пусть при всех $t > 0$ справедливы следующие условия:*
(a) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ при п.в. ω,
(b) $sgn(\sigma(t, u)) = sgn(u)$ для всех $u \neq 0$, $u \in R$,
(c) $\sigma(t, u) \leqslant tu$ для всех $u \neq 0$, $u \in R$.
Тогда возмущенное решение уравнения (3) *устойчиво с вероятностью 1.*

Доказательство. Достаточно показать, что для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1 выполнено неравенство $|\xi_t| \leqslant K\eta_t^{(\alpha)}$ (см [1]), где $\eta_t^{(\alpha)}$ — возмущенное решение устойчивого с вероятностью 1 уравнения (14). Структура решения уравнения (14) имеет вид

$$\varphi_2(t, v + C_2(t)) = \eta_0 \exp\{t(v + C_2(t))\}.$$

Не уменьшая общности, положим $\eta_0 > 0$, так как в противном случае можно произвести замену $\widetilde{\eta}_0 = -\eta_0 > 0$. Сначала покажем, что $\xi_t \leqslant K\eta_t^{(\alpha)}$ при всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1, для этого применим теорему 3 к уравнениям (3), (14). Так как $\varphi_2(t, v) > 0$, то $\sigma_2(t, u) = tu > 0$, для всех $u \in ran\,(t, \varphi_2)$, т.е. выполнено условие (b) теоремы 3. Условие (c) теоремы 3 справедливо в силу условия (a) теоремы 5. Осталось проверить условие (a) теоремы 3

$$K\eta_0 \exp\{tG_1(t, u)\} \geqslant u.$$

Разделим обе части на $K\eta_0$ и прологарифмируем их:

$$tG_1(t, u) \geqslant \ln\left(\frac{u}{K\eta_0}\right). \tag{15}$$

Поскольку $K\eta_0 \exp\{tG_1(t, 0)\} \geqslant 0$, то для проверки неравенства (15) достаточно показать, что

$$\frac{d}{du}\left(tG_1(t, u) - \ln(\frac{u}{\eta_0})\right) \geqslant 0,$$

т.е.

$$\frac{t}{\sigma(t, u)} \geqslant \frac{1}{u}.$$

Последнее соотношение справедливо в силу условий (b), (c) теоремы 5.

Аналогичные рассуждения с применением теоремы 4 приводят к тому, что условий $(a) - (c)$ теоремы 5 достаточно для того, чтобы было выполнено неравенство $\xi_t \geqslant -K\eta_t^{(\alpha)}$ для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1. □

Замечание 3. *В случае когда $\sigma(t, u) > 0$ для всех $t \geqslant 0$, $u \in R$, условия (b), (c) теоремы 5 можно заменить на условие $\sigma(t, u) \leqslant tu$, при всех $u \geqslant 0$.*

Замечание 4. *Так как* $C_2(t) = \int_0^t (s^{(\alpha+1)/2} + W_s)ds/t$, *условие* (a) *теоремы 5 сводится к проверке неравенства* $tC_1(t) \leqslant \int_0^t (s^{(\alpha+1)/2} + W_s)ds$.

Пример 2. Приведём пример применения теоремы 5. Рассмотрим СДУ с интегралом Стратоновича

$$d\xi_t = \sigma(t, \xi_t) * dW_t - t^{\alpha+\frac{1}{2}}\xi_t dt, \ t \geqslant 0, \tag{16}$$

где $\sigma(t,u) = tu/2$ при $u > 0$, $\sigma(t,u) = 0$ при $u = 0$, $\sigma(t,u) = 2tu$ при $u > 0$.

Для функции $\sigma(t,u)$ выполнено условие Липшица. Покажем, что для уравнения (16) выполнены все условия теоремы 5. Условия (b), (c) теоремы 5 выполнены по определению функции $\sigma(t,u)$. Условие (a) теоремы 5 проверяется прямой подстановкой, следовательно возмущенное решение уравнения (16) является устойчивым с вероятностью 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асылгареев А.С., Насыров Ф.С. *О теоремах сравнения и устойчивости с вероятностью 1 одномерных стохастических дифференциальных уравнений* // Сибирский математический журнал. Т. 57, вып 5. 2016. С. 969–977.
2. Скороход А.В. *Исследования по теории случайных процессов.* К.: Изд-во Киевского Университета, 1961. 216 с.
3. Ватанабе С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* М.: Наука, 1986. 448 с.
4. T. Yamada *On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications* // J. Math. Kyoto Univ. V.13, Num. 3. 1973. P. 497–512.
5. C. Geib, R. Manthey *Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions* // Stochastic Processes and their Applications. V. 53, Num. 1. 1994. P. 23–35.
6. S. Kotelenez *Comparison methods for a class of function-valued stochastic partial differential equations* // Probab. Theory Related Fields. V.93, Num. 1. 1992. P. 1–19.
7. P. Peng, X. Zhu *Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations* //Stochastic Processes and their Applications. V. 116, Num. 3. 2006. P. 370–380.
8. G.L. O'brien *A new comparison theorem for solutions of stochastic differential equations* // Stochastics. V. 13, Num. 3. 1973. P. 497–512.
9. Хасьминский Р.З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* М.: Наука, 1969. 370 с.
10. Кушнер Г.Дж. *Стохастическая устойчивость и управление.* М.: Мир, 1969. 220 с.
11. X. Mao *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations.* Marcel Dekker, Inc.: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Series, 1994. 328 p.
12. Насыров Ф.С. *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ.* М.: Физматлит, 2011, 212 с.
13. Асылгареев А.С. *О сравнении решений однородных стохастических дифференциальных уравнений* // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017». М.: МАКС Пресс, 2017.
14. Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. *Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина.* Физ. Фак. МГУ, 2007, 9 с.

Артур Салаватович Асылгареев,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: asylgareevarthur@gmail.com