ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 93-108.

УДК 517.518.8

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА-ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ КЛАССЕ

А.Ю. ТРЫНИН

Аннотация. Установлена равномерная сходимость внутри произвольного интервала $(a, b) \subset [0, \pi]$ значений операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля для функций из класса, определяемого с помощью односторонних модулей непрерывности и изменения. Вне этого интервала последовательность значений операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля может расходиться. Условия, описывающие этот функциональный класс содержат ограничение только на скорость и величину возрастания (или убывания) непрерывной функции. Убывать (или, соответственно, возрастать) представитель предлагаемого класса может сколь угодно быстро. Популярные множества функций, удовлетворяющих условию Дини-Липшица или признака Крылова, являются собственными подмножествами этого класса, даже если в их условиях заменить классические модуль непрерывности и вариацию на односторонние. Получены точные по порядку оценки сверху для функций и констант Лебега процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля. Установлены достаточные условия равномерной сходимости процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля в терминах максимума модуля суммы и максимума суммы модулей взвешенных разностей первого порядка. Приведено доказательство ограниченности в совокупности последовательности фундаментальных функций процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля. Предложено три новых оператора, являющихся модификацией оператора Лагранжа-Штурма-Лиувилля, позволяющих равномерно приближать произвольную непрерывную, исчезающую на концах отрезка, функцию на отрезке $[0, \pi]$. Все результаты работы остаются справедливыми, если односторонние модули непрерывности и изменения заменить на классические.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, интерполяция функций, равномерное приближение.

Mathematics Subject Classification: Primary 41A05, 41A58; Secondary 94A12

1. Введение

Г.И. Натансон в [1] получил признак Дини-Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$, т.е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x), \tag{1}$$

A.Yu. Trynin, Uniform convergence of Lagrange-Strum-Liouville processes on one functional class.

Поступила 18 мая 2017 г.

где U_n есть $n-$я собственная функция регулярной задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т.е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n. Изучению аппроксимативных свойств операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) посвящены также работы [2]–[4]. В работе [2] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$. Исследования, проведённые в [3], [5], [6] показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма-Лиувилля (2) (потенциала q, или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов (1) могут сильно измениться.

Свойства операторов интерполирования функций лагранжевого вида (1), тесно связанны с поведением синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{3}$$

используемых в теореме отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона (см. [7]–[10]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в области исследования свойств синк-аппроксимаций (3) аналитических на действительной оси функции, экспоненциально убывающих на бесконечности, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти, например, в [9] и [11].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [12]–[14] в теории квадратурных формул [9] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [7], [8], [10].

До появления работ [15]–[21] приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [9], [22] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [21] установлена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных функций линейными комбинациями синков.

Из результатов исследований в [23] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (3) возможно появление „резонанса“, приводящего к неогранченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале $(0, \pi)$. В [24]–[27] предложены различные модификации синк-приближений (3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (3) в [26] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ позволяет сделать вывод о тщетности попыток построить оператор в виде линейных комбинаций синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке.

Изучение операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) также тесно связано с исследованием аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка [28]. Операторы, предложенные в [28] являются обобщением операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) и классических синк-приближений (3). В [29] приводится ряд приложений результатов работы [28] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n,\beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

В монографии [4] приведены более подробные доказательства и исправлены опечатки, обнаруженные в некоторых формулах более ранних публикаций.

В настоящей работе, используя концепции исследований в [30]—[37] получены достаточные условия равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ сходимости интерполяционных процессов (1), построенных по решениям задачи Штурма-Лиувилля (2) в терминах односторонних модулей непрерывности и изменения.

2. Основные результаты

На протяжении всей работы будем считать потенциал q задачи Штурма-Лиувилля (2) непрерывной функцией ограниченной вариации на $[0,\pi]$. Договоримся также, что собственная функция будет нормирована условием $U_n(0)=1$. Рассматриваем краевые условия (2) третьего рода, из которых исключены условия типа Дирихле, т.е. $h\neq\pm\infty$, $H\neq\pm\infty$. Для любых $0\le a<b\le\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определим с помощью соотношений

$$\begin{gathered}
x_{p_1,n}\le a+\varepsilon<x_{p_1+1,n},\quad x_{p_2,n}\le b-\varepsilon<x_{p_2+1,n},\\
x_{k_1-1,n}<a\le x_{k_1,n},\quad x_{k_2+1,n}\le b<x_{k_2+2,n},\\
m_1=\left[\frac{k_1}{2}\right]+1,\quad m_2=\left[\frac{k_2}{2}\right]
\end{gathered}\tag{4}$$

после добавления к множеству нулей $x_{1,n}<x_{2,n}<\cdots<x_{n,n}$ $n-$й собственной функции U_n точек $x_{0,n}=0$ и $x_{n+1,n}=\pi$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z. Если не оговорено иное, штрих у суммы в этой работе означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю.

Обозначим $\mathbf{\Omega}$ множество всех действительнозначных, неубывающих, выпуклых вверх на $[0,b-a]$, исчезающих в нуле функций ω. Пусть $C(\omega^l,[a,b])$ и $C(\omega^r,[a,b])$ есть множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных x и $x+h$ $(a\le x<x+h\le b)$ имеют место неравенства

$$f(x+h)-f(x)\ge -K_f\omega(h) \text{ или } f(x+h)-f(x)\le K_f\omega(h),\tag{5}$$

соответственно, где $\omega\in\mathbf{\Omega}$. Здесь выбор положительной константы K_f зависит только от функции f. В этом случае функцию $\omega(h)$ называют, соответственно, лево- или правосторонним модулем непрерывности.

Классический модуль непрерывности функции $f\in C[a,b]$ будем обозначать как обычно $\omega(f,\delta)=\sup\limits_{|h|<\delta;x,x+h\in[a,b]}|f(x+h)-f(x)|$. Модуль непрерывности $f\in C[0,\pi]$, в случае $a=0$, $b=\pi$ обозначим $\omega_1(f,\delta)=\sup\limits_{|h|<\delta;x,x+h\in[0,\pi]}|f(x+h)-f(x)|$.

Модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ будем называть функцию натурального аргумента

$$v(n,f)=\sup_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|,$$

где $T_n=\{a\le t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n\le b\}$, $n\in\mathbb{N}$. Возьмем неотрицательную, неубывающую выпуклую вверх функцию натурального аргумента $v(n)$. Если модуль изменения функции f на интервале $[a,b]$ такой, что $v(n,f)=O(v(n))$ при $n\to\infty$, то будем говорить, что f принадлежит классу $V(v)$. Здесь выбор константы равномерности в о-символике зависит только от функции f.

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции будем называть положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$, соответственно, функции натурального аргумента

$$v^+(n,f)=\sup_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_+ \text{ и } v^-(n,f)=\inf_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_-,$$

где $z_+=\frac{z+|z|}{2}$ и $z_-=\frac{z-|z|}{2}$ и $T_n=\{a\le t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n\le b\}$, $n\in\mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f, такая, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$v^+(n,f)\le M_f v(n) \text{ или } v^-(n,f)\ge -M_f v(n)$$

соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $0\le a<b\le\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$. *Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента* $v(n)$ *и функция* $\omega\in\mathbf{\Omega}$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\le m\le k_2-k_1-1}\left\{\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1}\frac{v(k)}{k^2}\right\}=0, \tag{6}$$

где k_1 *и* k_2+1 *— номера наименьшего и наибольшего из нулей собственной функции* U_n, *попадающих в отрезок* $[a,b]$, *то для любой функции* $f\in C(\omega^l[a,b])\cap V^-(v)$ $(f\in C(\omega^r[a,b])\cap V^+(v))$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|f-L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}=0, \tag{7}$$

где оператор Лагранжа-Штурма-Лиувилля $L_n^{SL}(f,\cdot)$ *определён в* (1).

Замечание 1. *При этом на множестве* $[0,\pi]\setminus[a,b]$ *соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-L_n^{SL}(f,x)|=0$$

может вовсе не выполняться (см., например, [2], [3] *и* [4]*).*

В следующей теореме получена точная по порядку оценка сверху скорости роста последовательности норм операторов и функционалов Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1), действующих из $C[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$ и из $C[0,\pi]$ в $\mathbb{R}$ соответственно. Такие последовательности носят название последовательностей констант и функций Лебега. От их поведения существенно зависят аппроксимативные свойства операторов Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) в смысле равномерной и поточечной сходимости соответвенно.

Теорема 2. *Пусть* U_n*— собственная функция, соответствующая собственному значению* λ_n, *регулярной задачи Штурма-Лиувилля* (2). *Тогда существуют константы* C_1, C_2 *и* C_3 *(выбор которых обусловлен только параметрами задачи Штурма-Лиувилля) такие, что для всех* $x\in[0,\pi]$ *и всех* $n=2,3,4,\dots$ *для функций и констант Лебега интерполяционных процессов* (1) *справедливы неравенства*

$$L_n^{SL}(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_{k,n}^{SL}(x)|\le C_1|U_n(x)|\ln n+C_3, \tag{8}$$

$$L_n^{SL}=\max_{x\in[0,\pi]}L_n^{SL}(x)\le C_2\ln n. \tag{9}$$

Замечание 2. *Точность по порядку оценок* (8) *и* (9) *следует из теоремы 2 и результатов работы* [2, Лемма 2] *или* [4].

Доказательства этих утверждений приведём в параграфе 4.

3. Вспомогательные утверждения

Прежде чем доказывать эти теоремы убедимся в справедливости ряда вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть U_n– собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма-Лиувилля* (2). *Через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначим нули функции U_n. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$U_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O(n^{-2}), \tag{10}$$

$$U_n'(x) = -n\sin nx + \beta(x)\cos nx + O(n^{-1}), \tag{11}$$

$$U_n''(x) = -n^2\cos nx - n\beta(x)\sin nx + O(1), \tag{12}$$

$$U_n'(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \tag{13}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + n^{-2}\beta\Big(\frac{2k-1}{2n}\pi\Big) + O(n^{-3}), \tag{14}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O(n^{-1}), \tag{15}$$

где $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$, $c = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau\Big)$, а оценка остаточного члена во всех формулах (10)-(14) *равномерна по $x \in [0,\pi]$ или $1 \le k \le n$.*

Доказательство леммы 1. По поводу доказательства (10), (11) и (15) смотрите, например, [39]. Убедимся в справедливости (14). Пусть $x_{k,n}$ — k-й нуль собственной функции U_n. Из асимптотической формулы (10) получаем соотношение $\left|\cos nx_{k,n} + \frac{\beta(x_{k,n})}{n}\sin nx_{k,n}\right| = O(n^{-2})$. Положив $\cos\alpha_{k,n} := \frac{n}{\sqrt{n^2+\beta^2(x_{k,n})}}$, получим асимптотическую формулу $\left|\sin\big(\frac{\pi}{2} + nx_{k,n} - \alpha_{k,n}\big)\right| = O(n^{-2})$. Следовательно, имеем соотношение $\left|\frac{\pi}{2} + nx_{k,n} - \alpha_{k,n} - \pi k\right| = O(n^{-2})$. Но функция β, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируема, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + O(n^{-3}).$$

Формула (12) следует из (10) и (2), а (13) из (11) и (14). Лемма 1 доказана.

Замечание 3. *Из асимптотической формулы* (10) *видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим*

$$\mathbb{M} = \sup\big\{|U_n(x)|, x \in [0,\pi], n \in \mathbb{N}\big\} < \infty. \tag{16}$$

Пусть $\rho_\lambda = o\big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\big)$ при $\lambda \to +\infty$. Считаем, что значения функции $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ для произвольного неотрицательного λ. Обозначим через q_λ произвольную функцию из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле, то есть

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right), \quad \text{при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{17}$$

Для произвольного потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{18}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \ne 0$

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right), \text{ при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \ne 0, \tag{19}$$

задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{20}$$

попадающих в отрезок $[0,\pi]$, пронумеруем следующим образом

$$0 \le x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \le \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{21}$$

(Зесь $x_{-1,\lambda} < 0$, and $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули какого-либо продолжения решения задачи Коши (18) или (20) при сохранении ограниченности вариации потенциала q_λ вне $[0,\pi]$). В [28], [4] описано множество непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций f, допускающих равномерную внутри интервала $(0,\pi)$ аппроксимацию значениями операторов следующего вида. Обозначим оператор, построенный по решениям задачи Коши (20) или (21), и ставящий в соответсвие каждой конечнозначной на множестве $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0,n=1}^{n,\infty}$ непрерывную функцию по правилу

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{22}$$

Очевидно, что значение оператора (22) интерполирует функцию f в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$.

Обозначим $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. При приближении с помощью операторов (1) функций $f \in C[0,\pi] \backslash C_0[0,\pi]$ вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ возникает явление Гиббса (см., например, [25, Теорема 2], [4]). Эта проблема решается с помощью обобщения оператора (22), предложенного в [28, формула (1.9)], [4], вида

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})} \left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right\} + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x + f(0), \tag{23}$$

где $y(x,\lambda)$ – решение задачи Коши (18) или (20) и $x_{k,\lambda}$ – нули этого решения.

Предложение 1 ([28, Предложение 9], [4])**.** *Пусть $y(x,\lambda)$ решение задачи Коши* (18) *или* (20)*, и предположим, что в случае задачи Коши* (18) *выполняются условия* (17)*, а в случае задачи Коши* (20) *— условия* (19)*. Если $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно на $[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Big(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\big) s_{k,\lambda}(x) \Big) = 0. \tag{24}$$

Замечание 4. *Из предложения 1 следует, что значения предложенных в* [28], [4] *операторов*

$$A_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})\big) s_{k,\lambda}(x),$$

$$B_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(f(x_{k-1,\lambda}) + f(x_{k,\lambda})\big) s_{k,\lambda}(x)$$

или

$$C_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \big(f(x_{k-1,\lambda}) + 2f(x_{k,\lambda}) + f(x_{k+1,\lambda})\big) s_{k,\lambda}(x)$$

равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ аппроксимируют произвольный элемет пространства $C_0[0,\pi]$.

Лемма 2. *Пусть U_n- собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма-Лиувилля (2). Тогда существует константа C_4 зависящая только от q, h, H такая, что для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$|l_{k,n}^{SL}(x)| = \left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}\right| \leq C_4. \tag{25}$$

Доказательство леммы 2. Если для каких либо $1 \leq k \leq n$ и $n \in \mathbb{N}$ окажется $x = x_{k,n}$, то $|l_{k,n}^{SL}(x)| = 1$. Рассмотрим теперь случай $x \neq x_{k,n}$. Пусть сначала $0 < |x - x_{k,n}| \leq n^{-1}$, $x \in [0, \pi]$, тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа из (12) и (13) следует неравенство

$$|l_{k,n}^{SL}(x)| \leq \left|\frac{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n}) + U_n''(\xi_{k,n})(x - x_{k,n})^2/2}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}\right| = 1 + \frac{O(n^2)}{n + O(n^{-1})}\frac{1}{n} \leq C_{4,1}$$

для некоторой константы $C_{4,1}$, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма-Лиувилля q, h и H. Осталось рассмотреть случай $|x - x_{k,n}| > n^{-1}$, $x \in [0, \pi]$. В силу асимптотических формул (10) и (13) существует константа $C_{4,2}$, для которой справедливо неравенство

$$|l_{k,n}^{SL}(x)| \leq n\left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})}\right| \leq \left|\frac{\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O(n^{-2})}{n + O(n^{-1})}\right| n \leq C_{4,2}.$$

Положив $C_4 = \max(C_{4,1}, C_{4,2})$, убедимся в справедливости леммы 2.

Далее нам потребуется доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2. Возьмём произвольное $x \in [0, \pi]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла интерполяции. Если окажется, что таких узлов два, — любой из них, например, левый. Функцию Лебега интерполяционного процесса Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) представим в виде трёх слагаемых

$$L_n^{SL}(x) = \sum_{k=1}^{k_0-3}|l_{k,n}^{SL}(x)| + \sum_{k=k_0-2}^{k_0+2}|l_{k,n}^{SL}(x)| + \sum_{k=k_0+3}^{n}|l_{k,n}^{SL}(x)|.$$

Если $k_0 = 1, 2, 3$, то в представлении отсутствует первое слагаемое, если же окажется, что $k_0 = n-2, n-1$, или n, то нет третьей суммы. Не более пяти слагаемых, входящих во вторую сумму, оценим с помощью леммы 2. Тогда, воспользовавшись (11), (13) и формулой конечных приращений Лагранжа, оценим функцию Лебега следующим образом

$$L_n^{SL}(x) \leq \frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_0-3}\frac{1}{|x - x_{k,n}|} + \sum_{k=k_0+3}^{n}\frac{1}{|x - x_{k,n}|}\right) + 5C_4 +$$

$$\sum_{k=1}^{k_0-3}\left|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x - x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x - x_{k,n}|}\right| + \sum_{k=k_0+3}^{n}\left|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x - x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x - x_{k,n}|}\right| \leq$$

$$\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_0-3}\frac{1}{|x - x_{k,n}|} + \sum_{k=k_0+3}^{n}\frac{1}{|x - x_{k,n}|}\right) +$$

$$5C_4 + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{U_n(x)}{x - x_{k,n}}\right|\left|\frac{n - (n + O(n^{-1}))}{n(n + O(n^{-1}))}\right| =$$

$$\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_0-3}\frac{1}{|x - x_{k,n}|} + \sum_{k=k_0+3}^{n}\frac{1}{|x - x_{k,n}|}\right) + 5C_4 + O(n^{-1}).$$

Из асимптотической формулы (14) для нулей собственных функций U_n находим номер n_0, выбор которого зависит только от параметров задачи Штурма-Лиувилля, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\min_{1\le k\le n-1}|x_{k+1,n}-x_{k,n}|\ge\frac{\pi}{2n},\tag{26}$$

а, следовательно, и соотношение

$$|x-x_{k_0\pm 2,n}|\ge\min_{1\le k\le n-1}|x_{k+1,n}-x_{k,n}|\ge\frac{\pi}{2n}.\tag{27}$$

В силу (26) и (27) функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа-Штурма-Лиувилля (1) равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ могут быть оценены таким образом

$$L_n^{SL}(x)\le\frac{|U_n(x)|}{n}\Bigg(\sum_{k=1}^{k_0-3}\frac{1}{x_{k+1,n}-x_{k,n}}\int\limits_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}}\frac{dt}{x-t}+$$

$$\sum_{k=k_0+3}^{n}\frac{1}{x_{k,n}-x_{k-1,n}}\int\limits_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{dt}{t-x}\Bigg)+C_{3,0}\le$$

$$\frac{2|U_n(x)|}{\pi}\Bigg(2\ln n-2\ln\frac{\pi}{2}+\ln|x(x-\pi)|\Bigg)+C_{3,0}.\tag{28}$$

Из того, что $\max\Big(\ln|x(\pi-x)|,x\in(0,\pi)\Big)=2\ln\frac{\pi}{2}$ и асимптотической формулы (10) следуют (8) и (9) в случае $n\ge n_0$. Чтобы оценки (8) и (9) остались верными для всех $n=2,3,4,\dots$ положим, например,

$$C_3=\max(C_{3,0},L_2^{SL},L_3^{SL},L_4^{SL},\dots,L_{n_0-1}^{SL},),\quad C_2=C_1\mathbb{M}+C_3/\ln 2,$$

где константа $\mathbb{M}$ определяется в соотношении (16). Теорема 2 доказана.

Для любых $0\le a<b\le\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ обозначим

$$Q_n(f,[a,b],\varepsilon):=\max_{p_1\le p\le p_2}\Bigg|\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{f(x_{2m+1,n})-f(x_{2m,n})}{p-2m}\Bigg|.\tag{29}$$

Предложение 2. *Если функция $f\in C[0,\pi]$, то из соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty}Q_n(f,[a,b],\varepsilon)=0\tag{30}$$

следует утверждение (7).

Доказательство предложения 2. Введём обозначение

$$\psi_{k,n}=f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\quad 1\le k\le n-1;n\in\mathbb{N}.\tag{31}$$

Учитывая, что $f\in C[0,\pi]$ и (14), убедимся, что существует константа C_5 такая, что справедлива оценка

$$|\psi_{k,n}|\le C_5\omega_1\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\qquad\text{для всех } 1\le k\le n-1;n\in\mathbb{N}.\tag{32}$$

Заметим, что из (31), (11) и (13) вытекает равномерная на всём отрезке $[0,\pi]$ оценка

$$\Bigg|\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\Bigg|\le$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}|\psi_{k,n}|\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}).\tag{33}$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 2, в силу (31) и (32) умножив $|U_n(x)|$ на $C_5\omega_1\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)$ в (28) и удалив из суммы в (28) слагаемые с номерами $k_1 \le k \le k_2$, убедимся в существовании константы C_6 и номера $n_0 \in \mathbb{N}$ независящих от функции $f \in C[0,\pi]$, $0 \le a < b \le \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ таких, что для произвольных $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и $n > n_0$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x)\right| \le C_6\omega_1\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\left|l_{k,n}^{SL}(x)\right| \le$$

$$C_6\omega_1\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\ln\frac{2\pi}{\varepsilon}. \tag{34}$$

Положив в случае задачи Коши (18) $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (2) получим тождество $U_n(x) \equiv y(x,\lambda_n)$. Следовательно, значения операторов (1) и (22) при $\lambda = \lambda_n$ тождественно совпадают. Из (34), предложения 1 в случае задачи Коши (18) $\lambda = \lambda_n$ и (33) получаем соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right) = 0. \tag{35}$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Выберем индекс $p = p(x,\lambda)$ такой, что $x \in [x_{p,n}, x_{p+1,n})$. Тогда $x = x_{p,n} + \alpha(x_{p+1,n} - x_{p,n})$, где $\alpha = \alpha(x,\lambda) \in [0,1)$

$$x - x_{k,n} = \frac{p-k+\alpha+\beta_{k,n}}{n}\pi.$$

В силу (14) равномерно по всем $1 \le k \le n$ и $x \in [0,\pi]$ справедлива оценка $\beta_{k,n} = \beta_{k,n}(x) = O(n^{-1})$.

Из (32) и (14) для всех $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и настолько больших n, что для всех $1 \le k \le n-1$ имеет место неравенство $|\beta_{k,n}| < 1$, справедлива оценка

$$\Big|\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2;\\ |p-k|\ge 3;}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha+\beta_{k,n}} - \sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2;\\ |p-k|\ge 3;}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\Big| \le$$

$$C_5\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2;\\ |p-k|\ge 3;}}\frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-2)} \le 3C_5\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big). \tag{36}$$

Учитывая обозначение (31) преобразуем сумму в (35) следующим образом

$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2;\\ |p-k|\ge 3;}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2;\\ |p-k|<3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x). \tag{37}$$

Теперь из неравенства треугольника, (31), (36) и (35) равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем оценку

$$\Big|\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x) - \frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\Big| \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big|\sum_{k:|p-k|\geq 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha}-\sum_{k:|p-k|\geq 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\Big|+$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|<3}\Big|\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x)\Big|+\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|<3}{}'\frac{|\psi_{k,n}|}{|p-k|}=o(1). \tag{38}$$

Из (38) и (35) равномерно по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right)=0. \tag{39}$$

Оценим последнее слагаемое в (39) с помощью (16), (10), (32) и неравенства треугольника

$$\Big|\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\Big|\leq 2\Big|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\Big|+\Big|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|+O\Big(\omega_1\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\Big). \tag{40}$$

Так как функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$l_n=o(n),\quad \lim_{n\to\infty}l_n=\infty,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\omega_1\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}=0. \tag{41}$$

Теперь оценим вторую сумму в (40)

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|\leq\Big|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leq l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|+\Big|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|. \tag{42}$$

Из неравенства (32) следует

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leq l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leq l_n}{}'\Big|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|\leq\frac{C_5}{\pi}\omega_1\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}. \tag{43}$$

Вторая сумма в (42) после преобразования Абеля в случае $k\in[k_1,k_2]:|p-k|>l_n$, может быть оценена таким образом

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|\leq\frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{l_n+1}+4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=l_n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Следовательно, из (41), (42) и (43) равномерно по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ имеем соотношение

$$\Big|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|=o(1). \tag{44}$$

Из (39), (40), (44) и неравнства треугольника получаем оценку

$$\Big|f(x)-L_n^{SL}(f,x)\Big|\leq$$

$$\Big|f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\Big|+$$

$$\Big|\frac{\mathbb{M}}{\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\Big|+\Big|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\Big|+o(1)\leq$$

$$\frac{\mathbb{M}}{\pi}Q_n(f,[a,b],\varepsilon)+o(1).$$

Следовательно, из выполнения условия (30) следует равномерная сходимость (7). Предложение 2 доказано.

Для произвольных $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ обозначим

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1 \le p \le p_2} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \left| \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p-2m} \right|. \tag{45}$$

Следствие 1. *Если функция $f \in C[0,\pi]$, то из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{46}$$

вытекает (7).

Доказательство. Условие (46) обеспечивает выполнение условия (30), которое, в свою очередь (в силу предложения 2), гарантирует истинность (7).

Замечание 5. *Предложение 2 и следствие 1 являются аналогами известных признаков А.А. Привалова равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов и классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице узлов интерполирования П.Л. Чебышёва* [30].

4. Достаточное условие равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля внутри интервала $(0,\pi)$

Теперь можно приступить к доказательству сформулированной ранее теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 Пусть функции v и ω удовлетворяют условию (6) и $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$. Покажем, что выполняется соотношение (46). В силу равномерной непрерывности функции f на отрезке $[0,\pi]$, для любого положительного $\tilde{\epsilon}$ существуют натуральные числа ν и n_1 такие, что для всех $n \ge n_1$ ($n \in \mathbb{N}$) одновременно справедливы два неравенства

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{6} \tag{47}$$

и

$$24\|f\|_{C[a,b]} < \tilde{\epsilon}\nu. \tag{48}$$

Пусть $n \ge n_1$. Найдём индекс p_0, зависящий от n, a, b, ε и f на котором достигается максимум в соотношении (45)

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \left| \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p_0-2m} \right|.$$

Обозначим

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) := \sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \left| \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0-k} \right|.$$

Так как $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ получается из $Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon)$ добавлением неотрицательных слагаемых, то справедливо неравенство

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) \le Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon). \tag{49}$$

Разобьём $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ на два слагаемых

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) = \sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0-k|} -$$

$$2\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'' \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} = S_1(p_0)+S_2(p_0), \tag{50}$$

где два штриха означают, отутствие в сумме неотрицательных слагаемых и слагаемого с индексом $k=p_0$.

Сначала займёмся оценкой первой суммы. Для чего представим её в виде

$$S_1(p_0) = \sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ 0<|p_0-k|<\nu}} \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} +$$

$$\sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ 0<|p_0-k|\geq\nu}} \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} = S_{1,1}(p_0)+S_{1,2}(p_0). \tag{51}$$

В случае $\{k : k\in[k_1,k_2], 0<|p_0-k|\geq\nu\}=\varnothing$ считаем второе слагаемое равным нулю.

Из неравенства (47) для всех $n\geq n_1$ имеем соотношение

$$|S_{1,1}(p_0)| \leq 2\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{52}$$

Теперь оценим $S_{1,2}(p_0)$. Если p_0 удовлетворяет соотношению $k_1\leq p_0-\nu<p_0<p_0+\nu\leq k_2$, то имеют место неравенства $p_0-k_1\geq\nu$ и $k_2-p_0\geq\nu$. Используем (48) и после преобразования Абеля получим оценку

$$|S_{1,2}(p_0)| \leq \left|\sum_{k=k_1}^{p_0-\nu}\frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{p_0-k}\right| + \left|\sum_{k=p_0+\nu}^{k_2}\frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{k-p_0}\right| \leq$$

$$\left|\sum_{k=k_1}^{p_0-\nu-1}\frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k_1,n})}{(p_0-k)(p_0-k-1)}\right| + \left|\frac{f(x_{p_0-\nu+1,n})-f(x_{k_1,n})}{p_0-k_1}\right| +$$

$$\left|\sum_{k=p_0+\nu}^{k_2-1}\frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{p_0+\nu,n})}{(k-p_0)(k+1-p_0)}\right| + \left|\frac{f(x_{k_2,n})-f(x_{p_0+\nu,n})}{k_2-p_0}\right| \leq$$

$$4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{i=\nu}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} + \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} \leq \frac{8\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{53}$$

Точно также доказывается (53) в ситуации, когда индекс p_0 удовлетворяет одному из соотношений $p_0-\nu<k_1\leq p_0<p_0+\nu\leq k_2$ или $k_1\leq p_0-\nu<p_1\leq k_2<p_0+\nu$. Из возможных вариантов остался случай, когда $p_0-\nu<k_1\leq p_1\leq k_2<p_0+\nu$. В этой ситуации $|S_{1,2}(p_0)|=0$.

Из (51), (52) и (53) для всех $n\geq n_1$ имеем оценку

$$|S_1(p_0)| \leq \frac{2\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{54}$$

Перейдем к изучению свойств суммы $S_2(p_0)$. Возьмём произвольное целое $m : 1\leq m\leq k_2-k_1-2$ и представим $S_2(p_0)$ в виде

$$0 \leq S_2(p_0) = -2\sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|\leq m}}{}'' \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} -$$

$$2 \sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|>m}} {}'' \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} =$$

$$S_{2,1}(p_0)+S_{2,2}(p_0). \tag{55}$$

Выберем достаточно большой номер $n_2 \geq n_1$, зависящий только от параметров задачи Штурма-Лиувилля, начиная с которого в силу (14) будут выполняться неравенства $\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_{k+1,n}-x_{k,n}| \leq \frac{3\pi}{2n}$. Функция $f \in C(\omega^l[a,b])$, следовательно, согласно определению (5), начиная с n_2 будем иметь соотношение

$$f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}) \geq -10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{56}$$

Поэтому,

$$0 \leq S_{2,1}(p_0) = -2 \sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|\leq m}} {}'' \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} \leq$$

$$10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}. \tag{57}$$

Далее оценим сумму $S_{2,2}(p_0)$.

$$0 \leq S_{2,2}(p_0) = -2 \sum_{\substack{k\,:\,k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|>m}} {}'' \frac{f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})}{|p_0-k|} \leq$$

$$2\sum_{k=k_1}^{p_0-m-1}\frac{-(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}))_-}{p_0-k}+2\sum_{k=p_0+m+1}^{k_2}\frac{-(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}))_-}{k-p_0}. \tag{58}$$

Если $p_0-m \leq k_1$ или $p_0+m \geq k_2$, то в (58) исчезает соответственно первое или второе слагаемое. В случае $p_0-m<k_1<k_2<p_0+m$, суммы $S_{2,2}(p_0)$ в (55) вообще нет. Принимая во внимание то, что $f \in V(v)$, с помощью преобразования Абеля и (56) оценим (58)

$$0 \leq S_{2,2}(p_0) \leq$$

$$2\left(\frac{\sum\limits_{k=k_1}^{p_0-m-1}-(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}))_-}{p_0-k_1}+\sum_{k=k_1+1}^{p_0-m-1}\frac{\sum\limits_{j=k}^{p_0-m-1}-(f(x_{j+1,n})-f(x_{j,n}))_-}{(p_0-k)(p_0-k+1)}+\right.$$

$$\left.\frac{\sum\limits_{k=p_0+m+1}^{k_2}-(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n}))_-}{k_2-p_0}+\sum_{k=p_0+m+1}^{k_2-1}\frac{\sum\limits_{j=p_0+m+1}^{k}-(f(x_{j+1,n})-f(x_{j,n}))_-}{(p_0-k)(p_0-k-1)}\right) \leq$$

$$2\left(\frac{\big((p_0-k_1)-m-1\big)2,5K_f\omega\big(\frac{\pi}{n}\big)}{p_0-k_1}+M_f\sum_{k=k_1+1}^{p_0-m-1}\frac{v(p_0-m-k)}{(p_0-k)(p_0-k+1)}+\right.$$

$$\left.\frac{\big((k_2-p_0)-m-1\big)2,5K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)}{k_2-p_0}+M_f\sum_{k=p_0+m+1}^{k_2-1}\frac{v(k-p_0-m)}{(p_0-k)(p_0-k-1)}\right) \leq$$

$$2M_f\left(\sum_{k=m+1}^{p_0-k_1-1}\frac{v(k-m)}{k(k+1)}+\sum_{k=m+1}^{k_2-p_0-1}\frac{v(k-m)}{k(k+1)}\right)+10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \leq$$

$$4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big).$$

Отсюда, (55), (57) и (58) имеем

$$0 \le S_2(p_0) \le 10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big).$$

Условие (6) за счет неотрицательности обоих слагаемых эквивалентно

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le m\le k_2-k_1-1} \max\Big\{\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}, \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2}\Big\} = 0.$$

Поэтому существует номер $n_3 \in \mathbb{N}, n_3 \ge n_2$, такой, что для произвольного $n \ge n_3$ найдётся $m : 1 \le m \le k_2 - k_1 - 1$ для которого справедливо неравенство

$$0 \le S_2(p_0) \le \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{59}$$

Из (49), (50), (51), (54) и (59) получаем, что для произвольного $\tilde{\epsilon} > 0$ существует номер $n_3 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > n_3$ найдётся $m : 1 \le m \le k_2 - k_1 - 2$, для которого справедливы неравенства

$$Q_n^*(f, [a, b], \varepsilon) \le Q_n^{**}(f, [a, b], \varepsilon) < \tilde{\epsilon}.$$

Теперь теорема 1 (в случае $f \in C(\omega^l[a, b]) \cap V^-(v))$ следует из предложения 1.

Для доказательства теоремы 1 в случае $f \in C(\omega^r[a, b]) \cap V^+(v)$ достаточно заметить, что если $f \in C(\omega^r[a, b]) \cap V^+(v)$, то $-f \in C(\omega^l[a, b]) \cap V^-(v)$ и оператор $L_n^{SL}(f, \cdot)$ — линейный. Теорема 1 доказана.

Замечание 6. *В случае когда $f \in C(\omega^l[a, b]) \cap V(v)$ или $f \in C(\omega^r[a, b]) \cap V(v)$ (v есть мажоранта классического модуля изменения $v(n, f)$) в* [30] *установлена достаточность условия* (6) *для равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов и алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа в случае матрицы узлов интерполирования П.Л. Чебышёва.*

В статье [31] *установлена равномерная сходимость классических тригонометрических рядов Фурье для $2\pi-$периодических, функций из класса $f \in C(\omega[a, b]) \cap V(v)$, где функции ω и v являются классическими модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$ и модулем изменения $v(n, f)$ функции f.*

Замечание 7. *Из теоремы 1 следует, что если функции $f_1 \in C(\omega_1^r[a, b]) \cap V^+(v_1)$ и $f_2 \in C(\omega_2^l[a, b]) \cap V^-(v_2)$, а пары функций $(v_i,\, \omega_i)$, где $i = 1, 2$, удовлетворяют соотношению* (6)*, то, несмотря на то, что линейная комбинация $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ может не принадлежать ни одному из этих классов, интерполяционный процесс Лагранжа-Штурма-Лиувилля будет приближать* (7) *функцию f.*

Замечание 8. *Каждый из классов функций: Дини-Липшица $\lim_{n\to\infty} \omega(f, 1/n) \ln n = 0$ (см.,* [1]*) и Крылова (непрерывные функции ограниченной вариации) являются собственным подмножеством функционального класса, определяемым соотношением* (6).

Замечание 9. *Если $f \in C[0, \pi]$, то имеют место двусторонние оценки*

$$v^+(n, f) \le v(n, f) \le 2\left(v^+(n, f) + \|f\|_{C[0,\pi]}\right),$$

$$-v^-(n, f) \le v(n, f) \le 2\left(-v^-(n, f) + \|f\|_{C[0,\pi]}\right).$$

Следствие 2. *Из теоремы 1 следует, что любое из условий $\lim_{n\to\infty} \omega^l(f, 1/n) \ln n = 0$ или $\lim_{n\to\infty} \omega^r(f, 1/n) \ln n = 0$ гарантирует справедливость соотношения* (7).

Следствие 3. *Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента v такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(k)}{k^2} < \infty, \tag{60}$$

то для любой функции $f \in C[0,\pi] \cap V^{\pm}(v)$ справедливо соотношение (7).

Доказательство. Действительно, из непрерывности функции f следует существование последовательности натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ одновременно удовлетворяющей двум условиям $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,\pi/n)\ln m_n = 0$. Следовательно, сходимость ряда (60) гарантирует выполнение условия (6) для любой функции f, принадлежащей одному из классов $C[0,\pi] \cap V^{+}(v)$ или $C[0,\pi] \cap V^{-}(v)$. Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон Г.И. *Об одном интерполяционном процессе* // Учён. записки Ленинград. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1958. Т. 166. С. 213–219.
2. Трынин А.Ю. *О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2010. № 11 . С. 74–85.
3. Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. № 9(460) . С. 60–73.
4. Трынин А.Ю. *Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения.* LAP LAMBERT Academic Publishing RU. 2016. 479 с.
5. Трынин А.Ю. *Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 133–143.
6. Трынин А.Ю. *Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля*// Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 116–129
7. Кашин Б.С. , Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* М.: Изд-во АФЦ, 1999.
8. Новиков И.Я. , Стечкин С.Б. *Основы теории всплесков* // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. № 6(324). С. 53–128.
9. F. Stenger *Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions* . N.Y. : Springer Ser. Comput. Math., **20** Springer-Verlag, 1993.
10. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.
11. P.L. Butzer *A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields* // Journal of Approximation Theory. 2009. Vol. 160. P. 3–18.
12. M. Richardson, L. Trefethen *A sinc function analogue of Chebfun*// SIAM J. SCI. COMPUT. 2011. Vol. 33. No. 5. P. 2519–2535.
13. E. Livne Oren, E. Brandt Achi *MuST: The multilevel sinc transform* // SIAM J. on Scientific Computing. 2011. Vol. 33. № 4. P. 1726–1738.
14. Marwa M. Tharwat *Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a Gaussian multiplier* // Calcolo: a quarterly on numerical analysis and theory of computation. 2014. Vol. 51. Issue 3. September. P. 465–484.
15. A.Yu. Trynin, V.P. Sklyarov *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval* // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. T. 7. № 3, Sep. P. 263–270.
16. Трынин А.Ю. *Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам* // Математика. Механика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2005. Т. 7. С. 124–127.
17. Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 5. С. 1155–1166.
18. Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. 2007. Т. 198. № 10. С. 141–158.

19. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.
20. Трынин А.Ю. *Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. **16**:3. С. 288–298.
21. V.P. Sklyarov *On the best uniform sinc-approximation on a finite interval* // East Journal on Approximations. 2008.**14**(2). P. 183–192.
22. A. Mohsen, M. El-Gamel *A sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations* // Z. Angew. Math. Phys. 2007. Vol. 58. № 3. P. 380–390.
23. Трынин А.Ю. *О расходимости синк-приближений всюду на* $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 4. С. 232–256.
24. Умаханов А.Я., Шарапудинов И.И. *Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости* // Владикавк. матем. журн. 2016. 18:4. С. 61–70.
25. Трынин А.Ю. *О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций*, Уфимский математический журнал. 2015. 7, № 4. С. 116–132.
26. Трынин А.Ю. *О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций*// Алгебра и анализ. 2015. **27**:5. С. 170–194.
27. Трынин А.Ю. *Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2016. № 3. С. 72–81.
28. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. 2009. Т. 200. № 11. С. 61–108.
29. Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби* // Известия Российской Академии Наук. Серия математическая. 2011. Т. 75. № 6. С. 129–162.
30. Привалов А.А. *Теория интерполирования функций.* Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1990.
31. Z.A. Chanturiya *On uniform convergence of Fourier series* // Math. USSR-Sb. 1976. vol. **29**. issue 4. P. 475–495.
32. Голубов Б.И. *Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье* // Матем. заметки. 2012. **91**(4). С. 506–514.
33. Голубов Б.И. *Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. 1985. **37:1**. С. 13–24.
34. Дьяченко М.И. *Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье* // Математический сборник. 2013. **204:3**. С. 3–18.
35. Скопина М.А., Максименко И.Е. *Многомерные периодические всплески* // Алгебра и анализ. 2003. **15:2**. С. 1–39.
36. Дьяченко М.И. *Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. 2004. **76:5**. С. 723–731.
37. Иванникова Т.А., Тимашова Е.В., Шабров С.А. *О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. 13:2(1). С. 3–8.
38. Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // Фундамент. и прикл. матем. 2014. 19:5. С. 185–212.
39. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., 1953. Т. 1,2.

Александр Юрьевич Трынин,
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: `atrynin@gmail.com`