ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 76-92.

УДК 517.5

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ

Аннотация. В данной статье изучаются системы уравнений свертки в пространствах векторнозначных функций одной переменной. Для таких систем определен аналог интерполирующей функции Леотьева и приведен ряд свойств этой функции. Для изучения этих систем вводится геометрическая разность множеств и приводятся ее свойства.

Доказана теорема о представлении произвольных вектор-функций в ряд по элементарным решениям однородной системы уравнений свертки. Эти результаты обобщают некоторые известные результаты А.Ф. Леонтьева о методах суммирования ряда элементарных решений к произвольному решению и усиливают результаты И.Ф. Красичкова-Терновского о суммируемости квадратной системы уравнений свертки.

Приводится явный вид областей, в которых сходится ряд элементарных решений для произвольных вектор-функций. Эти области зависят от областей определения вектор-функций, от роста преобразований лапласа элементов системы и от оценок снизу его определителя. Построены примеры, показывающие точность этого результата.

Аналогичные результаты получены для решений однородной системы уравнений свертки, и приведены примеры, в которых ряд сходится во всей области определения вектор-функции.

Ключевые слова: системы уравнений свертки, векторнозначные функции, интерполирующая функция Леотьева, ряды по элементарным решениям.

Mathematics Subject Classification: 30B50

1. Введение

Пусть $q, r \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_q$ области в комплексной плоскости, $H(U_j)$ пространство функций, голоморфных в области U_j с топологией равномерной сходимости на компактах, S_j^p — линейные непрерывные функционалы на пространстве $H(U_j), j = 1, \ldots, q$, $p = 1, \ldots, r$.

Рассмотрим систему уравнений свертки

$$\sum_{j=1}^{q} \left\langle S_j^p, f_j(z+h) \right\rangle = 0,\ p = 1, \ldots, r,\ f = (f_1, \ldots, f_q) \in \prod_{j=1}^{q} H(U_j).$$

В работах И. Ф. Красичкова-Терновского [1]–[7] изучался вопрос аппроксимации произвольного решения этой системы линейными комбинациями элементарных решений, а в работах [8]–[10] суммируемость ряда элементарных решений.

S.G. Merlyakov, Systems of convolution equations in complex domains.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00794 и 15-01-01661).

Поступила 24 октября 2017 г.

В данной статье мы перенесем на решения подобных систем некоторые известные результаты А. Ф. Леонтьева о методах суммирования ряда элементарных решений к произвольному решению для случая $q = 1$ и одного уравнения свертки (см. [11]) и усилим некоторые результаты И. Ф. Красичкова-Терновского о суммируемости.

2. Обозначения, предварительные сведения и результаты

Для множества M комплексной плоскости через

$$\mathrm{conv} M, \quad \mathrm{int}\, M, \quad \overline{M}, \quad M_w,$$

где $w \in \mathbb{C}$, будем обозначать соответственно его выпуклую оболочку, внутренность, замыкание и связную компоненту, содержащую точку w.

Сумму и геометрическую разность множеств $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ определим соответственно как множества

$$M_1 + M_2 = \{z_1 + z_2 : z_1 \in M_1, z_2 \in M_2\}, M_1 \stackrel{*}{-} M_2 = \{z \in \mathbb{C} : z + M_2 \subset M_1\}.$$

Для операций с пустыми множествами, очевидно, имеем:

$$M + \varnothing = \varnothing, \quad M \stackrel{*}{-} \varnothing = \mathbb{C}, \quad \varnothing \stackrel{*}{-} M_1 = \varnothing, \ M_1 \neq \varnothing.$$

Опорная функция множества $M \subset \mathbb{C}$ определяется по формуле

$$h(\theta, M) = \sup_{a \in M} a e^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Эта функция обладает следующими свойствами (см. [12], с. 18–19, [13], с. 125):

Лемма 1. *1) $h(\theta, M) = h(\theta, \mathrm{conv}\overline{M})$.*
2) $(h(\theta, M_1) \leq h(\theta, M_2), \ \theta \in [0, 2\pi]) \Longleftrightarrow \left(M_1 \subset \overline{\mathrm{conv} M_2}\right)$.
3) $h(\theta, M_1 + M_2) = h(\theta, M_1) + h(\theta, M_2)$.

Лемма 2. *Операция разности множеств обладает следующими соотношениями:*
1) $(M + K \subset U) \Longleftrightarrow (M \subset U \stackrel{*}{-} K)$.
2) $(U_1 \subset U_2, \ K_1 \supset K_2) \Longrightarrow (U_1 \stackrel{*}{-} K_1 \subset U_2 \stackrel{*}{-} K_2)$.
3) $[(U_1 + U_2) \stackrel{*}{-} K] \supset [(U_1 \stackrel{*}{-} K) + U_2]$.
4) $U \stackrel{*}{-} (K_1 + K_2) = (U \stackrel{*}{-} K_1) \stackrel{*}{-} K_2$.
5) Для произвольных множеств индексов A и B имеет место равенство:

$$\bigcap_{\alpha \in A, \beta \in B} (U_\alpha \stackrel{*}{-} K_\beta) = \left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \stackrel{*}{-} \left(\bigcup_{\beta \in B} K_\beta\right).$$

6) Если множества U_n открыты, а множества K_m компактны, причем $U_n \subset U_{n+1}, \ K_m \supset K_{m+1}, \ n, m = 1, 2, \ldots,$ то

$$\bigcup_{n,m} (U_n \stackrel{*}{-} K_m) = \left(\bigcup_n U_n\right) \stackrel{*}{-} \left(\bigcap_m K_m\right).$$

7) Если множество U открыто, а множество K компактно, то множество $U \stackrel{*}{-} K$ открыто.
8) Если множество U выпукло, то и множество $U \stackrel{*}{-} K$ выпукло, и

$$U \stackrel{*}{-} K = U \stackrel{*}{-} \mathrm{conv} K.$$

9) Для множеств $U, K \subset \mathbb{C}, \ K \neq \varnothing$, имеет место неравенство

$$h(\theta, U \stackrel{*}{-} K) \leq h(\theta, U) - h(\theta, K), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

10) *Если выпуклое множество U замкнуто или открыто, а множество K компактно и не пусто, то*
$$(U+K) \overset{*}{-} K = U.$$
11) *Пусть открытое множество U односвязно, тогда все связные компоненты множества $U \overset{*}{-} K$ также односвязны.*

Доказательство. Свойства 1)–7) легко следуют из определения разности множеств и свойств компактов.

8) Выпуклость множества $U \overset{*}{-} K$ вытекает из свойства 5):
$$U \overset{*}{-} K = \bigcap_{z\in K}(U-z).$$
Так как множество U выпукло, то
$$(z+K\subset U) \Longleftrightarrow (z+\mathrm{conv}K)\subset U.$$
Свойство 9) вытекает из включения
$$(U \overset{*}{-} K)+K\subset U$$
и свойства 3) опорных функций.

10) По предыдущему свойству
$$h(\theta,(U+K) \overset{*}{-} K)\le h(\theta,U+K)-h(\theta,K)=$$
$$h(\theta,U)+h(\theta,K)-h(\theta,K)=h(\theta,U),\quad \theta\in[0,2\pi]\,,$$
поэтому по свойству 2) опорных функций в случае замкнутости множества U имеем соотношение
$$(U+K) \overset{*}{-} K\subset U.$$
Обратное включение очевидно.

Если же множество U открыто, то его можно исчерпать возрастающей последовательностью выпуклых компактов и искомое равенство несложно вывести из свойства 6).

Замечание. Если множество U не выпукло, то последнее свойство, вообще говоря, не верно.

Пусть, например,
$$U=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}\,,\ K=\{z\in\mathbb{C}:-1\le\mathrm{Re}\,z\le1,\ \mathrm{Im}\,z=0\}\,.$$
Как несложно показать,
$$U+K=\mathbb{C},$$
и
$$\mathbb{C}=(U+K) \overset{*}{-} K\ne U.$$

11) Пусть $C\subset U \overset{*}{-} K$ — замкнутый контур, содержащий точку z внутри. В таком случае для любой точки $w\in K$ имеем $w+C\subset U$ и замкнутый контур $w+C$ содержит точку $w+z$ внутри.

В силу односвязности области U имеет место включение
$$w+z\in U,$$
откуда, как нетрудно показать, и вытекает искомое утверждение. □

Пусть U и K соответственно открытое и компактное подмножества комплексной плоскости.

Через $H(U)$ и $H(K)$ будем обозначать соответственно пространство голоморфных функций в области U и пространство ростков голоморфных функций на компакте K с естественными топологиями.

Через $H^*(U)$ и $H^*(K)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов соответственно на пространстве $H(U)$ и $H(K)$ с сильными топологиями.

Для произвольного функционала $S \in H(\mathbb{C})$, как известно (см. [14]), найдется компакт $K \subset \mathbb{C}$ и голоморфная вне K функция γ, $\gamma(\infty) = 0$, что

$$\langle S, f \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t) dt, \quad f \in H(\mathbb{C}),$$

где контур C охватывает компакт K.

Преобразование Лапласа $\widehat{S}(\lambda)$ функционала S определяется по формуле

$$\widehat{S}(\lambda) = \left\langle S_z, e^{\lambda z} \right\rangle,$$

и является целой функцией экспоненциального типа. Наименьший выпуклый компакт, содержащий все особенности функции γ, называется сопряженной диаграммой функции $\widehat{S}(\lambda)$.

Обратно, для любой целой функции экспоненциального типа найдется функционал пространства $H^*(\mathbb{C})$, преобразование Лапласа которого совпадает с этой функцией.

Пусть компакт $K \subset \mathbb{C}$ является сопряженной диаграммой функции $\widehat{S}(\lambda)$. Если область $U \subset \mathbb{C}$ такова, что $K \subset U$, то в пространстве $H(U)$ можно определить оператор свертки $S*$ с характеристической функцией $\widehat{S}(\lambda)$ по правилу:

$$(S * f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t + z) dt, \quad f \in H(U).$$

Как несложно показать, этот оператор будет линейно и непрерывно отображать пространство $H\left(U\right)$ в пространство $H\left(\left[U \stackrel{*}{-} K\right]_0\right)$.

Если функционал F лежит в пространстве $H^*(\mathbb{C})$, компакт R является сопряженной диаграммой функции $\widehat{F}$ и $K + R \subset U$, то можно определить свертку функционалов F и S как функционал $F * S$ на пространстве $H(U)$, действующий по формуле

$$\langle F * S, f \rangle = \langle F, S * f \rangle, \quad f \in H(U).$$

В монографии [15] (см. с. 21) показано, что это линейный и непрерывный функционал на пространстве $H(U)$, для которого, как нетрудно видеть, имеют место соотношения:

$$F * S = S * F, \qquad \widehat{F * S} = \widehat{F}\widehat{S}.$$

Пусть U_j области в комплексной плоскости, $S_j^p \in H^*(U_j)$, $\varphi_j^p(\mu) = \widehat{S_j^p}(\mu)$, компакты $K_j^p \subset U_j$ являются сопряженными диаграммами функций $\varphi_j^p(\mu)$, $j = 1, \ldots, q$, $p = 1, \ldots, r$,

$$\varphi(\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(\mu) & \varphi_1^2(\mu) & \ldots & \varphi_1^q(\mu) \\ \varphi_2^1(\mu) & \varphi_2^2(\mu) & \ldots & \varphi_2^q(\mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r^1(\mu) & \varphi_r^2(\mu) & \ldots & \varphi_r^q(\mu) \end{pmatrix}.$$

Определим на пространстве

$$\prod_{j=1}^{q} H(U_j)$$

линейный непрерывный оператор свертки $S*$, принимающий значения в пространстве

$$\prod_{p=1}^{r} H\left(\left[\bigcap_{j=1}^{q}\left(U_j \stackrel{*}{-} K_j^p\right)\right]_0\right),$$

по формуле:

$$(S * f)_p = \sum_{j=1}^{q} S_j^p * f_p,$$

где $(S * f)_p$ — p-тая компонента вектор-функции $S * f$, $p = 1, \dots, r$.

Рассмотрим однородную систему уравнений свертки

$$S * f = 0. \tag{1}$$

Решение этой системы называется элементарным, если оно представляется в виде

$$\sum_{m=1}^{s} e^{\lambda z} z^m c_m, \ s \in \mathbb{N},$$

где $c_m \in \mathbb{C}^r$, $m = 1, \dots, s$, число λ называется показателем этого решения.

Рангом системы (1) назовем число

$$\operatorname{rg} S = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{rg} \varphi(\lambda).$$

Пусть F_p^m — линейные непрерывные функционалы на пространстве целых функций, компакты R_p^m являются сопряженными диаграммами функций $\widehat{F}_p^m$, $p = 1, \dots, r$, $m = 1, \dots, l, l \in \mathbb{N}$, и для них выполнены включения:

$$\operatorname{conv} \bigcup_{p=1}^{r} \left(R_p^m + K_j^p\right) \subset U_j, \ m = 1, \dots, l, \ j = 1, \dots, q.$$

В таком случае несложно показать, что матрица фунционалов $F * S$, у которой на пересечении j-того столбца и m-той строки стоит элемент

$$\sum_{p=1}^{r} F_p^m * S_j^p,$$

будет порождать оператор свертки

$$(F * S) * : \prod_{j=1}^{q} H(U_j) \to \prod_{m=1}^{l} H\left(\left\{\bigcap_{j=1}^{q} \left[U_j \stackrel{*}{-} \operatorname{conv} \bigcup_{p=1}^{r} \left(R_p^m + K_j^p\right)\right]\right\}_0\right),$$

и

$$(F * S) * f = F * (S * f), f \in \prod_{j=1}^{q} H(U_j), \ \widehat{F * S} = \widehat{F}\widehat{S}.$$

Пусть для системы (1) выполнены равенства

$$q = p = \operatorname{rg} S = n. \tag{2}$$

Примем следующие обозначения:

$L(\lambda) = \det \varphi(\lambda)$, $\varphi^*(\lambda)$ — присоединенная матрица для $\varphi(\lambda)$, B_m^j — сопряженные диаграммы элементов матрицы $\varphi^*(\lambda)$,

$$K_m = \operatorname{conv} \bigcup_{j=1}^{n} K_m^j, \ B^j = \operatorname{conv} \bigcup_{m=1}^{n} B_m^j, \ m, j = 1, \dots, n,$$

K — сопряженная диаграмма функции $L(\lambda)$.

Из свойств присоединенной матрицы несложно вывести следующие соотношения:

$$B^j \subset \sum_{p \neq j} K_p, \quad \operatorname{conv} \bigcup_{j=1}^{n} \left(K_m^j + B_j^m\right) \supset K, \tag{3}$$

$j, m = 1, \dots, n$.

В дальнейшем будем считать, что $K_p \subset U_p,\ p = 1, \ldots, n$.

Для выпуклого компакта $B \subset K$ определим множества $(U, \varphi, B)_p$ как объединение множеств

$$\bigcap_{j=1}^{n} \left[(B + R_j) \overset{*}{-} B_j^p\right] \tag{4}$$

по совокупности всех таких систем выпуклых компактов $(R_1, \ldots, R_n)$, что для некоторых односвязных областей $G_p \subset U_p$

$$\begin{gathered} \operatorname{conv} \bigcup_{j=1}^{n} \left(R_j + K_m^j\right) \subset G_m,\ m = 1, \ldots, n, \\ R_j \subset \left[\bigcap_{m=1}^{n} \left(G_m \overset{*}{-} K_m^j\right)\right]_0,\ j = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{5}$$

$p = 1, \ldots, n$.

Ясно, что множества $(R_1, \ldots, R_n)$ с условиями (5) можно немного шевелить, поэтому, очевидно, множества $(U, \varphi, B)_p$ будут открытыми, $p = 1, \ldots, n$.

Лемма 3. *Имеют место следующие соотношения:*

1) $(U, \varphi, B)_p \subset U_p,\ p = 1, \ldots, n$.

2) *Для односвязных областей* $G_p \subset U_p$ *и любой выпуклой подобласти* D *области*

$$\left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \overset{*}{-} K_m)\right]_0$$

выполнено включение:

$$(B + D) \overset{*}{-} B^p \subset (U, \varphi, B)_p\,,$$

$p = 1, \ldots, n$.

3) *Для выпуклых областей* U_p *имеют место равенства:*

$$(U, \varphi, B)_p = \bigcap_{j=1}^{n} \left\{\left[B + \bigcap_{m=1}^{n} \left(U_m \overset{*}{-} K_m^j\right)\right] \overset{*}{-} B_j^p\right\},$$

$p = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Понятно, что достаточно ограничиться случаем $p = 1$.

1) Пусть точка z принадлежит множеству $(U, \varphi, B)_1$. В таком случае найдется система выпуклых компактов $(R_1, \ldots, R_n)$ со свойством (5), что точка z лежит во множестве (4). Имеем:

$$z + B_j^1 \subset B + R_j \subset K + R_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Обозначим через M_1 левую часть первого соотношения (5). Ясно, что это множество является выпуклым компактом и

$$R_j + K_1^j \subset M_1,$$

или

$$R_j \subset M_1 \overset{*}{-} K_1^j,$$

поэтому из соотношений (6) получим:

$$z + B_j^1 \subset K + (M_1 \overset{*}{-} K_1^j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

По свойству 3) операции разности множеств

$$K + (M_1 \overset{*}{-} K_1^j) \subset (K + M_1) \overset{*}{-} K_1^j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

следовательно,

$$z \in \bigcap_{j=1}^{n} \left\{ \left[(K+M_1) \overset{*}{-} K_1^j \right] \overset{*}{-} B_j^1 \right\} = \bigcap_{j=1}^{n} \left[(K+M_1) \overset{*}{-} \left(K_1^j + B_j^1 \right) \right] \subset$$

$$\subset (K+M_1) \overset{*}{-} \bigcup_{j=1}^{n} \left(K_1^j + B_j^1 \right) \subset (K+M_1) - K = M_1.$$

Здесь были применены свойства 2), 4), 5), 10) операции разности множеств и соотношения (3).

Так как множество M_1 лежит в области G_1, искомое доказано.

2) Если R выпуклый компакт области D, то по свойству 2) операции разности множеств имеем

$$R \subset \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \overset{*}{-} K_m) \right]_0 \subset \left[\bigcap_{m=1}^{n} \left(G_m \overset{*}{-} K_m^j \right) \right]_0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

а по свойству 1) и в силу выпуклости компакта R получим:

$$G_m \supset R + K_m = \operatorname{conv} \bigcup_{j=1}^{n} \left(R + K_m^j \right), \; m = 1, \ldots, n.$$

В таком случае, если положить $R_p = R, \; p = 1, \ldots, n$, из определения множества $(U, \varphi, B)_1$ следует включение

$$\bigcap_{j=1}^{n} \left[(B+R) \overset{*}{-} B_j^1 \right] \subset (U, \varphi, B)_1,$$

и искомое вытекает из свойств 5), 6) и 8) операции разности множеств.

3) Включение "$\subset$" — непосредственное следствие определения и свойства 2) операции разности множеств.

В случае выпуклости областей U_p их и берем за области G_p, $p = 1, \ldots, n$, и условия (5) на множества R_j, как несложно показать, будут эквивалентны соотношению:

$$R_j \subset \bigcap_{m=1}^{n} \left(U_m \overset{*}{-} K_m^j \right),$$

$j = 1, \ldots, n$.

Пусть $R_j^l, \; l \in \mathbb{N}$, — последовательность выпуклых компактов таких, что

$$R_j^l \subset \operatorname{int} R_j^{l+1}, \; l \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{l=1}^{\infty} R_j^l = \bigcap_{m=1}^{n} \left(U_m \overset{*}{-} K_m^j \right),$$

$j = 1, \ldots, n$. В таком случае

$$(U, \varphi, B)_1 \supset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{n} \left[\left(B + R_j^l \right) \overset{*}{-} B_j^1 \right] \supset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{n} \left[\left(B + \operatorname{int} R_j^l \right) \overset{*}{-} B_j^1 \right].$$

Последовательность, стоящяя в квадратных скобках последнего соотношения, будет возрастающей по переменной l, поэтому, как несложно показать,

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{n} \left[\left(B + \operatorname{int} R_j^l \right) \overset{*}{-} B_j^1 \right] \supset \bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{\infty} \left[\left(B + \operatorname{int} R_j^l \right) \overset{*}{-} B_j^1 \right]$$

и искомое следует из свойства 6) операции разности множеств. $\square$

Следствие 1. *Для односвязных областей $G_p \subset U_p$ имеют место включения:*

$$B + \left\{ \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \stackrel{*}{-} K_m) \right]_0 \stackrel{*}{-} B^p \right\} \subset (U, \varphi, B)_p,$$

$$(B \stackrel{*}{-} B^p) + \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \stackrel{*}{-} K_m) \right]_0 \subset (U, \varphi, B)_p,$$

$p = 1, \dots, n$.

Здесь также будем считать, что $p = 1$.

Если точка z принадлежит левой части первого соотношения, то $z \in B + z_0$ для некоторой точки

$$z_0 \in \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \stackrel{*}{-} K_m) \right]_0 \stackrel{*}{-} B^1,$$

или

$$z_0 + B^1 \subset \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \stackrel{*}{-} K_m) \right]_0 .$$

Положив $R = z_0 + B^1$, по доказанному выше имеем:

$$\big(R + z_0 + B^1\big) \stackrel{*}{-} B^1 \subset (U, \varphi, B)_1.$$

Из невырожденности матрицы φ следует, что множество B^1 не пусто, поэтому по свойству 10) операции разности множеств имеем

$$\big(R + z_0 + B^1\big) \stackrel{*}{-} B^1 = R + z_0,$$

что и доказывает первое соотношение.

Для любой выпуклой области

$$D \subset \left[\bigcap_{m=1}^{n} (G_m \stackrel{*}{-} K_m) \right]_0 ,$$

как показано выше, выполнено включение

$$(B + D) \stackrel{*}{-} B^1 \subset (U, \varphi, B)_1,$$

и второе соотношение следует из свойства 3) операции разности множеств и произвольности выпуклой области D.

3. Свойства функций ω и P

Предположим, что односвязные области G_p содержат компакты K_p, $p = 1, \dots, n$, и для системы (1) выполнены равенства (2), так что функция $L(\lambda)$ будет отлична от тождественного нуля.

На пространстве

$$\prod_{p=1}^{n} H(G_p) \tag{7}$$

введем две вектор-функции:

$$\omega(\mu, f, \varphi, G, a) = \varphi^*(\mu) \left(\sum_{p=1}^{n} \left\langle S_p^j, \int_{a_p}^{z} e^{\mu(z-t)} f_p(t) dt \right\rangle \right)_{j=1}^{n},$$

$$P(z, f, \varphi, C) = \frac{1}{2\pi p} \int_C \frac{e^{\mu z} \omega(\mu, f, \varphi, G, a)}{L(\mu)} d\mu, \tag{8}$$

где

$$a \in \prod_{p=1}^{n} G_p,$$

C — замкнутый контур, не проходящий через нули функции $L(\lambda)$, интегрирование в первом случае производится по кривым области G_p, $p = 1, \ldots, n$.

Заметим, что функция ω является обобщением известной интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева на векторный случай.

Лемма 4. *Функция $\omega(\mu, f, \varphi, G, a)$ обладает следующими свойствами:*

1) *По переменной μ функция $\omega(\mu, f, \varphi, G, a)$ является целой функцией экспоненциального типа по каждой компоненте, по переменной f — линейным непрерывным функционалом на пространстве* (7).

2) *Для оператора свертки $S*$ имеет место следующее равенство:*

$$S * e^{\mu z}\omega(\mu, f, \varphi, G, a) = L(\mu)\left(\sum_{p=1}^{n}\left\langle S_p^j, \int_{a_p}^{z} e^{\mu(z-t)} f_p(t)\, dt\right\rangle\right)_{j=1}^{n}.$$

3) *Для вектор-функции*

$$f(z) = (\exp \lambda z)\, b, \quad b \in \mathbb{C}^n, \tag{9}$$

имеет место соотношение:

$$\omega(\mu, f, \varphi, G, a) = \frac{\varphi^*(\mu)\varphi(\lambda)b - L(\mu)E(\lambda-\mu, a, b)}{\lambda - \mu}.$$

Здесь

$$E(\lambda-\mu, a, b) = \left(e^{(\lambda-\mu)a_1}b_1, \ldots, e^{(\lambda-\mu)a_n}b_n\right).$$

Функция $g_p^j(\mu, \lambda)$, стоящая на пересечении p-того столбца и j-той строки матрицы $\varphi^*(\mu)\varphi(\lambda)$, имеет оценку

$$|g_p^j(\mu, \lambda)| \leqslant C(\varepsilon)C_1(\varepsilon_1)e^{\left[h\left(-\arg\mu, B^j\right)+\varepsilon\right]|\mu| + [h(-\arg\lambda, K_p)+\varepsilon_1]|\lambda|} \tag{10}$$

и удовлетворяет соотношению

$$g_p^p(\mu, \mu) = L(\mu), \quad g_p^j(\mu, \mu) = 0, \ p \neq j, \tag{11}$$

$p, j = 1, \ldots, n$.

4) *Предположим, что $\psi(\mu)$ — квадратная матрица n-того порядка, элементы которой являются целыми функциями экспоненциального типа, компакты R_j^m — сопряженные диаграммы функций ψ_j^m, и выполнены включения:*

$$\operatorname{conv}\bigcup_{j=1}^{n}\left(R_j^m + K_p^j\right) \subset G_p, \tag{12}$$

$$R_j^m \subset \left[\bigcap_{p=1}^{n}\left(G_p \overset{*}{-} K_p^j\right)\right]_0 \overset{\text{def}}{=} O_j, \tag{13}$$

$p, j, m = 1, \ldots, n$.

Тогда для любой вектор-функции f пространства (7) *имеет место равенство:*

$$\omega(\mu, f, \psi\varphi, G, a) = \det\psi(\mu)\omega(\mu, f, \varphi, G, a) + \varphi^*(\mu)\omega(\mu, S*f, \psi, O, 0).$$

5) *Пусть M_p — компактный выпуклый многоугольник, $K_p \subset \operatorname{int} M_p$, $M_p \subset G_p$, $\arg z = -\alpha_{m,p}$, $m = 1, \ldots, p_p$, — перпендикуляры к сторонам многоугольника, а $l_{m,p}$ — лучи $\arg z = \alpha_{m,p}$ (предполагаем, что переход от луча $l_{m,p}$ к лучу $l_{m+1,p}$ происходит по кратчайшему пути против часовой стрелки), $p = 1, \ldots, n$.*

Для произвольной вектор-функции f пространства (7) имеет место представление:

$$\omega(\mu, f, \varphi, G, a) = L(\mu) A(\mu) - \varphi^*(\mu) D(\mu),$$

где $A(\mu)$ и $D(\mu)$ — мероморфные вектор-функции, полюса которых лежат на лучах $l_{m,p}$, $m = 1, \ldots, p_p$, $p = 1, \ldots, n$.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $c(\varepsilon) > 0$ такое, что вне углов

$$P_{m,p} : |\arg(z - \alpha_{m,p})| < \varepsilon,$$

будет выполнено неравенство

$$|D_j(\mu)| < \frac{c(\varepsilon)}{|\mu|} \sum_{p=1}^{n} \max_{t \in M_p} |f_p(t)|,$$

$m = 1, \ldots, p_p$, $p, j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Свойства 1)–3) показываются путем несложных вычислений.

4) Покажем, что все три оператора этого соотношения непрерывны по переменной f в пространстве (7).

Действительно, второй оператор непрерывен по свойству 1), первый, используя включения (12), также непрерывен по этому свойству.

Третий оператор является суперпозицией двух, из которых внутренний оператор, свертка $S*$, непрерывно отображает пространство (7) в пространство

$$\prod_{p=1}^{n} H(O_p),$$

а внешний есть произведение матрицы φ^* на вектор-функцию ω, определенную на этом пространстве.

Как легко видеть, пересечение конечного числа открытых множеств с односвязными связными компонентами будет таким же множеством, поэтому, согласно свойству 11) операции разности множеств, области O_p, $p = 1, \ldots, n$, будут односвязны и непрерывность третьего оператора следует из свойства 1).

Как несложно вывести из свойства 2), искомое равенство будет верно для вектор-функций $f(z) = (\exp \lambda z) b$, $b \in \mathbb{C}^n$, а линейные комбинации их плотны в пространстве (7) в силу односвязности областей G_p, $p = 1, \ldots, n$, что и доказывает утверждение.

5) Этот пункт следует из теоремы 4.6.10 монографии [16] и замечаний к ней. □

2. Приведем теперь свойства вектор-функции $P(z, f, \varphi, C)$.

Лемма 5. 1) *В представлении (8) вектор-функция P не зависит от параметра a, по переменной f является линейным непрерывным функционалом на пространстве*

$$\prod_{p=1}^{n} H(K_p),$$

а по переменной z — линейной комбинацией элементарных решений системы (1) с показателями, лежащими внутри контура C.

2) *Предположим, что матрица $\psi(\mu)$ удовлетворяет пункту 4) предыдущей леммы.*

Если $\det \psi(\mu) \not\equiv 0$ и вектор-функция f удовлетворяет системе (1), то эта вектор-функция будет удовлетворять системе с характеристической матрицей $\psi(\mu)\varphi(\mu)$ и

$$P(z, f, \psi\varphi, C) = P(z, f, \varphi, C)$$

для любого контура C, не проходящего через нули функции $\det \psi(\mu)\varphi(\mu)$.

3) *Пусть $G_p \subset U_p$ выпуклые области, $G_p \supset K_p$, и для некоторого числа $m, 1 \leqslant m \leqslant n$, выполнены включения:*

$$B_j^m + K_p^j \subset G_p, \quad p, j = 1, \ldots, n.$$

Если вектор-функция f пространства (7) удовлетворяет системе (1), то m-тая компонента этой функции будет удовлетворять уравнению свертки с характеристической функцией $L(\mu)$ и

$$P_m(z, f, \varphi, C) = P(z, f_m, L, C)$$

для любого контура C, не проходящего через нули функции $L(\mu)$, где P_m — m-тая компонента вектор-функции P.

4) *Если вектор-функция f является линейной комбинацией элементарных решений системы (1) с показателями, лежащими внутри контура C, то*

$$P(z, f, \varphi, C) = f(z).$$

Доказательство. 1) Для вектор-функции f вида (9) независимость от параметра a легко выводится из свойства 3) вектор-функции ω, а для остальных вытекает из полноты этих вектор-функций.

Точки a_p выберем в компактах K_p, $p = 1, \dots, n$. Из представления вектор-функции ω ясно, что интегрировать достаточно в сколь угодно малых окрестностях указанных компактов, откуда и следует непрерывность вектор-функции P в нужной топологии.

Из представления (8) и из свойства 2) вектор-функции ω несложно вывести, что вектор-функция P является линейной комбинацией элементарных решений системы (1) с показателями, лежащих внутри контура C.

2) Если вектор-функция f пространства (7) будет решением системы (1), то, как несложно убедиться, последний член равенства пункта 3) предыдущий леммы тождественно равен нулю

1) Для вектор-функции f вида (9) независимость от параметра a легко выводится из свойства 3) вектор-функции ω, а для остальны ω.

Свойство 3) для функции $(\exp \lambda z)b$, $b \in \mathbb{C}^n$, это следует из свойства 2) функции ω и искомое утверждение вытекает из полноты линейных комбинаций экспоненциальных вектор-функций в пространстве

$$\prod_{p=1}^{n} H(K_p).$$

4) Пусть

$$a_p \in \operatorname{conv} \bigcup_{j=1}^{n} \left(R_j + K_p^j\right), \quad a_p' \in K_p, \quad a_p'' \in R_p.$$

Из свойства 3)

Это следует из предыдущего свойства и свойства 12) интерполирующей функции монографии [16] (стр. 248). □

4. Суммирование ряда элементарных решений

1. Нам понадобится следующий результат.

Лемма 6. *Пусть $g(\mu, \lambda), L(\mu)$ целые функции, имеющие оценки:*

$$|g(\mu, \lambda)| \leqslant c_1(\varepsilon_1)c_2(\varepsilon_2) \exp\left[H(\arg\lambda) + \varepsilon\right]|\lambda| + \left[h(-\arg\mu, K) + \varepsilon_1\right]|\mu|,$$

$$|L(\mu)| \geq c_2(\varepsilon_2) \exp\left[h(-\arg\mu, B) - \varepsilon_2\right]|\mu|, \ |\mu| = r_p, \tag{14}$$

где $r_p \nearrow \infty$, $H(\theta)$ — опорная функция некоторого компакта, B, K — выпуклые компакты. Предположим, что $g(\mu, \mu) = \alpha L(\mu), \alpha \in \mathbb{C}$. Определим функцию $\Phi_p(\lambda, z)$ по формуле:

$$\Phi_p(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi p} \int_{|z| = r_p} \frac{g(\lambda, \mu) - \alpha L(\mu)}{(\lambda - \mu)L(\mu)} e^{\mu z} d\mu - \alpha e^{\lambda z}.$$

Тогда для точки $z \in (\operatorname{int} K) \stackrel{*}{-} B$ *имеет место оценка*

$$|\Phi_p(\lambda, z)| \leqslant c(\varepsilon) A(\varepsilon_1) r_k e^{(\delta-2\varepsilon_1) r_p} e^{[H(\arg\lambda)+\varepsilon]|\lambda|},$$

где $\delta = \rho(z, \partial(K \stackrel{*}{-} B))$.

Этот результат можно получить небольшим усложнением доказательства аналогичной леммы в монографии [16] (стр. 301–306).

Теорема 1. *Пусть для функции* $L(\mu)$ *выполняется оценка* (14), *и*

$$C_j = \{|z| = r_j\}, \ j \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой вектор-функции

$$f \in \prod_{p=1}^{n} H(B_p)$$

имеем соотношение

$$\lim_{j\to\infty} P(z, f, \varphi, C_j) = f(z) \tag{15}$$

в топологии пространства

$$\prod_{m=1}^{n} H((\operatorname{int} B) \stackrel{*}{-} B^m).$$

Если же

$$f \in \prod_{p=1}^{n} H(U_p),$$

где области U_p *содержат компакты* $B_p, p = 1, \ldots, n$, *и вектор-функция* f *удовлетворяет системе* (1), *то соотношение* (15) *будет иметь место в топологии пространства*

$$\prod_{m=1}^{n} H((U, \varphi, B)_m).$$

Доказательство. В силу линейности оператора P, первую половину теоремы достаточно доказать для функций, у которых только одна компонента, скажем, первая, отлична от нуля.

Пусть $f(z) = (\exp(\lambda z), 0, \ldots, 0)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. По второму свойству функции ω

$$P_m(z, f, \varphi, C_p) = \frac{1}{2\pi p} \int_{C_p} \frac{g_1^m(\mu, \lambda) - \delta_{m1} L(\mu)}{(\lambda - \mu) L(\mu)} e^{\mu z} d\mu.$$

Для функции $g_1^m(\mu, \lambda)$ имеет место оценка (10) и соотношение (11), поэтому из леммы 17 и леммы 5.1 книги [11] вытекает искомое утверждение. Пусть теперь вектор-функция

$$f \in \prod_{p=1}^{n} H(U_p)$$

удовлетворяет системе (1) и $B^1, \ldots, B^n$ — набор выпуклых компактов, для которых выполняются включения (2).

Можно считать, что между соседними окружностями нулями $\{|\mu| = r_p\}$ и $\{|\mu| = r_{p+1}\}$ у функции $L(\mu)$ имеются нули. Рассуждая как в монографии [17] (см. стр. 240–241), найдем целые функции экспоненциального типа $\psi^j(\mu)$ с индикатрисами роста $h(-\theta, B^j)$, $j = 1, \ldots, n$, что для $|\mu| = r_p$ имеет место оценка

$$|\psi^j(\mu)| \geq c(\varepsilon) \exp\left\{\left[h(-\arg\mu, B^j) - \varepsilon\right]|\mu|\right\}.$$

Обозначим через $\psi(\mu)$ диагональную матрицу с компонентами $\psi(\mu)$. В силу условия на компакты B^j и свойства 4) функции P заключаем:

$$P(z, f, \varphi, C_p) = P(z, f, \psi\varphi, C_p).$$

Применим теперь доказанную часть теоремы к вектор-функции f и матрице $\psi(\mu)\varphi(\mu)$. Компакт B заменится компактом $B+\sum_{j=1}^{m} B^j$, компакты K_p^j — на $K_p^j+\sum_{m\neq p} B^m$. Имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{int}\left(B+\sum_{j=1}^{m} B^j\right) \overset{*}{-} \bigcup_{p=1}^{n}\left(K_p^m+\sum_{m\neq p} B^m\right) =$$

$$\bigcap_{p=1}^{n}\left[\operatorname{int}\left(B+\sum_{j=1}^{m} B^j\right) \overset{*}{-} \left(K_p^m+\sum_{m\neq p} B^m\right)\right] \supset$$

$$\bigcap_{p=1}^{n}\left[\left(B+\operatorname{int} B^p+\sum_{j=1}^{m} B^j\right) \overset{*}{-} \left(K_p^m+\sum_{m\neq p} B^m\right)\right] =$$

$$\bigcap_{p=1}^{n}\left[(B+\operatorname{int} B^p) \overset{*}{-} K_p^m\right],$$

ибо, как легко видеть, для любых множеств A_1 и A_2 выполняется включение:

$$\operatorname{int}(A_1+A_2) \supset A_1+\operatorname{int} A_2.$$

Итак, соотношение (15) выполняется в нужной топологии. Теорема доказана. □

Замечание 1. Область сходимости последовательности $P(z,f,\varphi,C_p)$ будет максимально возможной, если будут выполнены равенства

$$B_p+K^p=B,\ p=1,\dots,n.$$

В этом случае для любой вектор-функции

$$f\in\prod_{p=1}^{n} H(B_p)$$

соотношение (15) будет выполнено в топологии пространства

$$\prod_{p=1}^{n} H(\operatorname{int} B_p),$$

в пространстве же

$$\prod_{p=1}^{n} H(B_p),$$

линейные комбинации элементарных решений системы (1) будут уже не полны, ибо предельные вектор-функции таких комбинаций, как несложно показать, будут удовлетворять данной системе.

Предложение 1. *Пусть в условиях теоремы 1 имеют место равенства* $B_p+K^p=B$, $U_p=B_p+O$, *где* O *— область, содержащая начало координат, и вектор-функция*

$$f\in\prod_{p=1}^{n} H(U_p)$$

удовлетворяет системе (1).

Тогда последовательность (15) *будет сходится в топологии пространства*

$$\prod_{p=1}^{n} H(U_p).$$

Доказательство. Действительно, из первого пункта леммы 2 и первых двух пунктов леммы 3 следует равенство

$$(U, \varphi, B) = U_p,$$

и искомое вытекает из теоремы 1. □

Замечание 2. Условия $B_p + K^p = B,\ p = 1, \ldots, n$, выполняются, если

$$\sum_{p=1}^{n} B_p = B.$$

Это, например, будет так, если $\varphi_p^p(\mu)$ — функции вполне регулярного роста и $\operatorname{int} B_p^p \supset B_p^j$, $p, j = 1, \ldots, n,\ p \neq j$.

2. Приведем теперь примеры, показывающие точность теоремы.

Положим

$$\varphi_1^1(\mu) = \frac{\sin\mu \sin i\mu}{\mu^2}, \qquad \varphi_1^2(\mu) = \cos\mu \cos i\mu.$$

Сопряженной диаграммой этих функций будет квадрат M с вершинами в точках $\pm 1 \pm i$.

Пусть U — открытый квадрат с вершинами в точках $\pm 2 \pm 2i$. Как несложно показать, для точек $z \in U$ выполняется соотношение:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi p} \int\limits_{|\mu| = (j+\frac{1}{4})\pi} \frac{e^{z\mu} d\mu}{\varphi_1^1(\mu)\varphi_1^2(\mu)} = 0.$$

Применяя вычеты, для тех же z и некоторых ненулевых чисел $a_j^1, a_j^2, b_j^1, b_j^2 \in \mathbb{C},\ j = 1, 2, \ldots$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j^1 e^{\lambda_j z} + a_j^2 e^{-\lambda_j z}) + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j^1 e^{\mu_j z} + b_j^2 e^{-\mu_j z}) = 0, \tag{16}$$

где λ_j — нули функции $\varphi_1^1(\mu)$, μ_j — нули функции $\varphi_1^2(\mu)$. Сумму первого ряда обозначим через $f_1(z)$. Так как для экспонент этого ряда существует биортогональная система (см. [11]), то эта функция отлична от тождественного нуля.

Для произвольной целой функции экспоненциального типа $L(\mu)$ с сопряженной диаграммой $B,\ B \subset \overline{U}$, найдутся целые функции экспоненциального типа $\varphi_2^1(\mu)$ и $\varphi_2^2(\mu)$, сопряженные диаграммы которых содержатся в квадрате M, что

$$L(\mu) = \varphi_1^1(\mu)\varphi_2^2(\mu) - \varphi_1^2(\mu)\varphi_2^1(\mu)$$

(см. [18], стр. 259–260).

Пусть $S_p^k \in H^*(\mathbb{C})$ — линейные непрерывные функционалы, преобразование Лапласа которых совпадает соответственно с функциями $\varphi_p^k, p, k = 1, 2$. Соотношение (16) влечет равенства:

$$S_1^1 * f_1 = S_1^2 * f_1 = 0.$$

Положив $U_p = U, p = 1, 2$, получим систему уравнений свертки с характеристической матрицей φ, для которой

$$\det \varphi(\mu) = L(\mu),\ B_1 = M,\ B_2 \subset M,\ K^1 = B_2,\ K^2 = B_1,$$

а функция $f = (f_1, 0) \in H(U_1) \times H(U_2)$ удовлетворяет этой системе.

Пример 1. Предположим, что $B \subset U$, функция $L(\mu)$ имеет вполне регулярный рост и
$$\langle T, f_1 \rangle \neq 0,$$
где $T \in H^*(\mathbb{C})$ — линейный непрерывный функционал, преобразование Лапласа которого совпадает с функцией $L(\mu)$. Для некоторой последовательности чисел $\{r_p \in \mathbb{R} : p \in \mathbb{N}\}$, будет выполняться оценка (14).

По лемме 3 имеем:
$$(U, \varphi, B)_1 = \bigcap_{j=1}^{2} \left\{ \left[B + \bigcap_{m=1}^{2} \left(U \stackrel{*}{-} B_m^j \right) \right] \stackrel{*}{-} K_j^1 \right\} =$$
$$(B + \operatorname{int} M) \stackrel{*}{-} M = \operatorname{int} B,$$
и, согласно теореме 1, последовательность
$$P_1(z, f, \varphi, C_k),$$
для некоторой системы окружностей $C_k,\ k \in \mathbb{N}$, будет сходится к функции $f_1(z)$ в топологии пространства $H(\operatorname{int} B)$. В пространстве же $H(B)$ эту функцию нельзя аппроксимировать даже линейными комбинациями элементарных решений нашей системы, ибо они аннулируются функционалом T (пятое свойство функции P).

Для следующего примера положим $B = \overline{U}$. Если функция $L(\mu)$ имеет оценку (14), то по теореме 1 для любой вектор-функции
$$g \in \prod_{p=1}^{2} H(U_p),$$
удовлетворяющей системе (1), последовательность $P(z, g, \varphi, C_k)$ будет сходится к этой вектор-функции в топологии пространства
$$\prod_{p=1}^{2} H(U_p).$$
Без наличия же такой оценки система элементарных решений может не быть даже полной в классе всех решений, как показывает следующий

Пример 2. Возьмем в качестве функции $L(\mu)$ целую функцию экспоненциального типа с сопряженной диаграммой B, нули которой составляют часть нулей целой функции первого порядка минимального типа. Построение подобной функции приведено в монографии [16] (стр. 277–280). В этом случае линейные комбинации первых компонент элементарных решений нашей системы не будут аппроксимировать функцию $f_1(z)$ в топологии пространства $H(V)$ для любой области $V \subset U$, ибо в противном случае функция $f_1(z)$ удовлетворяла бы уравнению свертки с характеристической функцией минимального типа. Тогда из представления функции $f_1(z)$ следовало бы, что числа $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, являются нулями этой функции минимального типа, чего быть не может.

Эти примеры показывают, что, в отличие от скалярного случая, нельзя получить результаты о полноте элементарных решений системы (1) только в терминах сопряженных диаграмм целых экспоненциального типа, связанных с системой, а нужны некоторые условия типа оценок снизу.

Для скалярного случая имеет место теорема единственности: если у функции $L(\mu)$ бесконечно много нулей и $P(z, g, L, C) = 0$ для функции g, голоморфной в окрестности сопряженной диаграммы функции $L(\mu)$, и любого контура C, не проходящего через нули этой функции, то $g \equiv 0$ (см. [16], стр. 255). В векторном случае это уже не так даже для решений системы (1).

Пример 3. Положим $L \equiv 1$. В таком случае, очевидно, для функции $f(z) = (f_1(z), 0)$ выполняется равенство $P(z, g, L, C) = 0$ для любого контура C. Если $\psi^1(\mu), \psi^2(\mu)$ — целые функции экспоненциального типа с бесконечным числом нулей и с сопряженными диаграммами, лежащими в области $\operatorname{int} M$, то вектор-функция $f(z)$ будет удовлетворять системе уравнений свертки с характеристической матрицей $\psi(\mu)\varphi(\mu)$, определитель которой имеет бесконечное число нулей, но, по свойству 4) функции P, $P(z, f, \psi\varphi, C) = 0$ для любого контура C, не проходящего через нули функции $\psi^1(\mu)\psi^2(\mu)$.

Сравним теперь теорему 1 с теоремой 4.4 (см. [10]) — основным результатом серии статей [8]–[10] для квадратной невырожденной системы уравнений свертки.

Пример 4. Рассмотрим систему уравнений свертки в пространстве $H(U) \times H(U)$ с характеристической матрицей

$$\varphi(\mu) = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon\mu}\varphi_1^1(\mu) & 0 \\ e^{-\varepsilon\mu}\varphi_2^1(\mu) & e^{-\varepsilon\mu}\varphi_2^1(\mu) \end{pmatrix},$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Вектор-функции $(f_1, 0)$ и $(f_1, -f_1)$, очевидно, удовлетворяют однородной системе, и для нее, как несложно показать,

$$K_1^1 = B_2^2 = M + \varepsilon,\ K_2^1 = B_1^2 = \varnothing,\ K_1^2 = B_2^1 = K_2^2 = B_1^1 = M - \varepsilon,$$
$$L(\mu) = \varphi_1^1(\mu)\varphi_1^2(\mu),\ B = 2M,\ (U, \varphi, B) = (U, U),$$

и по теореме 1 для любой вектор-функции

$$g \in H(U) \times H(U),$$

удовлетворяющей рассматриваемой однородной системе, последовательность $P(z, g, \varphi, C_k)$ для некоторой последовательности окружностей будет сходится к этой вектор-функции в топологии пространства $H(U) \times H(U)$.

Пусть теперь наша система допускает (ω, ω')-оценку вдоль системы окружностей

$$\Gamma_j = \{z : |z| = r_j\},\ r_j \to \infty,$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ пара выпуклых областей комплексной плоскости, а $\omega' \subset \mathbb{C}$ компакт (см. [10], с. 48), что означает выполнение неравенств

$$\begin{gathered} -\varepsilon \operatorname{Re}\theta - \ln\left|\varphi_1^1(r_j e^{i\theta})\right| \le h(-\theta, \omega')r_j - h(-\theta, \omega_1)r_j + \varepsilon_j r_j, \\ \varepsilon \operatorname{Re}\theta - \ln\left|\varphi_2^1(r_j e^{i\theta})\right| \le h(-\theta, \omega')r_j - h(-\theta, \omega_2)r_j + \varepsilon_j r_j \end{gathered},$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$, $j \in \mathbb{N}$, а последовательность положительных чисел $\varepsilon_j, j \in \mathbb{N}$, стремится к нулю.

Но

$$\ln\left|\varphi_1^1(re^{i\theta})\right| \le h(-\theta, M)r,\ r \ge 1,\ \ln\left|\varphi_1^2(re^{i\theta})\right| \le h(-\theta, M)r,\ r \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi),$$

и из вышеприведенных неравенств получим

$$\begin{gathered} h(-\theta, \omega_1) \le h(-\theta, M) + h(-\theta, \omega') + \varepsilon \operatorname{Re}\theta \\ h(-\theta, \omega_2) \le h(-\theta, M) + h(-\theta, \omega') - \varepsilon \operatorname{Re}\theta, \end{gathered}$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$, что влечет включения

$$\omega_1 \subset M + \omega' + \varepsilon,\ \omega_2 \subset M + \omega' - \varepsilon. \tag{17}$$

Множество D в теореме 4.4 в нашем случае совпадает с компактом $(M + [-\varepsilon, \varepsilon], M - \varepsilon)$, а $G' = (U, U)$.

Теорема 4.4 гарантирует сходимость ряда элементарных решений для произвольного решения однородной системы в области (Ω_1, Ω_2), где

$$\Omega_1 = [U \stackrel{*}{-} (M + [-\varepsilon, \varepsilon] + \omega')] + \omega_1,\ \Omega_2 = [U \stackrel{*}{-} (M - \varepsilon + \omega')] + \omega_2.$$

Воспользовавшись включениями (17) и свойствами 3), 4), 10) леммы 2, несложно вывести соотношение $(\Omega_1 \subset U \overset{*}{-} [0, 2\varepsilon]$. Последнее множество содержится в области U и не совпадает с ней.

Таким образом, теорема 1 не вытекает из из теоремы 4.4 статьи [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 87, № 4. С. 459–489.
2. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 1. С. 3–30.
3. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза* // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 3. С. 331–352.
4. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез на системах выпуклых областей* // Матем. сб. 1980. Т. 111, № 1. С. 3–41.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей* // Матем. сб. 1980. Т. 111, № 3. С. 384–401.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза* // Матем. сб. 1980. Т. 112, № 1. С. 94–114.
7. Красичков-Терновский И.Ф. *Spectral synthesis on a system of unbounded domains starline in a common direction* // Analysis Mathematica. 1993. T. 19, F. 3. P. 217–223.
8. Красичков-Терновский И.Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 2. С. 25–56.
9. Красичков-Терновский И. Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 6. С. 57–98.
10. Красичков-Терновский И.Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. III* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 10. С. 25–68.
11. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
12. Ибрагимов И.И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* М.: Наука. 1971. 518 с.
13. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985. 335 с.
14. G. Köte *Duälitat in der Functionentheorie* // J. reine und angew. Math. 1953. T. 191, № 1-2. P. 30–49.
15. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
16. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
17. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* М.: Наука, 1981. 320 с.
18. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956. 632 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `msg2000@mail.ru`