ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 57-75.

УДК 517.5

БАЗИС В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе исследуется задача представления функций из инвариантного подпространства аналитических функций в выпуклой области комплексной плоскости. Получено достаточное условие существования базиса в инвариантном подпространстве, состоящего из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в этом подпространстве. Линейные комбинации строятся по системе экспоненциальных мономов, показатели которых разбиты на относительно малые группы. Применяется метод, использующий интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева. При этом дается полное описание пространства коэффициентов рядов, осуществляющих представление функций из инвариантного подпространства. Найдены также необходимые условия представления функций из произвольного инвариантного подпространства допускающего спектральный синтез в произвольной выпуклой области. Используется метод построения специальных рядов экспоненциальных многочленов, разработанный ранее автором.

Ключевые слова: Инвариантное подпространство, базис, экспоненциальный моном, целая функция, ряд экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ возрастает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$.

Пусть W — нетривиальное замкнутое подпространство в пространстве $H(D)$ функций аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах из D), инвариантное относительно оператора дифференцирования. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратный спектр этого оператора в W и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W.

Работа посвящена вопросам существования базиса в инвариантном подпространстве, состоящего из линейных комбинаций функций из $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема представления произвольной функции из W при помощи элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. В зависимости от характера представления эта проблема разделяется на несколько задач. Самый «слабый» вариант представления приводит к одной из наиболее сложных задач в этом ряду. Это – проблема спектрального синтеза, т.е. аппроксимация всех функций из W линейными комбинациями элементов $\mathcal{E}(\Lambda)$. Критерий допустимости спектрального синтеза для произвольного инвариантного подпространства в выпуклой области был получен И.Ф. Красичковым-Терновским в работе [1]. В работе [2] этот результат применяется к решению проблемы спектрального синтеза в некоторых частных случаях. Доказано, к примеру, что всякое пространство решений однородного уравнения свертки в выпуклой

O.A. Krivosheeva, Basis in a invariant subspace of analytical functions.

Поступила 27 декабря 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00029.

области допускает спектральный синтез. Кроме того установлено, что инвариантное подпространство в неограниченной выпуклой области всегда допускает спектральный синтез.

Отметим, что инвариантные подпространства $W \subset H(D)$, допускающие спектральный синтез, совпадают с подпространствами $W(\Lambda, D)$, которые являются замыканиями (в $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Если W допускает спектральный синтез, то естественно возникает желание «улучшить» аппроксимацию. Безусловно, наиболее желательным является представление любой функции $g \in W$ в виде «чистого» ряда

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad z \in D \tag{1.1}$$

который сходится равномерно на компактах из D. Эта задача носит название проблемы фундаментального принципа.

При помощи преобразования Лапласа проблема фундаментального принципа сводится к двойственной задаче кратной интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа. Исследования обеих задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Основные ее этапы отражены в работах [3] и [4]. В [4] получены решения проблемы фундаментального принципа для инвариантных подпространств допускающих спектральный синтез и задачи интерполяции для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ при одном ограничении ($m_D(\Lambda) = 0$): $n_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to 0$, $j \to \infty$ для любой подпоследовательности $\{\lambda_{k(j)}\}$, «сгущающейся» к направлению, где опорная функция H_D области D ограничена (т.е. $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to \xi$ и $H_D(\xi) < +\infty$). В работе [5] это ограничение удалось снять в случае ограниченной области. Таким образом, в ней найден критерий фундаментального принципа для инвариантного подпространства в ограниченной выпуклой области D. Он состоит из двух условий. Первое связано с локальным распределением точек спектра и означает некоторую их «отделенность» друг от друга (индекс конденсации $S_\Lambda = 0$; он определяется в следующем параграфе). Второе условие отвечает за глобальное распределение λ_k.

Если условие $S_\Lambda = 0$ нарушается, то становится невозможным представление всех функций $g \in W$ в виде ряда (1.1). В этой связи естественным образом возникла задача представления g в виде ряда (1.1) «со скобками»:

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z) \right) \tag{1.2}$$

Исследованию всех указанных задач посвящена монография А.Ф. Леонтьева [6]. В ней изложено большое количество результатов как самого автора так и его предшественников.

Желание «улучшить» представление (1.2) привело к возникновению задачи о базисе в инвариантном подпространстве, которая формулируется следующим образом. При каких условиях можно осуществить разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательности Λ на группы U_m и выбрать внутри этих групп фиксированные линейные комбинации $e_{m,j}$, $j = \overline{1, N_m}$, элементов $\mathcal{E}(\Lambda)$ так, что семейство экспоненциальных многочленов $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}\}$ становиться базисом в W. Если указанный базис существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Как осуществить разбиение U и можно ли описать все подходящие разбиения. Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации. Насколько малым можно сделать диаметр групп U_m. Наконец, как описать пространство коэффициентов рядов по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. Ответ на эти вопросы в случае ограниченной выпуклой области D получен в работах [7]–[11]. В частности, найден критерий существования базиса в подпространстве W, построенного по разбиению U на относительно малые группы U_m, т.е. группы, диаметры которых и число точек в них бесконечно малы при $m \to \infty$ по сравнению с модулями этих точек.

Таким образом, в случае ограниченной выпуклой области исследования проблемы представления функций из инвариантного подпространства можно считать законченными. Что же касается неограниченных областей, то в этой связи исследовались по большей части только два частных случая — D является плоскостью или полуплоскостью. Полное решение проблемы представления для инвариантных подпространств целых функций получено в работе [12]. Инвариантные подпространства в полуплоскости изучались в основном в случае простого положительного спектра (см. [6], [13]) и почти вещественного спектра [14].

Отметим, что в большинстве работ решение задачи представления как в случае одной переменной, так и в случае нескольких переменных (см., например, [15], [16]) сводится к решению двойственных задач специальной интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Исследование этих задач представляет собой достаточно сложный процесс. При этом двойственность задач представления и интерполяции установлена в [4] лишь при дополнительном ограничении на кратность точек λ_k: $m_D(\Lambda) = 0$. Остался не выясненным вопрос о том, будет ли сохраняться двойственность без этого ограничения. А если она все же сохраняется, то совершенно непонятно как решать соответствующую интерполяционную задачу в этом случае. В связи с этим в работе [14] для решения задачи представления был применен другой метод, позволяющий обойти решение интерполяционной задачи. Он использует интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева (см. [6], [17]). Благодаря этому для инвариантных подпространств с почти вещественным спектром удалось найти решение задачи представления в общем случае (без дополнительного ограничения на кратность точек спектра).

Настоящая работа посвящена исследованию достаточных и необходимых условий существования базиса в инвариантном подпространстве, построенного по относительно малым группам точек спектра.

Во втором параграфе (теорема 2.2) получены достаточные условия существования базиса для произвольной выпуклой области (в том числе и неограниченной). Как и в работе [14] применяется метод, использующий интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева. При этом дается полное описание пространства коэффициентов рядов, осуществляющих представление функций из инвариантного подпространства.

В третьем параграфе (теорема 3.1) получены необходимые условия существования базиса для произвольной выпуклой области и произвольного инвариантного подпространства. Используется метод построения специальных рядов экспоненциальных многочленов, разработанный в [18].

2. Достаточные условия

Прежде всего, напомним некоторые понятия и приведем некоторые факты, связанные с интерполирующей функцией А.Ф. Леонтьева.

Пусть $B(z,r)$, $S(z,r)$ — открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r. Через $n(z,r,\Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в замкнутый круг $\overline{B(z,r)}$, а через $\bar{n}(\Lambda)$ — верхнюю плотность последовательности Λ:

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(0,r,\Lambda)}{r}.$$

Если M — выпуклое множество в $\mathbb{C}$, то символом $H_M(\lambda)$ обозначается опорная функция множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(\lambda) = \sup_{w\in M} \operatorname{Re}(\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция H_M является выпуклой и положительно однородной порядка один, т.е. $tH_M(\lambda) = H_M(t\lambda)$, $t > 0$.

Пусть f — целая функция. Говорят, что f имеет экспоненциальный тип, если для некоторых $A, B \geq 0$ выполнено неравенство $\ln|f(\lambda)| \leqslant A + B|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Индикатором f

называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Она является выпуклой и положительно однородной порядка один, т.к. совпадает с опорной функцией некоторого выпуклого компакта, называемого индикаторной диаграммой f (см., напр., [19], гл. I, §5, теорема 5.4). Компакт L комплексно сопряженный к индикаторной диаграмме называется сопряженной диаграммой функции f. Таким образом,

$$h_f(\lambda) = H_L(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H^*(D)$ обозначает сильно сопряженное к $H(D)$ пространство, называемое пространством аналитических функционалов. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$. Через $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Пусть $\hat{\mu}(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$: $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(e^{\lambda z})$. Функция $\hat{\mu}(\lambda)$ является целой и имеет экспоненциальный тип. Известно (см., например, [20], гл. III, §12, теорема 12.3), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между $H^*(D)$ и P_D, где P_D — индуктивный предел банаховых пространств

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_s = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |f(\lambda)| \exp(-H_{K_s}(\lambda)) < \infty\}.$$

Здесь $K(D) = \{K_s\}_{s=1}^{\infty}$— последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая D, т.е. $K_s \subset int K_{s+1}$, $s \geq 1$, (int обозначает внутренность множества), и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$. Множество P_D состоит из тех и только тех целых функций экспоненциального типа f, сопряженные диаграммы которых лежат в области D (т.е. $h_f(\lambda) < H_D(\lambda)$, $\lambda \neq 0$).

Пусть система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. По теореме Хана-Банаха последнее равносильно существованию ненулевого функционала $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на функциях системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т.е. существованию функции $f \in P_D$ $(f = \hat{\mu})$, которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Поскольку f имеет экспоненциальный тип, то согласно известной теореме Линделефа (см., напр., [21], гл. I, §11, теорема 15) в этом случае верхняя плотность $\bar{n}(\Lambda)$ конечна.

Предположим, что имеется целая функция экспоненциального типа $f \in P_D$, обращающаяся в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Тогда в пространстве $H^*(D)$ существует (см. [17], гл. IV, §1, п.2) биортогональная к $\mathcal{E}(\Lambda)$ система функционалов $\Xi(\Lambda, D) = \{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$: $\mu_{k,n}(z^l \exp(\lambda_j z)) = 1$, если $j = k, l = n$ и $\mu_{k,n}(z^l \exp(\lambda_j z)) = 0$ в противном случае. Она строится при помощи функции f и является частью системы $\Xi(\tilde{\Lambda}, D)$, биортогональной к $\mathcal{E}(\tilde{\Lambda})$, где $\tilde{\Lambda}$ — кратное нулевое множество f. Предположим, что ряд (1.2) сходится равномерно на компактных подмножествах области D. Тогда, пользуясь непрерывностью и линейностью функционалов $\mu_{k,n}$, получаем $d_{k,n} = \mu_{k,n}(g)$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$. Таким образом, если существует указанная выше функция f, то представление рядом (1.2) обладает свойством единственности. При этом коэффициенты представления вычисляются при помощи биортогональной системы функционалов.

Пусть D — выпуклая область, $g \in H(D)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и f — целая функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма K которой содержит начало координат, а ее сдвиг $K(\alpha) = K + \alpha$ лежит в D ($K(\alpha)$ — сопряженная диаграмма $f(\lambda)\exp(\alpha\lambda)$). Интерполирующей функцией для g называется (см. [6], гл. I, §2, п.1)

$$\omega_f(\lambda, \alpha, g) = \exp(-\alpha\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \gamma(\xi) \left(\int_0^{\xi} g(\xi + \alpha - \eta) \exp(\lambda\eta) d\eta \right) d\xi,$$

где Ω — контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий компакт K и лежащий в области $D - \alpha$, $\gamma(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с f (см. [19], гл I, §5). Отметим некоторые свойства $\omega_f(\lambda, \alpha, g)$ и $\Xi(\Lambda, D)$.

1. [6], гл.I, §2, теорема 1.2.5. Пусть Ω — граница выпуклой окрестности компакта K и $\Omega(\alpha) = \Omega + \alpha \subset D$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $A(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\omega_f(\lambda, \alpha, g)| \leqslant A(\varepsilon) \exp(h_f(\lambda) + \varepsilon|\lambda| - \mathrm{Re}(\alpha\lambda)) \max_{z \in \Omega(\alpha)} |g(z)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

2. Пусть $\tilde{g} \in W(\Lambda, D)$ и $d_{k,n} = \mu_{k,n}(\tilde{g})$, где $\mu_{k,n} \in \Xi(\Lambda, D)$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_k} \frac{\omega_f(\lambda, \alpha, \tilde{g})}{f(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k - 1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad k \geq 1, \tag{2.2}$$

где S_k — окружность, внутри которой нет нулей f, отличных от λ_k. Кроме того, если λ' — нуль функции f не из числа λ_k, $k \geq 1$, и S' — окружность, внутри которой лежит λ' и нет других нулей функции f, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S'} \frac{\omega_f(\lambda, \alpha, \tilde{g})}{f(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = 0. \tag{2.3}$$

Действительно, пусть $\tilde{g}$ есть предел последовательности

$$P_l(z) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=0}^{n_k - 1} d^l_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad l \geq 1,$$

сходящейся равномерно на компактах из D. Поскольку $\tilde{g} \in W(\Lambda, D)$, то такая последовательность существует, если считать, что некоторые $d^l_{k,n}$ равны нулю. По теореме 1.2.4, §2, гл. I, книги [6] имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_k} \frac{\omega_f(\lambda, \alpha, P_l)}{f(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = \sum_{n=0}^{n_k - 1} d^l_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad k = \overline{1, l},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_k} \frac{\omega_f(\lambda, \alpha, P_l)}{f(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = 0, \quad k > l, \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S'} \frac{\omega_f(\lambda, \alpha, P_l)}{f(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = 0.$$

Пользуясь непрерывностью и линейностью функционалов из биортогональной системы, получаем (если $k > l$, то считаем $d^l_{k,n} = 0$):

$$d_{k,n} = \mu_{k,n}(\tilde{g}) = \lim_{l \to \infty} \mu_{k,n}(P_l) = \lim_{l \to \infty} d^l_{k,n}, \quad k \geq 1, n = \overline{0, n_k - 1}. \tag{2.4}$$

Из оценки (2.1) следует, что равномерно на любом компакте плоскости $\omega_f(\lambda, \alpha, P_l) \to \omega_f(\lambda, \alpha, \tilde{g})$ при $l \to \infty$. Вместе с предыдущим это дает нам требуемые равенства.

3. Пусть $\tilde{g} \in W(\Lambda, D)$ и $d_{k,n} = \mu_{k,n}(\tilde{g})$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$. Предположим, что ряд (1.2) сходится равномерно на компактах из D. Тогда $g \equiv \tilde{g}$.

Действительно, если $\mu' \in \Xi(\tilde{\Lambda}, D) \setminus \Xi(\Lambda, D)$, то $\mu'(g) = \mu'(\tilde{g}) = \mu'(P_l)$. Отсюда с учетом (2.4) по теореме единственности (см. [6], гл.II, §1, теорема 2.1.2) получаем нужное тождество.

Пусть D — неограниченная выпуклая область. Положим

$$J(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : H_D(\lambda) = +\infty\}.$$

Поскольку H_D — выпуклая и положительно однородная функция, то множество $\mathbb{C} \setminus J(D)$ является выпуклым конусом. Следовательно, возможны лишь следующие четыре случая: $\mathbb{C} \setminus J(D)$ — точка, луч, прямая или угол раствора не больше чем π. Если $D = \mathbb{C}$, то $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В случае когда D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi}) < a\}$, множество $J(D)$ представляет из себя плоскость с разрезом по лучу $\{\lambda = te^{i\varphi} : t \geq 0\}$. Если же D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi}) < a, \mathrm{Re}(ze^{i(\varphi+\pi)}) < b\}$, то $J(D)$ — две полуплоскости с общей граничной прямой $\{\lambda = te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$. В остальных случаях область D не содержит ни одной прямой. Однако D всегда содержит некоторый луч $\{z = z_0 + te^{i\varphi}, t \geq 0\}$. При этом множество $J(D)$ является углом раствора строго меньше 2π и содержит открытый угол раствора π — полуплоскость $\{\lambda = te^{i\psi} : -\varphi - \pi/2 < \psi < -\varphi + \pi/2, t > 0\}$.

Отметим еще, что в силу выпуклости функция H_D является непрерывной вне замыкания множества $J(D)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Символом $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ обозначим разбиение последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на группы U_m, $m = 1, 2, \ldots$ Сделаем перенумерацию членов Λ.

Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Здесь первый индекс m совпадает с номером группы, а второй – меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек λ_k, попавших в группу U_m. Пусть N_m — число точек λ_k, попавших в группу U_m, $m = 1, 2, \ldots$, с учетом их кратности, т.е. $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$.

Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим совокупность пределов всех сходящихся последовательностей вида $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$. Множество $\Theta(\Lambda)$ является замкнутым и лежит на единичной окружности с центром в нуле.

Лемма 2.1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, и $\Theta(\Lambda)$ не пересекает границу множества $J(D)$. Предположим, что для каждого выпуклого компакта $K_0 \subset D$, любого $\delta_0 > 0$ и любой подпоследовательности $\{U_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ такой, что $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится, существуют функция $f \in P_D$, последовательность контуров $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ и номер l_0, обладающие следующими свойствами:*

1) f обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, с кратностью не меньшей чем n_k;

2) для всех $l \geq l_0$ внутри контура γ_l лежат все точки группы U_{m_l}, и нет точек λ_k, отличных от $\lambda_{m_l,v}$, $v = \overline{1, M_{m_l}}$;

3) $\ln|f(\lambda)| \geq H_{K_0}(\lambda)$, $\lambda \in \gamma_l$, $l \geq l_0$;

4) $\mathrm{d}(\gamma_l) \leqslant \delta_0|\lambda_{m_l,1}|$, $l \geq l_0$, где $\mathrm{d}(\gamma_l)$ — диаметр контура γ_l;

5) $\rho(\gamma_l) \leqslant |\lambda_{m_l,1}|^2$, $l \geq l_0$, где $\rho(\gamma_l)$ — длина контура γ_l.

Тогда каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} c_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v} z) \right), \quad z \in D. \tag{2.5}$$

При этом для каждого выпуклого компакта $K \subset D$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \max_{z \in K} \left| \sum_{v=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} c_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v} z) \right| < +\infty. \tag{2.6}$$

В частности, ряд (по m) сходится абсолютно и равномерно на компактах в области D.

Доказательство. По условию $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда $\bar{n}(\Lambda) < +\infty$ и в $H^*(D)$ существует система функционалов $\Xi(\Lambda, D) = \{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ биортогональная к $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Пусть $g \in W(\Lambda, D)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} c_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v} z) \right), \quad z \in D,$$

где $c_{m,v,n} = \mu_{k,n}(g)$, если $\lambda_{m,v} = \lambda_k$. Пусть K — выпуклый компакт в D. Предположим, что ряд (2.6) расходится. Тогда существует последовательность вложенных друг в друга отрезков $[\varphi_{1,j}, \varphi_{2,j}]$, $j \geq 1$, с длинами, стремящимися к нулю, такая, что

$$\sum_{m \in Q(j)} \max_{z \in K} \left| \sum_{v=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} c_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v} z) \right| = +\infty, \quad j \geq 1, \tag{2.7}$$

где $Q(j)$ — последовательность всех индексов m, для которых точка $\lambda_{m,1}$ лежит в угле $\Theta_j = \{te^{i\varphi} : \varphi \in [\varphi_{1,j}, \varphi_{2,j}], t \geq 0\}$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность

$\{U_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ такая, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \max_{z\in K} \left| \sum_{v=1}^{M_{m_l}} \sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1} c_{m_l,v,n} z^n \exp(\lambda_{m_l,v} z) \right| = +\infty, \tag{2.8}$$

и для каждого $j \geq 1$ при некотором номере $l(j)$ верно включение $\lambda_{m_l,1} \in \Theta_j$, $l \geq l(j)$. Последнее означает, что $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к числу $e^{i\varphi_0}$, где φ_0 — общая точка всех отрезков $[\varphi_{1,j}, \varphi_{2,j},]$, $j \geq 1$. Рассмотрим два случая.

1) $H_D(e^{i\varphi_0}) < +\infty$ ($e^{i\varphi_0} \notin J(D)$). Поскольку K — компакт в D, то существует $\beta > 0$ такое, что

$$H_K(\lambda) + 2\beta|\lambda| \leqslant H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

По условию $J(D) \cup \{0\}$ — замкнутое множество. Следовательно, функция H_D непрерывна в окрестности точки $e^{i\varphi_0}$. Поэтому найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что

$$|H_D(e^{i\varphi_0}) - H_D(\lambda)| < \beta/6, \quad \lambda \in B(e^{i\varphi_0}, \delta). \tag{2.10}$$

Кроме того, можно считать, что для некоторого компакта $K_0 \subset D$ выполнено неравенство

$$H_{K_0}(\lambda) + \beta|\lambda|/6 \geq H_D(\lambda), \quad \lambda \in B(e^{i\varphi_0}, \delta). \tag{2.11}$$

Выберем $\delta_0(0, \delta/2)$ такое, что

$$\max_{z\in K} \max_{\mu\in\Delta} \delta_0 |z-\mu| < \beta/6, \tag{2.12}$$

где Δ — треугольник, задаваемый следующим образом:

$$\Delta = \{z : \mathrm{Re}(zw_1) \leqslant H_D(w_1)\} \cap \{z : \mathrm{Re}(zw_2) \leqslant H_D(w_2)\} \cap \{z : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi_0}) \geq H_{K_0}(e^{i\varphi_0})\},$$

и w_1, w_2 — точки пересечения окружности $S(e^{i\varphi_0}, \delta/2)$ с единичной окружностью с центром в нуле.

По условию леммы существуют функция $f \in P_D$, последовательность контуров $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ и номер l_0, обладающие свойствами 1)-4). Символом L обозначим сопряженную диаграмму функции f. По определению пространства P_D компакт L лежит в области D.

Пусть z_0 — какая-нибудь точка компакта L, для которой выполнено равенство (таких точек либо одна, либо целый отрезок на границе компакта L)

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) = H_L(e^{i\varphi_0}).$$

Из пункта 3) леммы следует, что

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) = H_L(e^{i\varphi_0}) \geq H_{K_0}(e^{i\varphi_0}). \tag{2.13}$$

Поскольку $z_0 \in L \subset D$, то

$$\mathrm{Re}(z_0 w_1) < H_D(w_1), \quad \mathrm{Re}(z_0 w_2) < H_D(w_2).$$

Таким образом, точка z_0 принадлежит треугольнику Δ.

Рассмотрим функцию $f_0(\lambda) = \exp(-z_0\lambda)$. Ее сопряженной диаграммой является компакт $L - z_0$, который содержит начало координат. Положим $\alpha = z_0$. Сдвиг компакта $L - z_0$ на вектор α совпадает с L и лежит в области D. Тогда, используя вычеты, равенства (2.2), (2.3) и пункты 1), 2) леммы, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{\omega_{f_0}(\lambda, \alpha, g)}{f_0(\lambda)} \exp(\lambda z) d\lambda = \sum_{v=1}^{M_{m_l}} \sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1} c_{m_l,v,n} z^n \exp(\lambda_{m_l,v} z), \quad l \geq l_0. \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу неравенства (2.1) имеем (Ω — граница выпуклой окрестности компакта L, лежащая в D):

$$|\omega_{f_0}(\lambda, \alpha, g)| \leqslant A(\beta) \exp(h_{f_0}(\lambda) + \beta|\lambda|/6 - \mathrm{Re}(\alpha\lambda)) \max_{z\in\Omega} |g(z)| =$$

$$= A \exp(H_L(\lambda) - \mathrm{Re}(z_0\lambda) + \beta|\lambda|/6 - \mathrm{Re}(\alpha\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отсюда с учетом пунктов 3) и 5) леммы получаем (при $l \geq l_0$):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}\frac{\omega_{f_0}(\lambda,\alpha,g)}{f_0(\lambda)}\exp(\lambda z)d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_{m_l,1}|^2 A\exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}\left(H_L(\lambda)-\mathrm{Re}(z_0\lambda)-H_{K_0}(\lambda)+\mathrm{Re}(z_0\lambda)+\beta|\lambda|/6+\mathrm{Re}((z-\alpha)\lambda)\right)\right)=$$
$$=\delta_0|\lambda_{m_l,1}|A\exp(\max_{\lambda\in\gamma_l}(H_L(\lambda)-H_{K_0}(\lambda)+\beta|\lambda|/6+\mathrm{Re}((z-\alpha)\lambda))),\quad z\in K. \tag{2.15}$$

Согласно пунктам 2) и 4) леммы контур γ_l лежит в круге $B(\lambda_{m_l,1},\delta_0|\lambda_{m_l,1}|)$, $l \geq l_0$. Поскольку последовательность $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$ и $\delta_0<\delta$, то найдется номер $l_1 \geq l_0$ такой, что верны вложения $\gamma_l \subset B(\lambda_{m_l,1},\delta_0|\lambda_{m_l,1}|) \subset B(|\lambda_{m_l,1}|e^{i\gamma_0},\delta_0|\lambda_{m_l,1}|)$, $l \geq l_1$. Отсюда с учетом неравенства (2.10), положительной однородности опорной функции, а также включения $L \subset D$ получаем:

$$H_L(\lambda)-H_{K_0}(\lambda) < H_D(\lambda)-H_D(\lambda)+\beta|\lambda|/6=\beta|\lambda|/6,\quad \lambda\in\gamma_l,\quad l\geq l_1.$$

Следовательно, в силу (2.15) и (2.14) имеем ($\alpha=z_0$):

$$\left|\sum_{v=1}^{M_{m_l}}\sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1}c_{m_l,v,n}z^n\exp(\lambda_{m_l,v}z)\right| \leqslant \delta_0|\lambda_{m_l,1}|A\exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}(\beta|\lambda|/3+\mathrm{Re}((z-\alpha)\lambda))\right)\leqslant$$

$$\leqslant \delta_0|\lambda_{m_l,1}|A\exp\left(\max_{\lambda_{m_l,1}+\xi\in\gamma_l}\left(\frac{\beta|\lambda_{m_l,1}|}{3}+\frac{\beta|\xi|}{3}+\mathrm{Re}((z-z_0)\lambda_{m_l,1})+\mathrm{Re}((z-z_0)\xi)\right)\right).$$

для всех $z\in K$ и $l \geq l_1$. Выберем номер $l_2 \geq l_1$ такой, что

$$|\lambda_{m_l,1}|^2 A \leqslant \exp(\beta|\lambda_{m_l,1}|/7),\quad l\geq l_2. \tag{2.16}$$

Согласно пункту 4) леммы $|\xi| \leqslant \delta_0|\lambda_{m_l,1}|$, где $\lambda_{m_l,1}+\xi\in\gamma_l$, $l\geq l_2$. Тогда, учитывая предыдущее неравенство, включение $z_0\in\Delta$, (2.12) и то, что $\delta_0<\delta/2<1/2$, получаем

$$\max_{z\in K}\left|\sum_{v=1}^{M_{m_l}}\sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1}c_{m_l,v,n}z^n\exp(\lambda_{m_l,v}z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \max_{z\in K}\left(\exp\left(\frac{\beta|\lambda_{m_l,1}|(1+\delta_0)}{3}+\mathrm{Re}((z-z_0)\lambda_{m_l,1})+\frac{\beta}{7}|\lambda_{m_l,1}|+\frac{\beta}{6}|\lambda_{m_l,1}|\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{2\beta|\lambda_{m_l,1}|}{3}+H_K(\lambda_{m_l,1})-\mathrm{Re}(z_0\lambda_{m_l,1})+\frac{\beta}{7}|\lambda_{m_l,1}|\right),\quad l\geq l_2.$$

Поскольку последовательность $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$, то пользуясь непрерывностью и положительной однородностью опорной функции компакта, найдем номер $l_3 \geq l_2$ такой, что

$$H_K(\lambda_{m_l,1})-\mathrm{Re}(z_0\lambda_{m_l,1})+\frac{\beta}{7}|\lambda_{m_l,1}| = |\lambda_{m_l,1}|\left(H_K\left(\frac{\lambda_{m_l,1}}{|\lambda_{m_l,1}|}\right)-\mathrm{Re}\left(z_0\frac{\lambda_{m_l,1}}{|\lambda_{m_l,1}|}\right)+\frac{\beta}{7}\right)\leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_{m_l,1}|(H_K(e^{i\varphi_0})-\mathrm{Re}(z_0e^{i\varphi_0})+\frac{\beta}{6}),\quad l\geq l_3.$$

Отсюда с учетом предыдущего неравенства и (2.13), (2.11), (2.9) получаем:

$$\max_{z\in K}\left|\sum_{v=1}^{M_{m_l}}\sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1}c_{m_l,v,n}z^n\exp(\lambda_{m_l,v}z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{5\beta|\lambda_{m_l,1}|}{6}+|\lambda_{m_l,1}|(H_K(e^{i\varphi_0})-\mathrm{Re}(z_0e^{i\varphi_0}))\right)\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{5\beta|\lambda_{m_l,1}|}{6} + |\lambda_{m_l,1}|(H_K(e^{i\varphi_0}) - H_{K_0}(e^{i\varphi_0}))\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{5\beta|\lambda_{m_l,1}|}{6} + |\lambda_{m_l,1}|\left(H_D(e^{i\varphi_0}) - 2\beta - H_D(e^{i\varphi_0}) + \frac{\beta}{6}\right)\right) = \exp(-\beta|\lambda_{m_l,1}|),$$

где $l \geq l_3$. Поскольку Λ имеет конечную верхнюю плотность, то ряд $\sum \exp(-\beta|\lambda_{m_l,1}|)$ сходится. Это противоречит (2.8). Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место (2.6). Следовательно, ряд (2.5) сходится абсолютно и равномерно на компактах в области D. Поскольку $c_{m,v,n} = \mu_{k,n}(g)$ (если $\lambda_{m,v} = \lambda_k$), то согласно свойству 3 (из тех, что отмечены перед леммой) равенство (2.5) имеет место.

2) $H_D(e^{i\varphi_0}) = +\infty$ ($e^{i\varphi_0} \in J(D)$). По условию $e^{i\varphi_0} \notin \partial J(D)$. Тогда существует $\delta \in (0,1)$ такое, что

$$H_D(\lambda) = +\infty, \quad \lambda \in B(e^{i\varphi_0}, \delta). \tag{2.17}$$

Пусть $\delta_0 \in (0, \delta/2) \cap (0, 2/5)$ и $K_0 = K$. По условию леммы существуют функция $f \in P_D$, последовательность контуров $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ и номер l_0, обладающие свойствами 1)-4). Символом L обозначим сопряженную диаграмму функции f. По определению пространства P_D компакт L лежит в области D. Пусть $z_0 \in L$. Рассмотрим функцию $f_0(\lambda) = \exp(-z_0\lambda)$. Ее сопряженной диаграммой является компакт $L - z_0$, который содержит начало координат.

В силу (2.17) и сказанного выше (перед леммой) относительно множества $J(D)$ найдется ψ_0 такое, что угол

$$\Gamma = \{\lambda = te^{i\psi} : -\psi_0 - \pi/2 < \psi < -\psi_0 + \pi/2, t > 0\}$$

лежит в $J(D)$ и содержит замыкание круга $B(e^{i\varphi_0}, 2\delta_0)$. Рассмотрим компакты $L(t) = L + te^{i\psi_0}$, $t > 0$. Для каждого $z \in L$ и $t > 0$ имеем:

$$\mathrm{Re}\left((z + te^{i\psi_0})\lambda\right) = \mathrm{Re}(z\lambda) + t\mathrm{Re}(e^{i\psi_0}\lambda) \leqslant \mathrm{Re}(z\lambda) \leqslant H_L(\lambda) < H_D(\lambda), \quad \lambda \notin \Gamma \cup \{0\},$$

$$\mathrm{Re}\left((z + te^{i\psi_0})\lambda\right) < +\infty = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma.$$

Следовательно, $H_{L(t)}(\lambda) < H_D(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, т.е. $L(t) \subset D$, $t > 0$.

Пусть $\beta > 0$. Поскольку замыкание круга $B(e^{i\varphi_0}, 2\delta_0)$ лежит в Γ, то найдется $t_0 > 0$ такое, что верно неравенство

$$t_0\mathrm{Re}(e^{i\psi_0}\lambda) > H_L(\lambda) - \mathrm{Re}(z_0\lambda) + 2\beta|\lambda|, \quad \lambda \in B(e^{i\varphi_0}, 2\delta_0). \tag{2.18}$$

Положим $\alpha = z_0 + t_0e^{i\psi_0}$. Тогда имеют место соотношения (2.14) и (2.15). Из этих соотношений с учетом (2.16) и выбора компакта K_0 получаем:

$$\left|\sum_{v=1}^{M_{m_l}} \sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1} c_{m_l,v,n} z^n \exp(\lambda_{m_l,v} z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_{m_l,1}|^2 A \exp\left(\max_{\lambda \in \gamma_l} \left(H_L(\lambda) - H_{K_0}(\lambda) + \beta|\lambda|/6 + \mathrm{Re}((z-\alpha)\lambda)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\max_{\lambda \in \gamma_l} \left(H_L(\lambda) - H_K(\lambda) + \beta|\lambda|/3 + \mathrm{Re}((z-\alpha)\lambda)\right)\right), \quad l \geq l'.$$

Поскольку последовательность $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$, то в силу (2.18) и положительной однородности опорной функции найдется номер $l" \geq l'$ такой, что

$$t_0\mathrm{Re}(e^{i\psi_0}\lambda) > H_L(\lambda) - \mathrm{Re}(z_0\lambda) + 2\beta|\lambda|, \quad \lambda \in \gamma_l, \quad l \geq l".$$

Отсюда и из предыдущего неравенства с учетом пунктов 2), 4) леммы и того, что $\delta_0 < 2/5$ имеем:

$$\max_{z \in K}\left|\sum_{v=1}^{M_{m_l}} \sum_{n=0}^{n_{m_l,v}-1} c_{m_l,v,n} z^n \exp(\lambda_{m_l,v} z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}(H_L(\lambda)-H_K(\lambda)+\beta|\lambda|/3+H_K(\lambda)-\mathrm{Re}(\alpha\lambda))\right)\leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}(H_L(\lambda)+\beta|\lambda|/3-\mathrm{Re}((z_0+t_0e^{i\psi_0})\lambda))\right)\leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}(H_L(\lambda)+\beta|\lambda|/3-\mathrm{Re}(z_0\lambda)-H_L(\lambda)+\mathrm{Re}(z_0\lambda)-2\beta|\lambda|)\right)\leqslant$$
$$=\exp\left(\max_{\lambda\in\gamma_l}\left(-\frac{5\beta|\lambda|}{3}\right)\right)\leqslant \exp\left(-\frac{5\beta|\lambda_{m_l,1}|}{3}+\frac{5\beta\delta_0|\lambda_{m_l,1}|}{3}\right)\leqslant \exp(-\beta|\lambda_{m_l,1}|).$$

Как и в первом случае это противоречит (2.8). Таким образом, верно (2.5) и (2.6). Лемма полностью доказана.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ разбита на группы $U=\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m=\{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$. Будем говорить, что U_m, $m\geq 1$, — группы относительно малого диаметра, если

$$\lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}-\lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|}=0.$$

Заметим, что числа $\lambda_{m,1}$ здесь можно заменить любыми другими представителями $\lambda_{m,j}$ групп U_m. Это сразу следует из соотношения

$$\lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|}\leqslant \lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}-\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|}+\lim_{m\to\infty}\frac{|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|}=1.$$

Будем также говорить, что группы U_m относительно малы, если они являются группами относительно малого диаметра и верно равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|}=0.$$

Следуя работе [8], по системе $\mathcal{E}(\Lambda)=\{z^n\exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ построим систему функций $\mathcal{E}(\Lambda,U)=\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Пусть γ_m — контур, охватывающий точки группы U_m, и

$$\omega_m(\lambda)=\prod_{l=1}^{M_m}(\lambda-\lambda_{m,l})^{n_{m,l}},\quad m\geq 1.$$

Положим

$$P_m(\lambda,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_m}\frac{\exp(z\zeta)(\omega_m(\zeta)-\omega_m(\lambda))}{(\zeta-\lambda)\omega_m(\zeta)}d\zeta,\quad m\geq 1.$$

Эта формула определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше N_m-1, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l}-1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $\exp(z\lambda)$ и ее производных, т.е.

$$P_m^{(n)}(\lambda_{m,l},f)=z^n\exp(\lambda_{m,l}z),\quad l=1,2,\ldots,M_m,\quad n=0,1,\ldots,n_{m,l}-1.$$

Разложим $P_m(\lambda,z)$ по степеням $(\lambda-\lambda_{m,1})$. Имеем:

$$P_m(\lambda,z)=\sum_{j=0}^{N_m-1}p_{m,j}(z)\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

Положим $e_{m,j}(z)=p_{m,j}(z)$, $m\geq 1$, $j=\overline{1,N_m}$. Таким образом, функция $e_{m,j}(z)$ совпадает с $(j-1)$-й производной многочлена $P_m(\lambda,z)$, вычисленной в точке $\lambda_{m,1}$. Согласно интегральной формуле Коши имеем:

$$e_{m,j}(z)=\sum_{l=1}^{M_m}\sum_{n=0}^{n_{m,l}-1}c_{m,j,l,n}z^n\exp(\lambda_{m,l}z)=\frac{(j-1)!}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1}\frac{P_m(\lambda,z)d\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^j},$$

$$m \geq 1, \quad j = \overline{1, N_m}.$$

Рассмотрим ряд по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} c_{m,j} e_{m,j}(z). \tag{2.19}$$

Последовательность его коэффициентов обозначим $c = \{c_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$.

Пусть D — выпуклая область, $K(D) = \{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая D, и Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$. Для каждого $s = 1, 2, ldots$ введем банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_s(D, \Lambda, U) = \{c = \{c_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} : \|c\|_s = \sup_{m,j} \left(|c_{m,j}| \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}))\right) < \infty\}.$$

Через $Q(D, \Lambda, U)$ обозначим проективный предел пространств $Q_s(D, \Lambda, U)$.

Определим оператор $\mathcal{B}$, действующий на пространстве $Q(D, \Lambda, U)$, со значениями в $W(\Lambda, D)$ по правилу: последовательности $c = \{c_{m,j}\} \in Q(D, \Lambda, U)$ поставим в соответствие сумму $g(z)$ ряда (2.19), если он сходится в топологии пространства $H(D)$.

Для выпуклой области D положим

$$D(\Theta(\Lambda)) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z\lambda) < H_D(\lambda), \lambda \in \Theta(\Lambda)\}.$$

Множество $D(\Theta(\Lambda))$, очевидно, также является выпуклой областью и содержит D. При этом верно равенство

$$H_D(\lambda) = H_{D(\Theta(\Lambda))}(\lambda), \quad \lambda \in \Theta(\Lambda).$$

Как нетрудно заметить, отсюда следует, что пространства $Q(D, \Lambda, U)$ и $Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$ совпадают.

Теорема 2.2. *Предположим, что в условиях леммы 2.1 группы U_m, $m \geq 1$, относительно малы. Тогда каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (2.19), сумма которого является аналитической в области $D(\Theta(\Lambda))$ (т.е. g аналитически продолжается в область $D(\Theta(\Lambda))$). При этом для каждого номера s существуют номера p', p и числа A', $A > 0$ (не зависящие от функции $g \in W(\Lambda, D)$) такие, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \max_{z \in K_s} |c_{m,j} e_{m,j}(z)| \leqslant A' ||c||_{p'} \leqslant A \max_{z \in K_p} |g(z)|, \tag{2.20}$$

где $c = \{c_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, $||c||_{p'}$ — норма в пространстве $Q_{p'}(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$ и $K_s, K_p \in K(D(\Theta(\Lambda)))$. В частности, ряд (2.19) сходится абсолютно и равномерно на компактах в области $D(\Theta(\Lambda))$. Кроме того, оператор

$$\mathcal{B} : Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U) \to W(\Lambda, D) \tag{2.21}$$

является изоморфизмом линейных топологических пространств.

Доказательство. По условию последовательность Λ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда согласно теореме 3 из работы [9] система функций $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является почти экспоненциальной последовательностью в области D (с показателями $\lambda_{m,1}$) в смысле определения из работы [7]. Кроме того, по теореме 5 работы [9] система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ обладает групповым свойством Кете. Это означает, что для любого компакта $K \subset D$ существуют номер компакт $K' \subset D$ и число $A0$, удовлетворяющие условию: для каждого $m \geq 1$ и каждой функции h_m вида

$$h_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,j}(z) \tag{2.22}$$

выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z\in K} |e_{m,j}(z)| \leqslant A" \sup_{z\in K'} |h_m(z)|. \tag{2.23}$$

Пусть функция $g \in W(\Lambda, D)$. Согласно лемме 2.1 она раскладывается в ряд (2.5) и выполнено (2.6). Положим

$$h_m(z) = \sum_{v=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} c_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v} z).$$

Тогда в силу определения $e_{m,j}(z)$ функция $h_m(z)$ имеет вид (2.22). Следовательно, согласно (2.23) и (2.6) для любого компакта $K \subset D$ сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \max_{z\in K} |c_{m,j} e_{m,j}(z)|. \tag{2.24}$$

Это означает, что ряд (2.19) сходится абсолютно и равномерно на компактах в области D. По лемме 2.1 некоторая подпоследовательность его частичных сумм сходится к функции g. Поэтому равенство (2.19) имеет место.

Так как ряд (2.24) сходится для каждого $K \subset D$, то по теореме 3.1 из работы [22] (аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных многочленов) для каждого компакта $K_s \in K(D(\Theta(\Lambda)))$ существуют номер p' и число $A' > 0$ (не зависящие от функции $g \in W(\Lambda, D)$) такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \max_{z\in K_s} |c_{m,j} e_{m,j}(z)| \leqslant A' ||c||_{p'}, \tag{2.25}$$

где $c = \{c_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ и $||c||_{p'}$ — норма в пространстве $Q_{p'}(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$. Отсюда следует, что функция g аналитически продолжается в область $D(\Theta(\Lambda))$ и представляется там рядом (2.19), который сходится абсолютно и равномерно на компактах в области $D(\Theta(\Lambda))$. Это означает, в частности, что пространства $W(\Lambda, D)$ и $W(?, D(\Theta(\Lambda)))$ совпадают и оператор (2.21) является сюръекцией.

По лемме 2.3 из работы [22] оператор (2.21) определен на всем пространстве $Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$. Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, то, как отмечалось ранее, представление рядом (1.2) обладает свойством единственности. Следовательно, оператор (2.21) является инъективным. Таким образом, $\mathcal{B}$ является изоморфизмом линейных пространств. В силу (2.25) оператор $\mathcal{B}$ непрерывен. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе для пространств Фреше (таковыми, как нетрудно заметить, являются пространства $Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$ и $W(\Lambda, D)$) оператор $\mathcal{B}$ — изоморфизм топологических пространств. Поэтому верно неравенство

$$A'||c||_{p'} \leqslant A \max_{z\in K_p} |g(z)|,$$

где $K_p \in K(D(\Theta(\Lambda)))$ и номер p и число $A > 0$ не зависят о функции g. Последняя оценка вместе с (2.25) дают (2.20). Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2.2 одновременно с представлением функций из $W(\Lambda, D)$ осуществляется и их аналитическое продолжение в более широкую (вообще говоря) выпуклую область. Задача такого продолжения функций из инвариантных подпространств имеет богатую историю. Наиболее общие результаты по этой проблеме (как в случае одной, так и в случае нескольких переменных) получены в работах [23]–[25]. В этих же работах имеется исторический обзор исследований по проблеме продолжения.

Разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательности Λ будем называть тривиальным, если каждая группа U_m состоит лишь из точки $\lambda_{m,1}$, $m \geq 1$. В этом случае функции системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$

легко вычисляются. Имеем:

$$e_{m,j}(z) = z^{j-1}\exp(\lambda_{m,1}z), \quad j = 1, \dots, N_m (= n_{m,1}), \quad m \geq 1.$$

Относительная малость групп в этом случае равносильна равенству

$$\sigma(\Lambda) = \lim_{m\to\infty} n_{m,1}/|\lambda_{m,1}| = \lim_{k\to\infty} n_k/|\lambda_k| = 0.$$

Таким образом, из теоремы 2.2 в частном случае получаем решение проблемы фундаментального принципа.

Следствие 2.3. *Предположим, что в условиях леммы 2.1 разбиение U тривиально и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (1.1), сумма которого является аналитической в области $D(\Theta(\Lambda))$ (т.е. g аналитически продолжается в область $D(\Theta(\Lambda))$). При этом для каждого номера s существуют номера p', p и числа A', $A > 0$ (не зависящие от функции $g \in W(\Lambda, D)$) такие, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} \max_{z\in K_s} |d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)| \leqslant A'||d||_{p'} \leqslant A \max_{z\in K_p} |g(z)|,$$

где $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$, $||d||_{p'}$ — норма в пространстве $Q_{p'}(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U)$ и $K_s, K_p \in K(D(\Theta(\Lambda)))$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на компактах в области $D(\Theta(\Lambda))$. Кроме того, оператор $\mathcal{B} : Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda, U) \to W(\Lambda, D)$ является изоморфизмом линейных топологических пространств.

Рассмотрим теперь случай, когда функции $f \in P_D$, существование которых требуется в лемме 2.1, уже построены ранее. Для этого нам понадобится одна известная характеристика последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$, — разбиение Λ на группы. Следуя работе [4], положим

$$q_\Lambda(\lambda, w, \delta) = \prod_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k} = \prod_{\lambda_{m,v}\in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_{m,v}}{3\delta|\lambda_{m,v}|}\right)^{n_{m,v}}.$$

В случае когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k, полагаем $q_\Lambda(\lambda, w, \delta) \equiv 1$. Модуль $q_\Lambda(\lambda, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ около λ. Величина $\ln|q_\Lambda(\lambda, w, \delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ до точки λ.

Введем еще функции (см. [10]): Для каждого положим

$$q^m_{\Lambda,U}(z, \delta) = \prod_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,1},\delta|\lambda_{m,1}|),k\neq m} \left(\frac{z - \lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\right)^{n_{k,v}}, \quad m \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ не содержит точек $\lambda_{k,v}$, $k \neq m$, то $q^m_{\Lambda,U}(z, \delta)$. Отметим, что функция $q^{m(z,\delta)}_{\Lambda,U}$ в отличие от $q_\Lambda(z, w, \delta)$ зависит от разбиения U последовательности Λ. Если $\delta \in (0, 1)$, то модуль каждого сомножителя $q^m_{\Lambda,U}$ в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$. Поэтому для $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Следовательно,

$$|q^m_{\Lambda,U}(z, \delta_1)| \geq |q^m_{\Lambda,U}(z, \delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_{m,1}, \delta_2|\lambda_{m,1}|), \tag{2.26}$$

если $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 < 1/3$. Положим

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \min_{\lambda_{m,v}\in B(\lambda_{m,1},\delta|\lambda_{m,1}|)} \ln \frac{|q^m_{\Lambda,U}(\lambda_{m,v}, \delta)|}{|\lambda_{m,v}|}.$$

Это определение корректно, т.к. согласно (2.26) предел по δ существует. Отметим еще, что верно неравенство $S_\Lambda(U) \leqslant 0$. Оно вытекает из неположительности величины $\ln|q^m_{\Lambda,U}(\lambda_{m,v}, \delta)|$ при $\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ и $\delta \in (0, 1/3)$. Если группы U_m, $m \geq 1$, относительно малы, то для каждого $\delta > 0$ начиная с некоторого номера $m(\delta)$ все точки группы U_m лежат в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$. Поэтому минимум в определении величины $S_\Lambda(U)$ при $m \geq m(\delta)$ можно брать не по точкам $\lambda_{m,v}$, попавшим в круг $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, а по всем $v = 1, \ldots, M_m$. В случае когда разбиение U тривиально, величина $S_\Lambda(U)$ совпадает с величиной S_Λ, введенной в работе [4].

Следствие 2.4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$, и $\bar{n}(\Lambda) < \infty$. Предположим, что $S_\Lambda(U) > -\infty$. Тогда каждая функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ раскладывается в ряд (2.19) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. При этом для каждого номера s существуют номера p', p и числа A', $A > 0$ (не зависящие от $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$) такие, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \max_{z \in K_s} |c_{m,j} e_{m,j}(z)| \leqslant A' ||c||_{p'} \leqslant A \max_{z \in K_p} |g(z)|,$$

где $c = \{c_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, $||c||_{p'}$ — норма в пространстве $Q_{p'}(\mathbb{C}, \Lambda, U)$ и $K_s, K_p \in K(\mathbb{C})$. В частности, ряд (2.19) сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости. Кроме того, оператор $\mathcal{B} : Q(\mathbb{C}, \Lambda, U) \to W(\Lambda, \mathbb{C})$ является изоморфизмом линейных топологических пространств.

Доказательство. Покажем, что выполнены все условия теоремы 2.2. Поскольку группы U_m относительно малы, то достаточно проверить лишь выполнение условий леммы 2.1 для области $D = \mathbb{C}$. По условию следствия верхняя плотность последовательности Λ конечна. Тогда по указанной выше теореме Линделефа функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)^{n_k}$$

является целой и имеет экспоненциальный тип. Кроме того, она обращается в ноль в точках λ_k с кратностью n_k. Следовательно, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(\mathbb{C})$. Множество $\Theta(\Lambda)$ не пересекает границу множества $J(D)$, т.к. $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пусть K_0 — выпуклый компакт, $\delta_0 > 0$, и $\{U_(m_l)\}_{l=1}^\infty$ — подпоследовательность групп такая, что $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^\infty$ сходится.

По теореме 4.1 из работы [12] существует последовательность $\Lambda' = \{\xi_l, 1\}_{l=1}^\infty$, не имеющая общих точек с Λ и такая, что

1) $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Lambda'$ является нулевым множеством (с учетом кратностей) целой функции $\tilde{f}$ экспоненциального типа (т.е. $\tilde{f} \in P_\mathbb{C}$);

2) Для разбиения $\tilde{U} = U \cup U'$ последовательности $\tilde{\Lambda}$, где U' — тривиальное разбиение Λ' выполнено неравенство $S_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{U}) > -\infty$, и $\tilde{U}$ — разбиение на относительно малые группы.

Тогда непосредственно из теоремы 5.1 в работе [12] следует, что существуют положительные числа $\{\alpha_{m,j}\}_{j=1,m=1}^{M_m,\infty}$, удовлетворяющие условиям:

$$\lim_{m \to \infty} \max_{1 \leqslant s,j \leqslant M_m} \frac{\alpha_{m,j}}{|\lambda_{m,s}|} = 0, \tag{2.27}$$

множества $B_m = \bigcup_{j=1}^{M_m} B(\lambda_{m,j}, \alpha_{m,j}$, $m \geq 1$, попарно не пересекаются, диаметры d_m множеств B_m удовлетворяют соотношению

$$\lim_{m \to \infty} \max_{1 \leqslant j \leqslant M_m} \frac{d_m}{|\lambda_{m,j}|} = 0, \tag{2.28}$$

и существуют $b, b_1 > 0$ такие, что

$$\ln|\tilde{f}(\lambda)| \geq -b_1 - b|\lambda|, \quad \lambda \in \partial B_m, \quad m \geq 1. \tag{2.29}$$

Положим $f(\lambda) = \tilde{f}(z)e^{\tau\lambda}$ и $\gamma_l = \partial B_{m_l}$, $l \geq 1$. Из свойства 1) последовательности $\tilde{\Lambda}$ получаем пункт 1) леммы 2.1 (при любом $\tau \in \mathbb{C}$). Пункт 2) этой леммы следует из определения множеств B_m и того, что они попарно не пересекаются. Соотношение (2.28) дает нам пункт 4) леммы 2.1. Согласно определению множеств B_m для длины контура γ_l имеем оценку:

$$\rho(\gamma_l) \leqslant 2\pi \sum_{j=1}^{N_{m_l}} \alpha_{m_l,j}.$$

Так как группы U_m относительно малы, то

$$\lim_{m\to\infty} \frac{M_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Отсюда с учетом (2.27) получаем пункт 5) леммы 2.1. Остается показать, что при подходящем числе $\tau \in \mathbb{C}$ выполнен пункт 3) этой леммы.

Пусть $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$. Положим $\tau = t_0 e^{-i\varphi_0}$. Тогда

$$\ln|f(\lambda)| = \ln|\tilde{f}(\lambda)| + t_0 \mathrm{Re}(e^{-i\varphi_0}\lambda).$$

С учетом непрерывности и положительной однородности опорной функции найдутся $a, \delta, t_0 > 0$ такие, что

$$t_0\mathrm{Re}(e^{-i\varphi_0}\lambda) - b_1 - b|\lambda| > H_{K_0}(\lambda), \quad \lambda/|\lambda| \in B(e^{i\varphi_0}, \delta), \quad |\lambda| \geq a.$$

Поскольку $\{\lambda_{m_l,1}/|\lambda_{m_l,1}|\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$, то в силу определения множеств B_m и соотношений (2.28), (2.29) из последнего неравенства получаем пункт 3) леммы 2.1. Следствие доказано.

Замечание. Ранее результат следствия 2.4 был получен А.С. Кривошеевым в работе [12] (§9) при помощи решения достаточно сложной специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа.

3. Необходимые условия

Покажем, что условие на индекс конденсации $S_\Lambda(U)$ (подобное тому, которое присутствует в последнем утверждении) является необходимым для существования базиса в самом общем случае (для произвольного инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, в произвольной выпуклой области).

Пусть D — выпуклая область и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ ($U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$) относительно малого диаметра. Для множества E на окружности $S(0,1)$ символом $\Lambda(E)$ обозначим подпоследовательность Λ, которая состоит из всех групп U_m таких, что $\lambda_{m,1}/|\lambda_{m,1}| \in E$. Следуя [4], положим

$$S_\Lambda(U,F) = \sup_{E\supset F} S_{\Lambda(E)}(U), \qquad S_\Lambda(U,D) = \inf_{F\supset(S(0,1)\setminus J(D))} S_\Lambda(U,F),$$

где супремум берется по всем открытым на $S(0,1)$ множествам $E \supset F$, а инфимум – по всем компактным подмножествам $F \supset (S(0,1) \setminus J(D))$.

Лемма 3.1. *Пусть D — выпуклая область и последовательность Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ $\left(U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}\right)$ относительно малого диаметра. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, и каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (2.5), сходящийся равномерно (по m) на компактах в D. Тогда $S_\Lambda(U,D) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $S_\Lambda(U,D) \leqslant -3\beta < 0$. Тогда найдется компакт $F \subset (S(0,1)\setminus J(D))$ такой, что $S_{\Lambda(E)}(U) \leqslant -2\beta$ для любого открытого на $S(0,1)$ множества $E \supset F$. Поэтому согласно определению величины $S_{\Lambda(E)}(U)$ для каждого $p \geq 1$ найдутся номера $m(p)$, $v(p)$ и число $\delta_p \in (0, 1/4p)$, удовлетворяющие условиям:

$$\min_{\lambda\in F}\left|\frac{\lambda_{m(p),1}}{|\lambda_{m(p),1}|} - \lambda\right|, \tag{3.1}$$

$$\frac{\ln|q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),v(p)}, \delta_p)|}{|\lambda_{m(p),v(p)}|} \leqslant -\beta, \tag{3.2}$$

$$|\lambda_{m(p+1),v(p+1)}| \geq 2|\lambda_{m(p),v(p)}|. \tag{3.3}$$

Переходя к подпоследовательности, можно также считать, что $\{\lambda_{m(p),1}/|\lambda_{m(p),1}|\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$. В силу (3.1) верно включение $e^{i\varphi_0} \in F$. В частности, $H_D(e^{i\varphi_0}) < +\infty$.

Рассмотрим функции

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{m(p),v(p)},5\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|)} \frac{\exp(\lambda z)d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m(p),v(p)})q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda,\delta_p)}, \quad p \geq 1. \tag{3.4}$$

Найдем оценки сверху на $|g_p|$. Учитывая, что $\delta_p < 1/4$, имеем:

$$|q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda,\delta_p)| = \prod_{\lambda_{m,v} \in B(\lambda_{m(p),v(p)},\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|), m \neq m(p)} \left| \frac{\lambda - \lambda_{m,v}}{3\delta|\lambda_{m,v}|} \right|^{n_{k,v}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{4\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|}{(3\delta_p(1+\delta_p)|\lambda_{m(p),v(p)}|} \right)^{s(p)} > 1, \quad \lambda \in S(\lambda_{m(p),v(p)}, 5\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|), \tag{3.5}$$

где $s(p)$ — число точек $\lambda_{k,v}$, $k \neq m(p)$, с учетом их кратности, попавших в круг $B(\lambda_{m(p),v(p)}, \delta_p|\lambda_{m(p),v(p)})$. В силу (3.5) имеем:

$$|g_p(z)| \leqslant 5\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}| \sup_{\lambda \in S(\lambda_{m(p),v(p)},5\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|)} \left| \frac{\exp(\lambda z)}{(\lambda - \lambda_{m(p),v(p)}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\mathrm{Re}(\lambda_{m(p),v(p)}z) + 5\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)})||z|). \tag{3.6}$$

Пусть K — произвольный компакт в области D. Тогда

$$\mathrm{Re}(ze^{i\varphi_0}) \leqslant H_D(e^{i\varphi_0}) - 2\tau, \quad z \in K, \tag{3.7}$$

для некоторого числа $\tau > 0$. Поскольку U_m — группы относительно малого диаметра, то последовательность $\{\lambda_{m(p),v(p)}/|\lambda_{m(p),v(p)}|\}_{p=1}^{\infty}$ также (как и $\{\lambda_{m(p),1}/|\lambda_{m(p),1}|\}_{p=1}^{\infty}$) сходится к $e^{i\varphi_0}$. Поэтому с учетом (3.6), (3.7) и того, что $\delta_p < 1/4p \to 0$ получаем:

$$|g_p(z)| \leqslant \exp\left(|\lambda_{m(p),v(p)}| \left(\mathrm{Re}\frac{\lambda_{m(p),v(p)}z}{|\lambda_{m(p),v(p)}|} + 5\delta_p\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(|\lambda_{m(p),v(p)}|(\mathrm{Re}(ze^{i\varphi_0}) + \tau)) \leqslant \exp(|\lambda_{m(p),v(p)}|(H_D e^(i\varphi_0) - \tau)), \tag{3.8}$$

где $z \in K$ и $p \geq p(K)$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{3.9}$$

где $c_p = \exp(-|\lambda_{m(p),v(p)}|H_D(e^{i\varphi_0}))$, $p \geq 1$. В силу (3.8) и (3.3)

$$\sum_{p=p(K)}^{\infty} |c_p g_p(z)| \leqslant \sum_{p=p(K)}^{\infty} \exp(-\tau|\lambda_{m(p),v(p)}|) < \infty, \quad z \in K.$$

Следовательно, ряд (3.9) сходится равномерно на компактах в области D. В силу определения g_p (используем вычеты) имеем:

$$g_p(z) = d_p \exp(\lambda_{m(p),v(p)}z) + \sum_{\lambda_{m,v} \in B(\lambda_{m(p),v(p)},\delta_p|\lambda_{m(p),v(p)}|), m \neq m(p)} \sum_{n=0}^{n_{m,v}-1} d_{m,v,n} z^n \exp(\lambda_{m,v}z). \tag{3.10}$$

$$d_p = \left(q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),v(p)},\delta_p)\right)^{-1}. \tag{3.11}$$

Отсюда и (3.9) следует включение $g \in W(\Lambda, D)$. Покажем, что g вопреки условию леммы не раскладывается в ряд (2.5), сходящийся равномерно на компактах в области D.

По условию система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Следовательно, как отмечалось выше, существует биортогональная к $\mathcal{E}(\Lambda)$ система функционалов $\Xi(\Lambda, D)$. Поскольку $\delta_p < 1/4$, а U_m — группы относительно малого диаметра, то согласно (3.3) точки $\lambda_{m(p),v}$, $v = \overline{1, M_{m(p)}}$, не лежат в круге $B(\lambda_{m(j),v(j)}, \delta_p|\lambda_{m(j),v(j)}|)$, если $j \neq p$. Поэтому в силу (3.10)

$$\mu_{m(p),v(p),0}(g) = d_p c_p, \quad \mu_{m(p),v(p),n}(g) = 0, \quad n = \overline{1, n_{m(p),v(p)} - 1}, \quad p \geq 1, \tag{3.12}$$

$$\mu_{m(p),v,n}(g) = 0, \quad n = \overline{0, n_{m(p),v} - 1}, \quad v = \overline{1, M_{m(p)}}, \quad v \neq v(p), \quad p \geq 1, \tag{3.13}$$

где $\{\mu_{m(p),v,n}\} \in \Xi(\Lambda, D)$ — система биортогональная к системе $\{z^n \exp(\lambda_{m(p),v} z)\}$.

По условию функция g раскладывается в ряд (2.5), сходящийся равномерно на компактах в D. Тогда

$$c_{m(p),v,n} = \mu_{m(p),v,n}(g), \quad n = \overline{0, n_{m(p),v} - 1}, \quad v = \overline{1, M_{m(p)}}, \quad p \geq 1. \tag{3.14}$$

Отсюда с учетом (3.12) и (3.13) следует, что член ряда (2.5) с номером $m = m(p)$ имеет вид

$$d_p c_p \exp(\lambda_{m(p),v(p)} z), \quad p \geq 1. \tag{3.15}$$

Согласно определению опорной функции найдется точка $z_0 \in D$ такая, что

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) \geq H_D(e^{i\varphi_0}) - \beta/2.$$

Поскольку $\{\frac{\lambda_{m(p),v(p)}}{|\lambda_{m(p),v(p)}|}\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к $e^{i\varphi_0}$, то

$$\mathrm{Re}\frac{\lambda_{m(p),v(p)} z_0}{|\lambda_{m(p),v(p)}|} \geq H_D(e^{i\varphi_0}) - \beta, \quad p \geq p_0.$$

Следовательно, с учетом (3.11), (3.2) и определения c_p имеем:

$$|d_p c_p \exp(\lambda_{m(p),v(p)} z_0)| = \frac{\exp(-|\lambda_{m(p),v(p)}| H_D(e^{i\varphi_0})}{|q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),v(p)}, \delta_p)|} \exp(\mathrm{Re}(\lambda_{m(p),v(p)} z_0)) \geq$$

$$\geq \exp(|\lambda_{m(p),v(p)}|(\beta - H_D(e^{i\varphi_0}))) \exp\left(|\lambda_{m(p),v(p)}| \mathrm{Re}\frac{\lambda_{m(p),v(p)} z_0}{|\lambda_{m(p),v(p)}|}\right) \geq 1, \quad p \geq p_0.$$

Это противоречит сходимости ряда (2.5) в точке $z_0 \in D$. Таким образом, наше исходное предположение неверно, т.е. $S_\Lambda(U, D) \geq 0$. Как отмечалось выше, верно также неравенство $S_\Lambda(U, D) \leqslant 0$. Следовательно, $S_\Lambda(U, D) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть D — выпуклая область и последовательность Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ ($U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$) относительно малого диаметра. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, и $S_\Lambda(U) = -\infty$. Тогда существует $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$, для которой представление в виде ряда (2.5), равномерно сходящегося на компактах из D невозможно.*

Доказательство. По условию $S_\Lambda(U) = -\infty$. Поэтому найдутся числа $\delta_p \in (0, 1/4p)$, $p \geq 1$, и подпоследовательность $\{\lambda_{m(p),v(p)}\}$ такие, что

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),v(p)}, \delta_p)|}{|\lambda_{m(p),v(p)}|} = -\infty. \tag{3.16}$$

Можно считать, что для всех $p \geq 1$ выполнено (3.3).

Определим $g_p(z)$, $p \geq 1$, по формуле (3.4). Тогда, как и в лемме 3.1, верны соотношения (3.6), (3.10) и (3.11). Рассмотрим функцию $g(z)$, определенную по формуле (3.9), где полагаем

$$c_p = \sqrt{|q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),v(p)}, \delta_p)|}, \quad p \geq 1.$$

Пусть $R > 0$. В силу (3.16) найдется номер p_0 такой, что

$$c_p = |c_p| \leqslant \exp(-2R|\lambda_{m(p),l(p)}|), \quad p \geq p_0.$$

Тогда с учетом (3.6) имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|c_p|\max_{|z|\leqslant R}|g_p(z)|\leqslant A+\sum_{p=p_0}^{\infty}\exp\left((-2R+R+5\delta_pR)|\lambda_{m(p),l(p)}|\right).$$

Поскольку $\delta_p\to 0$ и верно (3.3), то последний ряд сходится. Следовательно, в силу (3.10) верно включение $g\in W(\Lambda,\mathbb{C})$, и, как и в лемме 3.1, имеют место равенства (3.12), (3.13).

Предположим, что функция g представляется рядом (2.5), равномерно сходящимся на компактах из области D. Тогда верно (3.14). Поэтому, как и в лемме 3.1, член ряда (2.5) с номером $m=m(p)$ имеет вид (3.15). Из (3.11), определения чисел c_p и сходимости ряда (2.5) следует, что

$$|d_pc_p\exp(\lambda_{m(p),v(p)}z)|=\frac{|\exp(\lambda_{m(p),v(p)}z)|}{\sqrt{|q^{m(p)}_{\Lambda,U}(\lambda_{m(p),v(p)},\delta_p)|}}\to 0,\quad p\to\infty,\quad z\in D.$$

В силу (3.16) это невозможно. Таким образом, наше предположение неверно. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть D — выпуклая область и последовательность Λ разбита на группы $U=\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ $\left(U_m=\{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}\right)$ относительно малого диаметра. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, и каждая функция $g\in W(\Lambda,D)$ раскладывается в ряд (2.5), сходящийся равномерно (по m) на компактах в D. Тогда $S_\Lambda(U,D)=0$ и $S_\Lambda(U)>-\infty$.*

Замечания. 1. Результат теоремы 3.3 ранее в частном случае был получен в теореме 5.1 из работы [4]. В этой теореме рассматривался случай, когда $U=\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — тривиальное разбиение (U_m автоматически становятся группами относительно малого диаметра). При этом накладывалось дополнительное условие: $m_D(\Lambda)=0$, т.е. $n_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|\to 0$, $j\to\infty$ для любой подпоследовательности $\{\lambda_{k(j)}\}$ такой, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|\to\xi$ и $H_D(\xi)<+\infty$. При этом условии группы U_m становятся относительно малыми. Отметим еще, что этот результат в работе [4] был получен при помощи решения достаточно сложной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа.

2. Из теоремы 3.3 и следствия 2.4 вытекает теорема 9.1 из работы [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красичков И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. Сб. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.
2. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
3. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. 1991. С. 5–186.
4. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т.68. № 2. С. 71–136.
5. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ и его прил. 2012. Т. 46. № 4. С. 14–30.
6. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент* М.: Наука, 1980.
7. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 1. С. 87–96.
8. Кривошеев А.С. *Базисы «по относительно малым группам»* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 67–89.
9. Кривошеев А.С.. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4. № 1. С. 88–106.
10. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. Сб. 2013. Т. 204. № 12. С.49–104.

11. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 684–697.
12. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 2. С. 132–195.
13. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 3. С. 96–120.
14. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 4. С. 82–139.
15. Кривошеев А.С. *Представление решений однородного уравнения свертки в выпуклых областях пространства* $\mathbb{C}^n$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 71–91.
16. Кривошеев А.С. *Интерполяция с оценками в* $\mathbb{C}^n$ *и ее применение* // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 9. С. 39–84.
17. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент* М.: Наука, 1976.
18. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 2. С. 162–205.
19. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент* М.: Наука, 1983.
20. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах* М.: Наука, 1982.
21. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* М.: Гостехиздат. 1956.
22. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 4. С. 84–90.
23. Кривошеев А.С. *Инвариантные подпространства в выпуклых областях из* $\mathbb{C}^n$ // Уфимск. матем. журн. 2009. Т. 1. № 2. С. 53–74.
24. Кривошеев А.С. *Инвариантные подпространства в выпуклых областях из* $\mathbb{C}^n$ // Уфимск. матем. журн. 2009. Т. 1. № 3. С. 65–86.
25. Кривошеев А.С. *Критерий аналитического продолжения функций из главных инвариантных подпространств в выпуклых областях из* $\mathbb{C}^n$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 4. С. 137–197.

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`