ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 30-42.

УДК 517.927.2:517.928

УДК 517.927.2:517.928

ВОЗМУЩЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Т.Р. ГАДЫЛЬШИН, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи на ограниченных и неограниченных интервалах I числовой оси для одномерного квазилинейного уравнения второго порядка. Уравнение возмущено дельта-образным потенциалом $\varepsilon^{-1}Q\left(\varepsilon^{-1}x\right)$, где $Q(\xi)$ — финитная функция, $0<\varepsilon\ll 1$. Среднее значение $\langle Q\rangle$ может быть и отрицательным, но ограничено снизу $\langle Q\rangle\geqslant -m_0$. Число m_0 определяется коэффициентами уравнения. Изучается вопрос о скорости стремления решения возмущенной задачи u^ε к решению предельной задачи u_0 при стремлении параметра ε к нулю. В случае ограниченного интервала I установлена оценка вида $|u^\varepsilon(x)-u_0(x)|<C\varepsilon$. Для неограниченного интервала I установлена более слабая оценка $|u^\varepsilon(x)-u_0(x)|<C\varepsilon^{1/2}$. Доказательства оценок получены использованием оригинальных срезающих функций в качестве пробных функций. Для простоты рассуждений доказательство существования решений возмущенной и предельной задач проведено методом сжимающих отображений. Недостатком такого подхода, как известно, является требование малости нелинейностей, входящих в уравнение. Рассмотрены граничные условия первого, второго и третьего типа.

Ключевые слова: нелинейное уравнение второго порядка, дельта-образный потенциал, малый параметр.

Mathematics Subject Classification: 34E15

1. Введение

Пусть I — либо конечный интервал (a,b), либо полуоси (a,∞), $(-\infty,b)$, либо вся ось $(-\infty,\infty)$, $\{0\}\in I$, $a<-1$, $b>1$, $\Omega:=I\times(-\infty,\infty)$, $0<\varepsilon\ll 1$. Обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_\varepsilon$ отображения из пространства $W_2^1(I)$ в пространство обощенных функций $D'(I)$ следующего вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(x,u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u)+q_1\left(x,u\right)+q_2(x)u,\\ \mathcal{L}_\varepsilon&=\mathcal{L}+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

На функции, входящие в $\mathcal{L}$, накладываются следующие условия: $k,p,q_1\in C^1(\overline{\Omega})$, q_2, $Q\in C(\overline{I})$,

$$\begin{gathered}0<q_0\leqslant q_2(x)\leqslant\overline{q}_2,\quad |Q(x)|\leqslant\overline{Q},\ x\in I;\\ 0<k_0\leqslant k(x,s),\quad (x,s)\in\Omega;\\ |k(x,s)|\leqslant\overline{k}(M),\quad x\in I,\ |s|\leqslant M,\end{gathered}\tag{1}$$

T.R. Gadylshin, F.Kh. Mukminov, Perturbation of second order nonlinear equations by delta-like potential.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-01-07920а).

Поступила 16 сентября 2017 г.

при любом $M > 0$.

Не ограничивая общность, можно считать, что $p(x,0) = 0$, $q_1(x,0) = 0$. Действительно,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u) + q_1(x,u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x,u) - p(x,0)) + p(x,0)' + (q_1(x,u) - q_1(x,0)) + q_1(x,0),$$

и слагаемые $p(x,0)' + q_1(x,0)$ переносятся в правую часть уравнения $\mathcal{L}u = f$.

Будем считать, что $\operatorname{supp} Q \subset [-1,1]$. Наложим следующее ограничение на среднее значение функции Q

$$\langle Q\rangle := \int\limits_{-1}^{1} Q(\tau)\mathrm{d}\tau > -\min\{k_0; q_0\}/4. \tag{2}$$

То есть среднее значение $\langle Q\rangle$ может быть и отрицательным.

Нелинейности, входящие в оператор $\mathcal{L}$, предполагаются малыми в следующем смысле. Обозначим

$$m_{kq} = \min\{k_0; q_0\}, \quad \gamma = \frac{3}{4}m_{kq},$$
$$K_g(M) = \sup_{x\in\overline{I}, |s|\leqslant M} |g_s(x,u)|,$$

где $g(x,s)$ — произвольная гладкая функция. Положим для некоторого M

$$A(M) = k_0^{-1}\left(2(\overline{k}(M) + \overline{q}_2 + m_{kq}) + 3\overline{Q}\right)M. \tag{3}$$

Предполагается, что существуют такие постоянные M и $\gamma_1 \in (0,\gamma)$, что выполнены неравенства

$$6K_p(2M) + 2K_k(2M)A + 2K_{q_1}(2M) < \gamma_1; \tag{4}$$

$$(p_a(M) - h_a)H_a \leqslant 0, \quad p_a(M) = \sup_{|s|\leqslant M}|p_s(a,s)|; \tag{5}$$

$$(p_b(M) + h_b)H_b \geqslant 0, \quad p_b(M) = \inf_{|s|\leqslant M}|p_s(b,s)|. \tag{6}$$

Класс нелинейностей, удовлетворяющих приведенным условиям, достаточно широк. Пусть, например, нелинейности пропорциональны малому параметру μ: $k(x,s) = \mu k_1(x,s) + k(x,0)$, $k_1(x,s) \geqslant 0$,

$$p(x,s) = \mu\overline{p}(x,s), \; q_1(x,s) = \mu\overline{q}_1(x,s).$$

Тогда для констант Липшица справедливы формулы вида $K_p(M) = \mu K_{\overline{p}}(M)$, поэтому условия малости будут выполнены при любом достаточно большом M, если выбрать достаточно малое μ. В частности, в случае линейного оператора $\mathcal{L}$, когда $\mu = 0$, число M может быть произвольным.

В случае когда I — конечный интервал (a,b), рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon = f, \; x \in I, \quad l_a u^\varepsilon = 0, \; l_b u^\varepsilon = 0; \tag{7}$$

$$l_a u^\varepsilon := h_a u^\varepsilon(a) - H_a k(a, u^\varepsilon(a))\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(a), \quad l_b u^\varepsilon := h_b u^\varepsilon(b) + H_b k(b, u^\varepsilon(b))\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(b),$$

где h_a, $h_b \geqslant 0$, H_a, H_b — либо 0, либо 1, $h_a + H_a > 0$, $h_b + H_b > 0$. Если же I — полуоси (a,∞), $(-\infty,b)$ или вся ось $(-\infty,\infty)$, то краевые условия в бесконечно удаленных точках формально ставятся в виде пределов

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0,$$

но фактически они обеспечиваются выбором пространств, в которых ищется решение задачи. В дальнейшем рассматриваются все четыре вида интервалов I, причем, для краткости формулировок, для всех них будем использовать запись (7).

Аналогично понимается краевая задача

$$\mathcal{L}u_0 = f, \quad x \in I\backslash\{0\}, \tag{8}$$

$$l_a u_0 = 0, \quad l_b u_0 = 0, \qquad k(0, u_0(0))\{u_0'\}(0) = \langle Q\rangle\, u_0(0), \tag{9}$$

где использовано обозначение

$$\{h\}(0) := h(+0) - h(-0).$$

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $I = (a, b)$ конечный интервал и выполнены условия (1), (2), (4) – (6). Тогда для любого $f \in L_2(I)$ такого, что $\|f\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M/2$, для решения u^ε краевой задачи (7) справедливо неравенство*

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C(\bar{I})} \leqslant C\varepsilon,$$

где u_0 решение краевой задачи (8), (9).

В случае неограниченного интервала I установлено более слабое утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1), (2), (4) – (6) . Тогда для любого $f \in L_2(I)$ такого, что $\|f\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M/2$, для решения u^ε краевой задачи (7) справедливо неравенство*

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C(\bar{I})} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

где u_0 решение краевой задачи (8), (9).

Ранее аналогичные результаты (с использованием другой техники) были установлены в работе авторов [1] для полулинейного уравнения с коэффициентом $k = k(x)$, не зависящим от u.

В задаче (8), (9) фактически присутствует оператор $\mathcal{L}u + \delta(x)u$, являющийся сингулярным возмущением нелинейного оператора $\mathcal{L}u$. В книге [2] рассмотрен самосопряженный оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$H_\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \varepsilon^{-1}V(\varepsilon^{-1}x),\ V \in L_1(\mathbb{R}),$$

на вещественой оси, и доказано существование резольвентного предела [2, Theorem 3.2.3]

$$n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_\varepsilon - k^2)^{-1} = (\Delta_\alpha - k^2)^{-1},$$

где $\Delta_\alpha = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\delta(x)$, $\alpha = \int_{\mathbb{R}} V(x)\mathrm{d}x$. В работе [3] рассмотрен самосопряженный оператор $H_{\mu,\varepsilon}$, порождаемый дифференциальным выражением

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + W(x) + \mu^{-1}V(\varepsilon^{-1}x),\ V, W \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

на вещественой оси, где V имеет ограниченный носитель. Построена полная асимптотика простого собственного значения оператора $H_{\mu,\varepsilon}$ при $\lambda, \mu \to 0$.

В работе [4] рассматриваются краевые задачи на отрезке $[a, b]$ для уравнения Шрёдингера с потенциалом в виде суммы $q(x, \mu^{-1}x) + \varepsilon^{-1}Q(\varepsilon^{-1}x)$, где $q(x, y)$ является 1-периодической по y функцией, $Q(x)$ есть финитная функция, $0 \in (a, b)$, μ, ε – малые положительные параметры. На основе комбинации метода усреднения и метода согласования асимптотических разложений построены решения этих краевых задач с точностью до $O(\mu + \varepsilon)$.

Известно много результатов, касающихся линейных операторов с сингулярными коэффициентами. В работе [5] дается корректное определение оператора Штурма-Лиувилля

$$l_\varepsilon y = -y''(x) + u_\varepsilon'(x)y(x)$$

и доказывается существование резольвентного предела в случае, когда $u_\varepsilon \to u \in L_2(0,1)$. В работе [6] эти результаты распространены на линейные операторы высокого (четного) порядка.

В работе [7] в пространстве $L_2([0,\infty)\setminus X)$, $X = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, рассматривается оператор $H_{X,\alpha}$, порожденный дифференциальным выражением

$$l_{x,\alpha} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta(x - x_j).$$

Исследуются свойства самосопряженности, полуограниченности снизу и дискретности спектра оператора $H_{X,\alpha}$ в случае, когда $\inf\{x_j - x_{j-1}\}_{j=1}^{\infty} = 0$.

В работах [8, 9] рассматриваются возмущения нестационарного уравнения Шредингера потенциалами с малым носителем. В частности, в [8] доказано, что если неотрицательные потенциалы $V_m(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют компактные носители S_m, емкости которых стремятся к нулю при $m \to \infty$, то соответствующие полугруппы стремятся к полугруппе невозмущенного уравнения. В [9] этот результат распространен на более широкий класс потенциалов.

Тот факт, что дельтаобразный потенциал аппроксимирует дельта-взаимодействие, принципиально одномерен. Математическое исследование многомерного оператора $-\Delta + \delta(x)$ было предпринято в работе [10], из которой следует, что он не может быть однозначно и корректно определен. В работе [11] доказано, в частности, что операторы $(-\Delta)^s + V_m(x)$ резольвентно сходятся к оператору $(-\Delta)^s + \delta_{S_p}$, где S_p — многообразие размерности $1 \leqslant p \leqslant n-1$, если $s > (n-p)/2$ и потенциалы $V_m(x)$ сходятся к δ_{S_p} в смысле распределений.

В работе [12] изучаются операторы $-\Delta + V_m(x)$ с потенциалами $V_m(x)$ из некоторого пространства мультипликаторов. Доказано, в частности, что сходимость потенциалов в пространстве мультипликаторов влечет равномерную резольвентную сходимость операторов. Этот результат обобщается в работе [13] на некоторый класс сильно эллиптических операторов высокого порядка.

Отметим еще работу [14], в которой найдено необходимое и достаточное условие ограниченности в соболевском пространстве оператора $a_{ij}\partial_i\partial_j + b_j\partial_j + c$ с коэффициентами a_{ij}, b_j, c из пространства распределений.

Разрешимость задачи (7) в случае гладких коэффициентов установлена в работе [15]. Если правая часть $f \in L_1(I)$ только суммируемая, то требуется иная техника, см. например, [16] и имеющиеся там ссылки. К сожалению, нам не удалось найти работы по разрешимости задачи (8), (9), поэтому в следующем параграфе будет доказано существование решений задачи (8), (9) простейшим методом сжимающих отображений. Этот метод вынудил нас ограничиться малыми нелинейностями. Ради полноты изложения, параллельно излагается и разрешимость задачи (7).

2. Разрешимость краевых задач (7) и (8), (9)

Для функции $w \in C(\overline{I})$ рассмотрим следующие билинейные формы на $W_2^1(I)$:

$$(u,v)_w = \int_I (k(x,w)u'v' + q_2(x)uv)\,\mathrm{d}x$$

$$(u,v)'_{w,r} = \int_I \Big(k(x,w)u'v' + \Big(q_2(x) + r\varepsilon^{-1}Q(\frac{x}{\varepsilon})\Big)\,uv\Big)\,\mathrm{d}x + (1-r)\,\langle Q\rangle\, u(0)v(0),$$

где $r = 1$ или $r = 0$.

В силу условий $k(x,u) \geqslant k_0 > 0$, $q_2(x) \geqslant q_0 > 0$ и (1) очевидны неравенства

$$m_{kq}\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} \leqslant (u,u)_w \leqslant C_1\|u\|^2_{W_2^1(a,b)}.$$

Следовательно, билинейная форма $(u,v)_w$ является скалярным произведением в $W_2^1(I)$, эквивалентным классическому.

Линейное нормированное пространство $W_2^1(c,d)$ вложено в $C[c,d]$ (см., например, [17, Глава III, § 6]). В частности, $\|u\|_{C[0,1]} \leqslant \|u\|_{W_2^1(0,1)}$. Следовательно,

$$\|u\|_{C[c,d]} \leqslant \|u\|_{W_2^1(c,d)}, \qquad \forall u \in W_2^1(c,d),\ d-c \geqslant 1. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$u^2(0) \leqslant \|u\|^2_{C(I)} \leqslant \|u\|^2_{W_2^1(I)} \leqslant (m_{kq})^{-1}(u,u)_w, \quad u \in W_2^1(I). \tag{11}$$

Напомним, что для гладких функций справедливо неравенство Стеклова

$$\int\limits_c^d v^2 \mathrm{d}x \leqslant (d-c)^2 \int\limits_c^d (v')^2 \mathrm{d}x, \quad v(c)=0.$$

Обозначим через V гильбертово подпространство

$$\begin{aligned}
V =&\{u \in W_2^1(I) | u(a)=0\}, \qquad \text{если } I=(a,\infty) \text{ и } H_a=0,\\
V =&\{u \in W_2^1(I) | u(b)=0\}, \qquad \text{если } I=(-\infty,b) \text{ и } H_b=0,\\
V =&\{u \in W_2^1(I) | u(a)=u(b)=0\}, \qquad \text{если } I=(a,b) \text{ и } H_a=H_b=0,\\
V =&\{u \in W_2^1(I) | u(a)=0\}, \qquad \text{если } I=(a,b) \text{ и } H_a=0, \text{ но } H_b\neq 0,\\
V =&\{u \in W_2^1(I) | u(b)=0\}, \qquad \text{если } I=(a,b) \text{ и } H_b=0, \text{ но } H_a\neq 0,
\end{aligned}$$

$V = W_2^1(I)$ в остальных случаях; $\|u\|_V := \|u\|_{W_2^1(I)}$.

Лемма 1. *Пусть справедливо неравенство* (2)*. Тогда при достаточно малых* ε *билинейная форма* $(u,v)'_{w,r}$ *является скалярным произведением в* V*, эквивалентным скалярному произведению* $(u,v)_w$*. При этом справедливо неравенство*

$$\gamma_1 \|u\|_V^2 \leqslant (u,u)'_{w,r}. \tag{12}$$

Доказательство. Установим соотношение

$$d(u) = \left| \int\limits_I \varepsilon^{-1} Q(\frac{x}{\varepsilon}) u^2 \mathrm{d}x - \langle Q\rangle u^2(0) \right| \leqslant 4\varepsilon^{1/2}\overline{Q}\|u'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|u\|_V, \quad u \in V. \tag{13}$$

Пусть $u_1, u_2, v \in V$. Оценим разность

$$\int\limits_I \varepsilon^{-1} Q(\frac{x}{\varepsilon}) u_1 v \mathrm{d}x - \langle Q\rangle u_2(0) v(0) = \tag{14}$$

$$= \int\limits_I \varepsilon^{-1} Q(\frac{x}{\varepsilon})(u_1 v - u_1(0)v(0))\mathrm{d}x + \langle Q\rangle (u_1(0)-u_2(0))v(0).$$

Пусть $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Очевидны оценки

$$\left| \int\limits_I \varepsilon^{-1} Q(\frac{x}{\varepsilon})(u_1 v - u_1(0)v(0))\mathrm{d}x \right| \leqslant \int\limits_{I_\varepsilon} \varepsilon^{-1}\overline{Q}|(u_1-u_1(0))v + u_1(0)(v-v(0))|\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-1}\overline{Q}(\|u_1-u_1(0)\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|v\|_{L_2(I_\varepsilon)} + \|v-v(0)\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|u_1(0)\|_{L_2(I_\varepsilon)}) = J.$$

По неравенству Стеклова и (10)

$$\begin{aligned}
J \leqslant& \overline{Q}(\|u_1'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|v\|_{L_2(I_\varepsilon)} + \|v'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|u_1(0)\|_{L_2(I_\varepsilon)}) \leqslant\\
&\leqslant 2\varepsilon^{1/2}\overline{Q}(\|u_1'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|v\|_V + \|v'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|u_1\|_V).
\end{aligned}$$

Теперь из (14), при $u_1 = u_2 = v = u$ следует соотношение (13), а при $v = u_1 - u_2$ – неравенство

$$\int\limits_I \varepsilon^{-1} Q(\frac{x}{\varepsilon}) u_1 v \mathrm{d}x - \langle Q \rangle u_2(0) v(0) \geqslant \tag{15}$$

$$\geqslant \langle Q \rangle v^2(0) - 2\varepsilon^{1/2} \overline{Q} (\|u_1'\|_{L_2(I_\varepsilon)} \|v\|_V + \|v'\|_{L_2(I_\varepsilon)} \|u_1\|_V).$$

Докажем (12). В силу (2), (11), (13), имеем

$$(u,u)'_{w,r} \geqslant (u,u)_w + \langle Q \rangle u^2(0) - rd(u) \geqslant$$

$$\geqslant m_{kq} \|u\|_V^2 - m_{kq} u^2(0)/4 - 4\varepsilon^{1/2} \overline{Q} \|u'\|_{L_2(I_\varepsilon)} \|u\|_V \geqslant \gamma_1 \|u\|_V^2.$$

Последнее неравенство справедливо при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Из (11) и (13) следует оценка $(u,u)'_{w,r} \leqslant C(u,u)_w$, завершающая доказательство эквивалентности скалярных произведений $(u,v)'_{w,r}$ и $(u,v)_w$. □

Положим $\widetilde{h}_a = h_a H_a$, $\widetilde{h}_b = h_b H_b$. Пусть

$$\begin{aligned}
(u,v)_{w,r} :=& (u,v)'_{w,r}, \qquad I = (-\infty, \infty),\\
(u,v)_{w,r} :=& (u,v)'_{w,r} + \widetilde{h}_a u_0(a) v(a), \qquad I = (a, \infty),\\
(u,v)_{w,r} :=& (u,v)'_{w,r} + \widetilde{h}_b u_0(b) v(b), \qquad I = (-\infty, b),\\
(u,v)_{w,r} :=& (u,v)'_{w,r} + \widetilde{h}_a u_0(a) v(a) + \widetilde{h}_b u_0(b) v(b), \qquad I = (a, b).
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть справедливо неравенство* (2)*. Тогда при достаточно малых ε билинейная форма $(u,v)_{w,r}$ является скалярным произведением в V эквивалентным исходному скалярному произведению в V. При этом справедливо неравенство*

$$\gamma_1 \|u\|_V^2 \leqslant (u,u)_{w,r}.$$

Доказательство легко следует из леммы 1 и неравенства (11).

По теореме Рисса (см., например, [17, Глава II, § 3, п. 2]) формула

$$(u,v)_{w,r} = F(v), \qquad \forall v \in V,$$

где $F \in V'$ – линейный непрерывный функционал, определяет линейное отображение $u = S_{w,r} F$, $S_{w,r} : V' \to V$. Поскольку $\gamma_1 \|u\|_V^2 \leqslant (u,u)_{w,r} \leqslant \|F\|_{V'} \|u\|_V$, то справедлива оценка

$$\|u\|_V = \|S_{w,r} F\|_V \leqslant \gamma_1^{-1} \|F\|_{V'}. \tag{16}$$

Обобщенные решения нелинейных краевых задач (7) и (8), (9) определяются как функции $u^\varepsilon \in V$ и $u_0 \in V$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$(u^\varepsilon, v)_{u^\varepsilon,1} = \int\limits_I f v \mathrm{d}x - \int\limits_I ((p(x,u^\varepsilon))' + q_1(x,u^\varepsilon)) v \mathrm{d}x \tag{17}$$

$$(u_0, v)_{u_0,0} = \int\limits_I f v \mathrm{d}x - \int\limits_I ((p(x,u_0))' + q_1(x,u_0)) v \mathrm{d}x, \tag{18}$$

соответственно, при любых $v \in V$.

Заметим, что из (17), (18) и (16) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть справедливо неравенство* (2)*. Тогда в линейном случае (т.е., когда $k(x,u) \equiv k(x,0)$, $p(x,u) = q_1(x,u) \equiv 0$) краевая задача* (8), (9)*, а при достаточно малых ε и краевая задача* (7) *однозначно разрешимы в $W_2^1(I)$ и для их решений справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(I)} \leqslant C \|f\|_{L_2(I)}.$$

Доказательство существования решений нелинейных краевых задач (7) и (8), (9) основано на методе сжимающих отображений.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (2), (4). *Тогда при любом фиксированном* $f \in L_2(I)$ *таком, что* $\|f\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M/2$ *краевые задачи* (7) *и* (8), (9) *имеют единственные решения в шаре радиуса* M *пространства* V. *Они удовлетворяют неравенствам*

$$\|u^\epsilon(x)\|_{C(I)} \leqslant M, \quad \|u_0(x)\|_{C(I)} \leqslant M. \tag{19}$$

Доказательство. Зафиксируем f так, чтобы $\|f\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M/2$. В пространстве функций из V рассмотрим шар

$$B_M := \{v : \quad \|v\|_V \leqslant M\},$$

где M – постоянная из условия малости (4).

Определим оператор $D : B_M \to V'$, где D действует следующим образом:

$$Dw(v) = \int\limits_I (f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x,w) - q_1(x,w)) v \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_I (fv + p(x,w)v' - q_1(x,w)v)\mathrm{d}x - p(b,w(b))v(b) + p(a,w(a))v(a).$$

Из (10) следует, что

$$\|Dw\|_{V'} \leqslant \|f\|_{L_2(I)} + \|p(x,w)\|_{L_2(I)} + \|q_1(x,w)\|_{L_2(I)} + |p(a,w(a))| + |p(b,w(b))|. \tag{20}$$

Оценим слагаемые в правой части. Так как $p \in C^1(\overline{\Omega})$, а $w \in C(\overline{I})$ и, в силу (10), $\|w(x)\|_{C(I)} \leqslant \|w(x)\|_V \leqslant M$, то по формуле Лагранжа имеем ($p(x,0) = 0$)

$$\|p(x,w)\|_{L_2(I)} = \|p_u(x, \theta(x)w)w\|_{L_2(I)} \leqslant K_p(M)M.$$

Аналогично,

$$\|q_1(x,w)\|_{L_2(I)} \leqslant K_{q_1}(M)M.$$

Далее,

$$|p(a,w(a))| = |p_u(a, \theta(a)w(a))w(a)| \leqslant K_p(M)M.$$

Учитывая выбор f и условие (4), из (20) получаем

$$\|Dw\|_{V'} \leqslant \gamma_1 M/2 + 3K_p(M)M + K_{q_1}(M)M \leqslant \gamma_1 M. \tag{21}$$

Рассмотрим операторы $A_r : B_M \to V$, $r = 0, 1$, определяемые формулой $u = A_r w = S_{w,r} Dw$. Тогда из (16) следует, что $\|u\|_V \leqslant \gamma_1^{-1} \|Dw\|_{V'} \leqslant M$, то есть $A_r : B_M \to B_M$.

Очевидно, что

$$(u,v)_{w,r} = Dw(v), \ \forall v \in V. \tag{22}$$

В этих обозначениях краевые задачи (7), (8) приобретают вид $u_\varepsilon = A_1 u_\varepsilon$, $u_0 = A_0 u_0$, соответственно. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор A_r — сжимающий в B_M. Пусть $u_1 = A_r v_1$, $u_2 = A_r v_2$. Запишем соотношение (22) для u_1, u_2 и вычтем из первого второе:

$$(u_1, v)_{v_1,r} - (u_2, v)_{v_2,r} = Dv_1(v) - Dv_2(v).$$

Дальнейшее доказательство, для определенности, проведем в случае, когда $I = (a, \infty)$, $H_a = 1$. Рассмотрим развернутую запись этого соотношения

$$\int\limits_I \big(v'(k(x,v_1)u_1' - k(x,v_2)u_2') + (q_2(x) + r\varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon))(u_1-u_2)v\big)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ (1-r)\langle Q\rangle (u_1(0)-u_2(0))v(0) + h_a(u_1(a)-u_2(a))v(a) =$$
$$= \int\limits_I v((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,v_2) + q_1(x,v_2)) - (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,v_1) + q_1(x,v_1)))\mathrm{d}x.$$

Подставим в это равенство $v = u_1 - u_2$ и проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_I [v'\,(v'k(x,v_1) + (k(x,v_1) - k(x,v_2))u_2') + (q_2(x) + r\varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon))v^2]\mathrm{d}x +$$
$$+ (1-r)\langle Q\rangle\, v^2(0) + h_a v^2(a) =$$
$$= \int\limits_I (v(q_1(x,v_2) - q_1(x,v_1)) + (p(x,v_1) - p(x,v_2))\,v')\mathrm{d}x +$$
$$+ (p(a,v_1(a)) - p(x,v_2(a)))\,v(a).$$

Учитывая (12), приходим к неравенству

$$\gamma_1\|v\|_V^2 \leqslant K_p(2M)\int\limits_I |v'|\cdot|v_1-v_2|\mathrm{d}x + K_p(2M)|v(a)|\cdot|v_1(a)-v_2(a)| +$$
$$+ K_{q_1}(2M)\int\limits_I |v|\cdot|v_1-v_2|\mathrm{d}x + \sup_{x\in[a,\infty)}|k(x,v_1)-k(x,v_2)|\,\|u_2\|_V\|v\|_V,$$

Так как

$$|k(x,v_1)-k(x,v_2)| \leqslant |k_u'(v_1-v_2)| \leqslant K_k(2M)\|v_1-v_2\|_V,$$

то получаем неравенство

$$\gamma_1\|v\|_V \leqslant (2K_p(2M) + K_k(2M)M + K_{q_1}(2M))\|v_1-v_2\|_V.$$

Откуда вытекает, что при условии (4) оператор A_r является сжимающим и, следовательно, краевые задачи (7),(8) однозначно разрешимы в шаре B_M. □

Лемма 5. *Решение краевой задачи* (7) *принадлежит* $C^1(\overline{I})$. *Решение краевой задачи* (8), (9) *принадлежит* $C(\overline{I}) \cap C^1(\overline{I}\setminus\{0\})$.

Доказательство. Для доказательства второго пункта введем обозначение $I_- = (a,0)$ и запишем уравнение (18) при $r = 0$ для функции $v \in C_0^\infty(I_-)$

$$\int\limits_{I_-} (k(x,u_0)u_0'v' + q_2(x)u_0v)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{I_-} vF(u_0)\mathrm{d}x,$$

где $F(u) = f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u) - q_1(x,u)$, $F(u_0) \in L_2(I_-)$. Это означает, что функция $z = k(x,u_0)u_0'$ имеет обобщенную производную $z' = q_2(x)u_0 - F(u_0) \in L_2(I_-)$, то есть функция z абсолютно непрерывна на $\overline{I}_-$ и уравнение (8) выполняется почти всюду, $u_0 \in C^1(\overline{I}_-)$.

Получим оценки нормы функций $F(u_0) = Du_0$, $F(u_\varepsilon)$ пользуясь неравенством (21):

$$\|F(u_0)\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M,\ \|F(u_\varepsilon)\|_{L_2(I)} \leqslant \gamma_1 M.$$

Отсюда следует оценка

$$\|z\|_{C(I_-)} \leqslant \|z\|_{W_2^1(I_-)} \leqslant \overline{k}(M)M + \overline{q}_2 M + \gamma_1 M.$$

Поэтому

$$\|u_0'\|_{C(I_-)} \leqslant k_0^{-1}\|z\|_{C(I_-)} \leqslant k_0^{-1}(\overline{k}(M)+\overline{q}_2+\gamma_1)M = c(M). \tag{23}$$

Аналогично устанавливается неравенство $\|u_0'\|_{C(0,b)} \leqslant c(M)$.

Запишем уравнение (17) при $r=1$ для функции $v\in C_0^\infty(I)$

$$\int\limits_I \Big(k(x,u^\varepsilon)(u^\varepsilon)'v' + \Big(q_2(x)+\varepsilon^{-1}Q(\frac{x}{\varepsilon})\Big)\, u^\varepsilon v\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_I vF(u^\varepsilon)\mathrm{d}x.$$

Это означает, что функция $z = k(x,u^\varepsilon)(u^\varepsilon)'$ имеет обобщенную производную $z' = q_2(x)u^\varepsilon + \varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon - F(u^\varepsilon) \in L_2(I)$, то есть функция z абсолютно непрерывна на $\overline{I}$ и уравнение (7) выполняется почти всюду. Функция $(u^\varepsilon)' = z/k(x,u^\varepsilon)$ также абсолютно непрерывна на $\overline{I}$. Как и ранее, устанавливается оценка $\|z\|_{C(a,-\varepsilon)} \leqslant (\overline{k}(M)+\overline{q}_2+\gamma_1)M$, и из нее получаем, что $\|(u^\varepsilon)'\|_{C(a,-\varepsilon)} \leqslant c(M)$. Аналогично, $\|(u^\varepsilon)'\|_{C(\varepsilon,b)} \leqslant c(M)$. Покажем, что

$$\|(u^\varepsilon)'\|_{C(I_\varepsilon)} \leqslant c(M) + 3k_0^{-1}\overline{Q}M = c_1(M), \quad \|(u^\varepsilon)'\|_{L_2(I_\varepsilon)} \leqslant c_1(M)\sqrt{2\varepsilon}. \tag{24}$$

Это следует из неравенства

$$\|\varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon\|_{L_1(I_\varepsilon)} \leqslant \overline{Q}\|u^\varepsilon\|_{C(I_\varepsilon)}\|\varepsilon^{-1}\|_{L_1(I_\varepsilon)} \leqslant 2\overline{Q}M.$$

Действительно, $\|z'\|_{L_1(I_\varepsilon)} \leqslant \sqrt{2\varepsilon}(\overline{q}_2+\gamma_1)M + 2\overline{Q}M < 3\overline{Q}M$, (при малых ε)

$$z(x) = z(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^x z'\mathrm{d}x,$$

откуда выводим неравенства

$$\|z\|_{C(I_\varepsilon)} \leqslant (\overline{k}(M)+\overline{q}_2+\gamma_1)M + 3\overline{Q}M$$

и (24).

Следствие полностью доказано.

□

3. Доказательство теорем 1, 2.

Из (3) следует равенство $c(M)+c_1(M) = A$, тогда из (23), (24) имеем неравенства $|u_0'| \leqslant A$, $|(u^\varepsilon)'| \leqslant A$ и $|v'| \leqslant A$.

Положим $v = u^\varepsilon - u_0$. Вычтем из (17) соотношение (18) с пробной функцией $\widetilde{v}$ вместо v.

$$(u^\varepsilon,\widetilde{v})_{u^\varepsilon,1} - (u_0,\widetilde{v})_{u_0,0} = Du^\varepsilon(\widetilde{v}) - Du_0(\widetilde{v}).$$

Запишем последнее в развернутом виде для случая $I=(a,b)$

$$\begin{aligned}&\int\limits_I \left(\widetilde{v}'(k(x,u^\varepsilon)(u^\varepsilon)' - k(x,u_0)u_0') + (q_2(x)v + \varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon)\widetilde{v}\right)\mathrm{d}x - \\ &- \langle Q\rangle\, u_0(0)\widetilde{v}(0) + \widetilde{h}_a v(a)\widetilde{v}(a) + \widetilde{h}_b v(b)\widetilde{v}(b) = \\ &= \int\limits_I \widetilde{v}((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u_0) + q_1(x,u_0)) - (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u^\varepsilon) + q_1(x,u^\varepsilon)))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

После интегрирования по частям в интеграле справа, будем иметь

$$\int_I [\widetilde{v}' (v'k(x,u^\varepsilon) + (k(x,u^\varepsilon) - k(x,u_0))u_0') + (q_2(x)v + \varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon)\widetilde{v}]\mathrm{d}x = \tag{25}$$

$$= \int_I ((q_1(x,u_0) - q_1(x,u^\varepsilon))\widetilde{v} + (p(x,u^\varepsilon) - p(x,u_0))\widetilde{v}')\mathrm{d}x + \langle Q\rangle\, u_0(0)\widetilde{v}(0) +$$

$$+ (p(a,u^\varepsilon(a)) - p(a,u_0(a)))\,\widetilde{v}(a) - \widetilde{h}_a v(a)\widetilde{v}(a).$$

$$- (p(b,u^\varepsilon(b)) - p(b,u_0(b)))\,\widetilde{v}(b) - \widetilde{h}_b v(b)\widetilde{v}(b).$$

Проведем некоторые оценки. Ниже пробная функция $\widetilde{v}$ будет выбираться так, чтобы выполнялось неравенство $v(x)\widetilde{v}(x) \geqslant 0$, $x \in I$. Тогда

$$P_a = (p(a,u^\varepsilon(a)) - p(a,u_0(a)))\,\widetilde{v}(a) - \widetilde{h}_a v(a)\widetilde{v}(a) = (p_u(a,\nu) - \widetilde{h}_a)v(a)\widetilde{v}(a),$$

$\nu \in [u_0(a), u^\varepsilon(a)]$. Поэтому из (5) следует неравенство $P_a \leqslant 0$. Аналогично, $-(p(b,u^\varepsilon(b)) - p(b,u_0(b)))\,\widetilde{v}(b) - \widetilde{h}_b v(b)\widetilde{v}(b) \leqslant 0$. Далее,

$$\int_I |\widetilde{v}' ((k(x,u^\varepsilon) - k(x,u_0))u_0')| \leqslant K_k(2M)A \int_I |\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x,$$

$$\int_I |(p(x,u^\varepsilon) - p(x,u_0))\widetilde{v}'|\mathrm{d}x \leqslant K_p(2M) \int_I |\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x,$$

$$\int_I |q_1(x,u_0) - q_1(x,u^\varepsilon)|\widetilde{v}\mathrm{d}x \leqslant K_{q_1}(2M) \int_I v\widetilde{v}\mathrm{d}x.$$

Теперь из (25) выводим неравенство

$$\int_I [k_0\widetilde{v}'v' + ((q_0 - K_{q_1}(2M))v + \varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon)\widetilde{v}]\mathrm{d}x \leqslant \tag{26}$$

$$\leqslant (K_k(2M)A + K_p(2M)) \int_I |\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x + \langle Q\rangle\, u_0(0)\widetilde{v}(0).$$

Для доказательства теоремы 2 положим в этом соотношении $\widetilde{v} = v$ и воспользуемся неравенством (15). Получим

$$\int_I (k_0 - (K_k(2M)A + K_p(2M))/2)v'^2\mathrm{d}x + \tag{27}$$

$$+ \int_I ((q_0 - K_{q_1}(2M) - (K_k(2M)A + K_p(2M))/2)v^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant -\langle Q\rangle v^2(0) + 2\varepsilon^{1/2}\overline{Q}(\|(u^\varepsilon)'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|v\|_V + \|v'\|_{L_2(I_\varepsilon)}\|u^\varepsilon\|_V).$$

В силу (2) и (11) имеем неравенство $-\langle Q\rangle v^2(0) \leqslant \frac{m_{kq}}{4}\|v\|_V$. Пользуясь (2), (19), получаем из (27)

$$\frac{m_{kq}}{4}\|v\|_V \leqslant 2\varepsilon^{1/2}\overline{Q}(\|A\|_{L_2(I_\varepsilon)} + \|M\|_V)\|v\|_V,$$

откуда следует утверждение теоремы 2.

Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть, для определенности, $u^\varepsilon(0) \geqslant u_0(0)$. $v(0) \geqslant 0$.

Положим $\widetilde{v} = \max(0, v - v(0) - A\varepsilon)$. Очевидно, $v(x) = v(0) + \int_0^x v'\mathrm{d}x \leqslant v(0) + A\varepsilon$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому $\widetilde{v}(x) = 0$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Переопределим $\widetilde{v}(x) = 0$ при $x > 0$. Из (26) получим неравенство

$$\int\limits_{I_-}[k_0\widetilde{v}'v' + (q_0 - K_{q_1}(2M))v\widetilde{v}]\mathrm{d}x \leqslant \tag{28}$$

$$\leqslant (K_k(2M)A + K_p(2M))\int\limits_{I_-}|\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{I_-}|\widetilde{v}'v| \leqslant \int\limits_{v>v(0)+A\varepsilon}((v')^2/2 + v^2/2)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{v>v(0)+A\varepsilon}(\widetilde{v}'v'/2 + \widetilde{v}^2 + (v(0) + A\varepsilon)^2)\mathrm{d}x.$$

Теперь из (28) выводим неравенство

$$\left(k_0 - \frac{K_k(2M)A + K_p(2M)}{2}\right)\int\limits_{v>v(0)+A\varepsilon}(v')^2\mathrm{d}x +$$

$$+ (q_0 - K_k(2M)A - K_p(2M) - K_{q_1}(2M))\int\limits_{I_-}\widetilde{v}^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \left(K_k(2M)A + K_p(2M) + \frac{K_{q_1}(2M)}{2}\right)\int\limits_{I_-}(v(0) + A\varepsilon)^2\mathrm{d}x.$$

Поскольку $m_{kq} > 2K_k(2M)A + 2K_{q_1}(2M) + 2K_p(2M)$, то отсюда следует неравенство

$$\frac{m_{kq}}{2}\|\widetilde{v}\|^2_{C(I_-)} \leqslant \frac{m_{kq}}{2}\|\widetilde{v}\|^2_{W_2^1(I_-)} \leqslant C(v(0) + A\varepsilon)^2.$$

Поэтому $v(x) \leqslant C|v(0) + A\varepsilon|$, $x \in I_-$. Аналогично, полагая $\widetilde{v} = \max(0, -v - A\varepsilon)$, устанавливаем такое же неравенство для $-v(x)$ и тогда

$$|v(x)| \leqslant C|v(0) + A\varepsilon|, \; x \in I_-. \tag{29}$$

Конечно, эти неравенства справедливы и на отрезке $[0, b]$.

Если $0 \leqslant v(0) \leqslant 2A\varepsilon$, то из последнего неравенства следует оценка $|v(x)| < C\varepsilon$. Поэтому далее будем считать, что $v(0) > 2A\varepsilon$.

Для оценки $v(0)$ положим теперь $\widetilde{v} = \min(1, \max(0, \theta v))$, $\theta = (v(0) - A\varepsilon)^{-1}$. Заметим, что $v(x) = v(0) + \int_0^x v'\mathrm{d}x \geqslant v(0) - A\varepsilon$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому $\widetilde{v}(x) = 1$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Очевидно, что $\widetilde{v}' = \theta v'$ при $0 < v < v(0) - A\varepsilon$. Установим важное неравенство.

$$\int\limits_I \varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)u^\varepsilon\widetilde{v}\mathrm{d}x - \langle Q\rangle\, u_0(0)\widetilde{v}(0) = \int\limits_{I_\varepsilon}\varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)(u^\varepsilon - u_0(0))\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{I_\varepsilon}\varepsilon^{-1}Q(x/\varepsilon)(u^\varepsilon - u_\varepsilon(0) + v(0))\mathrm{d}x \geqslant v(0)\,\langle Q\rangle - 2\varepsilon A\overline{Q}.$$

Поэтому из (26) получаем соотношение

$$\int\limits_I [k_0\widetilde{v}'v' + (q_0 - K_{q_1}(2M))v\widetilde{v}]\mathrm{d}x \leqslant \tag{30}$$

$$\leqslant (K_k(2M)A + K_p(2M))\int\limits_I |\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x - v(0)\langle Q\rangle + 2\varepsilon A\overline{Q}.$$

Как и ранее, устанавливается оценка

$$\int\limits_I |\widetilde{v}'v|\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{0<v<v(0)-A\varepsilon} \theta((v')^2/2 + v^2/2)\mathrm{d}x.$$

Теперь из (30) получаем

$$\left(k_0 - \frac{K_k(2M)A}{2} - \frac{K_p(2M)}{2}\right)\int\limits_{0<v<v(0)-A\varepsilon} (\widetilde{v}')^2/\theta\mathrm{d}x +$$

$$+\left(q_0 - \frac{K_k(2M)A}{2} - K_{q_1}(2M) - \frac{K_p(2M)}{2}\right)\int\limits_I (\widetilde{v})^2/\theta\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant -v(0)\langle Q\rangle + 2\varepsilon A\overline{Q}.$$

Следовательно,

$$\frac{m_{kq}}{2\theta}\|\widetilde{v}\|^2_{C(I)} \leqslant \frac{m_{kq}}{2\theta}\|\widetilde{v}\|^2_{W_2^1(I_-)} \leqslant -v(0)\langle Q\rangle + 2\varepsilon A\overline{Q}.$$

Таким образом, в силу (2)

$$\frac{m_{kq}(v(0) - A\varepsilon)}{2} = \frac{m_{kq}}{2\theta}\|\widetilde{v}\|^2_{C(I)} \leqslant v(0)(\frac{m_{kq}}{4} + K_p(2M)) + 2\varepsilon A\overline{Q},$$

откуда следует неравенство $v(0) < C\varepsilon$. Соединяя это с (29), находим, что $|v(x)| < C\varepsilon$.

В случае когда $u^\varepsilon(0) < u_0(0)$, следует положить $v = -u^\varepsilon + u_0$ и повторить приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F.Kh. Mukminov, T.R. Gadylshin *Boundary-value problem for a second-order nonlinear equation with delta-like potential* // Proc. Steklov Inst. Math., 292:1 (2016). P. 216–230.
2. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Horgh-Krohn, H. Holder, P. Exner *Solvable Models in Quantum Mechanics*. AMS Chelsea Publ. 2004. 488 p.
3. Гадыльшин Р.Р., Хуснуллин И.Х. *Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом* // Уфимский математический журнал, 3:3 (2011) С. 55–66.
4. Гадыльшин Т.Р. *Краевые задачи для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим и дельта-образным потенциалами* // Матем. заметки, 98:6 (2015) С. 842–852.
5. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки, 66:6 (1999). С. 897–912.
6. Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. *Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями* // Матем. заметки, 99:56 (2016) С. 788–793.
7. Костенко А.С., Маламуд М.М. *Об одномерном операторе Шрёдингера с δ-взаимодействиями* // Функц. анализ и его прил., 44:2 (2010) С. 87–91.
8. C.N. Friedman *Perturbation of the Shrodinquer equation by potentials with small support* // J. Functional Analysis,10:3 (1972) P. 346–360.
9. Чуешов И.Д. *О возмущении оператора Шредингера потенциалами с малыми носителями* // Матем. заметки, 20:5 (1976) С. 675–680.

10. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. *Замечание о уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* // ДАН СССР, 137:5 (1961) С. 1011–1014.
11. Фрагела А.К. *О возмущении полигармонического оператора с дельтаобразными потенциалами* // Матем. сб., 130:3 (1986) С. 386–393.
12. Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А. *Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов* // Матем. заметки, 66:5 (1999). С. 723–733.
13. M.I. Neiman-zade and A.A. Shkalikov *Strongly Elliptic Operators with Singular Coefficients* // Russian Journal of Mathematical Physics, 13:1 (2006). P. 70–78.
14. V.G. Maz'ya and I.E. Verbitsky *Form Boundedness of the General Second Order Differential Operator* // http://www.arxiv.org/math.AP/0411216v1 (2004).
15. Вишик М.И. *Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму* // Тр. ММО, 12 (1963). С. 125–184.
16. Кожевникова Л.М. *Об энтропийном решении эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:3 (2017), С. 429–447.
17. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1971. 512 с.

Тимур Рустемович Гадыльшин,
УГАТУ,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gtimr@yandex.ru

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru