ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 109-117.

УДК 519.64.7

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛИНОМАМИ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

А.И. ФЕДОТОВ

Аннотация. Сингулярные интегральные и интегродифференциальные уравнения имеющие обширные приложения исследовались отечественными и зарубежными математиками с начала 20-го столетия, и к 70-м годам была построена их законченная теория. Из этой теории известно, что такие уравнения имеют точные решения лишь в редких частных случаях, поэтому большое развитие получили приближенные методы решения этих уравнений, а также методики обоснования приближенных методов. Под обоснованием приближенного метода решения операторных уравнений здесь понимается доказательство существования и единственности приближенного решения, оценка его погрешности и доказательство сходимости приближенных решений к точному. Кроме того, для сравнений приближенных методов решения была создана теория их оптимизации.

Однако зачастую, в зависимоти от конкретной задачи, существенную роль играет также вид приближенного решения. В частности, иногда желательно иметь приближенное решение в виде сплайна, иногда в виде полинома, иногда достаточно значений искомой функции в узлах. Естественно, что в зависимости от выбора вида приближенного решения выбирается и методика обоснования такого приближенного метода. Однако арсенал методик обоснования приближенных методов пока еще скуден, и поэтому теория обоснования находится в настоящее время в стадии интенсивной разработки.

В данной работе обоснован приближенный метод решения полных сингулярных интегродифференциальных уравнений в периодическом случае. Приближенное решение при этом ищется в виде тригонометрического интерполяционного полинома Эрмита–Фейера. Для обоснования этого приближенного метода использована методика разработанная Б.Г. Габдулхаевым и его учениками для обоснования приближенных методов решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений. Доказана сходимость метода, получены оценки погрешности приближенного решения.

Ключевые слова: сингулярные интергродифференциальные уравнения, обоснование приближенных методов.

Mathematics Subject Classification: 65R20

1. Введение

Алгебраические интерполяционные полиномы с кратными узлами, носящие название полиномов Эрмита, хорошо исследованы и успешно используются для решения широкого круга прикладных задач. Их тригонометрический аналог исследован значительно хуже и многие вопросы, касающиеся существования, единственности и аппроксимативных свойств таких полиномов, до сих пор остаются открытыми.

A.I. Fedotov, Approximation of solutions to singular integro-differential equations by Hermite-Fejer polynomials.

Поступила 24 мая 2017 г.

Первые исследования тригонометрических интерполяционных полиномов с кратными узлами начались, по-видимому, с конца 30-х годов прошлого столетия. С. М. Лозинский [1] рассматиривал вопросы приближения функций комплексной переменной регулярных внутри единичного круга и непрерывных на его границе тригонометрическими интерполяционными полиномами с кратными узлами, расположенными на единичной окружности. Он же впервые назвал такие полиномы полиномами Эрмита-Фейера. Э.О. Зеель [2,3], обобщая результаты предшественников [4–7], доказал существование тригонометрических интерполяционных полиномов по системе равноотстоящих узлов произвольной кратности $m > 0$ для действительнозначных 2π-периодических функций и указал способ построения соответствующих фундаментальных полиномов. Кроме того, он получил условия равномерной сходимости таких полиномов к интерполируемой функции в зависимости от ее гладкости и четности или нечетности m.

Б. Г. Габдулхаев [8] получил в удобной форме неулучшаемые, в смысле порядка, оценки скорости сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов первой кратности в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Кроме того, в этой работе он впервые исследовал свойства квадратурных формул для сингулярных интегралов с ядром Гильберта, полученных при кратном интерполировании плотности. Опираясь на результаты работы [3] и используя методику Б. Г. Габдулхаева [8], Ю. С. Солиев [9–11] систематически исследовал квадратурные формулы с узлами различной кратности для сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта.

Для приближенного решения операторных уравнений до настоящего времени полиномы Эрмита-Фейера использовались только в работах автора [12, 13].

В данной работе построена вычислительная схема и дано обоснование метода коллокаций для полного сингулярного интегродифференциального уравнения в периодическом случае. Доказана сходимость метода, получены эффективные оценки погрешности приближенного решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{1}(a_\nu(t)x^{(\nu)}(t)+b_\nu(t)(Jx^{(\nu)})(t)+(J_0h_\nu x^{(\nu)})(t))=y(t),\ t\in[0,2\pi], \tag{2.1}$$

где x – искомая, a_ν, b_ν, h_ν (по обеим переменным), $\nu=0,1$, и y – известные непрерывные 2π-периодические функции, сингулярные интегралы

$$(Jx^{(\nu)})(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau,\ \nu=0,1,\ t\in[0,2\pi],$$

понимаются в смысле главного значения по Коши-Лебегу, а

$$(J_0h_\nu x^{(\nu)})(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau,\ \nu=0,1,\ t\in[0,2\pi],$$

являются регулярными интегралами.

3. Вычислительная схема

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел дополненных нулем, $\mathbb{R}$ множество действительных чисел и $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Приближенное решение задачи (2.1) будем искать в виде тригонометрического полинома Эрмита-Фейера

$$x_n(t) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k} + x'_{2k}\sin(t-t_{2k}))\frac{\sin^2\dfrac{n}{2}(t-t_{2k})}{\sin^2\dfrac{t-t_{2k}}{2}},\ t\in[0,2\pi], \tag{3.1}$$

где t_{2k}, $k = 0, 1..., n-1$, – узлы с четными номерами сетки

$$t_k = \frac{\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, ..., 2n-1. \tag{3.2}$$

Неизвестные коэффициенты x_{2k}, x'_{2k}, $k = 0, 1..., n-1$, полинома (3.1) найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{1}(a_\nu(t_k)x_n^{(\nu)}(t_k) + b_\nu(t_k)(Jx_n^{(\nu)})(t_k) + (J^0P_{2n}^\tau(h_\nu x_n^{(\nu)}))(t_k)) = \tag{3.3}$$

$$= y(t_k), \quad k = 0, 1, ..., 2n-1,$$

где

$$P_{2n}^\tau(h_\nu x_n^{(\nu)})(t,\tau) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}h_\nu(t,t_k)x_n^{(\nu)}(t_k)\frac{\sin n(\tau-t_k)\cos\dfrac{\tau-t_k}{2}}{\sin\dfrac{\tau-t_k}{2}},$$

$$\nu = 0, 1,\ t,\tau\in[0,2\pi],$$

примененный по переменной τ к функциям $h_\nu x_n^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1$, интерполяционный оператор Лагранжа P_{2n} по узлам (3.2). При этом [1]

$$(Jx_n)(t_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha^0_{0,k-2j}x_{2j} + \alpha^1_{0,k-2j}x'_{2j}), \quad k = 0, 1, ..., 2n-1,$$

$$\alpha^0_{0,r} = \{-\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2n} \quad \text{при} \quad r\neq 0, \quad 0 \quad \text{при} \quad r = 0\},$$

$$\alpha^1_{0,r} = \{-\frac{1}{n} \quad \text{при} \quad r\neq 0, \quad 2-\frac{1}{n} \quad \text{при} \quad r = 0\};$$

$$(Jx'_n)(t_{2k}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha^0_{1,2k-2j}x_{2j} + \alpha^1_{1,2k-2j}x'_{2j}), \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$(Jx'_n)(t_{2k+1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^0_{1,2k-2j+1}x_{2j}, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$\alpha^0_{1,r} = \{\operatorname{cosec}^2\frac{r\pi}{2n} \quad \text{при} \quad r\neq 0, \quad -\frac{n^2-1}{3} \quad \text{при} \quad r = 0\},$$

$$\alpha^1_{1,r} = \{(-1)^r\operatorname{cosec}\frac{r\pi}{2n} \quad \text{при} \quad r\neq 0, \quad 0 \quad \text{при} \quad r = 0\};$$

$$(J^0P_{2n}^\tau(h_\nu x_n^{(\nu)}))(t_k) = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1}h_\nu(t_k,t_j)x_n^{(\nu)}(t_j),\ \nu = 0, 1, \quad k = 0, 1, ..., 2n-1.$$

[1]Отметим, что в работе [8] формулы (4), (5) и (6) – тригонометрический интерполяционный полином с узлами первой кратности, квадратурная формула, построенная на основе этого полинома, и соответствующая квадратурная сумма – приведены с опечатками. Квадратурную сумму без опечаток можно найти, например, в диссертации [11], полином и квадратурную сумму – в данной работе.

4. Вспомогательные результаты

Обозначим C множество непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой

$$\|f\|_{\mathrm{C}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\ f(t)\ |,\ f \in \mathrm{C}.$$

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ обозначим $\mathrm{C}^m \subset \mathrm{C}$ множество функций, имеющих на $\mathbb{R}$ ограниченную m-ю производную ($\mathrm{C}^0 = \mathrm{C}$). Норму на множестве C^m определим соотношением

$$\|f\|_{\mathrm{C}^m} = \max_{0\leqslant\nu\leqslant m} \|f^{(\nu)}\|_{\mathrm{C}},\ f \in \mathrm{C}^m.$$

Множество функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, будем обозначать H_α. Для функций из H_α определим величину

$$H(f;\alpha) = \sup_{\substack{t\neq\tau\\ t,\tau\in\mathbb{R}}} \frac{|\ f(t) - f(\tau)\ |}{|\ t-\tau\ |^\alpha}.$$

Это наименьшая постоянная условия Гёльдера функции $f \in \mathrm{H}_\alpha$. Введенная величина позволяет определить норму на множестве H_α, а именно

$$\|f\|_{\mathrm{H}_\alpha} = \max\{\|f\|_{\mathrm{C}}, H(f;\alpha)\}.$$

Из множества функций C^m для фиксированой постоянной $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, выделим подмножество функций H^m_α, производные порядка m которых удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\ f^{(m)}(t) - f^{(m)}(\tau)\ | \leqslant H(f^{(m)};\alpha)\ |\ t-\tau\ |^\alpha,\ t,\tau \in \mathbb{R}.$$

Норму на множестве H^m_α ($\mathrm{H}^0_\alpha = \mathrm{H}_\alpha$) определим соотношением

$$\|f\|_{\mathrm{H}^m_\alpha} = \max\{\|f\|_{\mathrm{C}^m}, H(f^{(m)};\alpha)\}.$$

Обозначим $\mathcal{T}_n$ множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n. Ниже нам понадобятся две леммы, которые следуют из результатов работы [14].

Лемма 4.1. *Пусть числа $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, и $m, r \in \mathbb{N}_0$, $m \leqslant r$, таковы, что $m+\beta \leqslant r+\alpha$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой функции $x \in \mathrm{H}^r_\alpha$ справедлива оценка* [1]

$$\|x - T_n\|_{\mathrm{H}^m_\beta} \leqslant cn^{m-r-\alpha+\beta} H(x^{(r)};\alpha),$$

где $T_n \in \mathcal{T}_n$ – полином наилучшего равномерного приближения функции x.

Лемма 4.2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \leqslant 1$, и произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ справедлива следующая оценка:*

$$\|T_n\|_{\mathrm{H}_\beta} \leqslant (1 + 2^{1-\beta} n^\beta)\|T_n\|_{\mathrm{C}}.$$

Далее, оператор P_{2n} точен для любого тригонометрического полинома степени $n-1$ и, как показано в [15, 16], обладает следующими свойствами:

$$\|P_{2n}\|_{\mathrm{H}^m_\beta\to\mathrm{H}^m_\beta} \leqslant c\|P_{2n}\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{C}} \leqslant c\ln n \tag{4.1}$$

для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \leqslant 1$, и произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$.

[1] Здесь и далее c обозначает вполне определенные константы не зависящие от n, возможно различные в разных вхождениях.

5. Обоснование метода

Для вычислительной схемы (3.1)–(3.3) уравнения (2.1) справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть для уравнения (2.1) выполнены следующие условия:*

A1 *функции a_ν, b_ν, $\nu = 0, 1$, и y удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$; функции h_ν, $\nu = 0, 1$, удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем α по каждой переменной равномерно относительно другой переменной,*

A2 $a_1^2(t) + b_1^2(t) \neq 0, \quad t \in [0, 2\pi]$,

A3 $\kappa = \mathrm{ind}(a_1 + ib_1) = 0$,

A4 *уравнение (2.1) имеет единственное решение $x^* \in \mathrm{H}^1_\beta$, при любой правой части $y \in \mathrm{H}_\beta$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$.*

Тогда при достаточно больших система уравнений (3.3) однозначно разрешима и приближенные решения x^*_n сходятся к точному решению x^* уравнения (2.1) по норме пространства H^1_β при $n \to \infty$ со скоростью

$$\|x^* - x^*_n\|_{\mathrm{H}^1_\beta} \leqslant cn^{-\alpha+\beta} \ln n, \quad 0 < \beta < \alpha \leqslant 1.$$

Доказательство. Покажем вначале, что предложение **A4** теоремы 1 непусто в том смысле, что имеются уравнения рассматриваемого класса для которых это условие выполняется.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$a_1(t)(x'(t) + x(t)) + b_1(t)((Jx')(t) + (Jx)(t)) = y(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{5.1}$$

Известно [17], что характеристический оператор

$$Bx \equiv a_1(t)x(t) + b_1(t)(Jx)(t), \quad B : H_\beta \to H_\beta,$$

уравнения (5.1) обратим, и обратный оператор $B^{-1} : H_\beta \to H_\beta$ может быть выписан в явном виде. Применим оператор B^{-1} к обеим частям уравнения (5.1). Получим равносильное ему уравнение

$$x'(t) + x(t) = (B^{-1}y)(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{5.2}$$

В паре пространств (H^1_β, H_β), уравнение (5.2) является уравнением Фредгольма. Однородное уравнение

$$x'(t) + x(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

в пространстве действительнозначных функций имеет решение $x(t) = ce^{-t}$, $t \in [0, 2\pi]$, однако это решение не является периодическим при $c \neq 0$, поэтому единственное подходящее значение $c = 0$, то есть однородное уравнение в пространстве периодических функций H^1_β имеет только нулевое решение. Это означает, что уравнение (5.2), а следовательно и уравнение (5.1), однозначно разрешимы при любой правой части $y \in H_\beta$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$.

Дальнейшее доказательство теоремы 1 проведем методом работ [18, 19].

Зафиксируем $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, и пусть $\mathrm{X} = \mathrm{H}^1_\beta$, $\mathrm{Y} = \mathrm{H}_\beta$. Тогда задачу (2.1), можно записать в виде операторного уравнения

$$Qx = y, \quad Q : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}. \tag{5.3}$$

Каждой функции $x \in \mathrm{X}$ поставим в соответствие интеграл типа Коши вида

$$\Phi(z) = \Phi(x; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\tau)d\tau}{1 - z\exp(-i\tau)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $x^+(t)$ и $x^-(t)$ предельные значения функции $\Phi(z)$ при стремлении z к точке $\exp(it)$ по любым путям соответственно изнутри и извне единичной окружности. Для функций x^+ и x^- справедливы формулы Сохоцкого [1]

$$x^\pm(t) = \frac{1}{2}((\pm I - iJ)x)(t) + \frac{1}{2}J_0 x, \ t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

[1] I обозначает тождественный оператор.

Дифференцируя (5.4) и используя известные формулы

$$(x'(t))^{\pm} = (x^{\pm}(t))', \quad (Jx)'(t) = (Jx')(t),$$

имеем

$$x'(t) = x'^{+}(t) - x'^{-}(t), \quad (Jx')(t) = i(x'^{+}(t) + x'^{-}(t)). \tag{5.5}$$

В силу условий **A2**, **A3** согласно [20]

$$\frac{a_1 - ib_1}{a_1 + ib_1} = \frac{\psi^+}{\psi^-},$$

где

$$\psi(z) = e^{\theta(z)}, \quad \theta(z) = \Phi(u; z), \quad u = \ln\frac{a_1 - ib_1}{a_1 + ib_1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда, используя (5.5), характеристическую часть уравнения (2.1) можно представить в виде [17, 20]

$$a_1(t)x'(t) + b_1(t)(Jx')(t) = \frac{(a_1(t) + ib_1(t))}{\psi^-(t)}(\psi^-(t)x'^{+}(t) - \psi^+(t)x'^{-}(t)).$$

Уравнение (2.1) или, что одно и то же, уравнение (5.3) запишем в виде эквивалентного им операторного уравнения

$$Kx \equiv Ux + Vx = f, \quad K : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}, \tag{5.6}$$

где

$$Ux = \psi^- x'^{+} - \psi^+ x'^{-}, \quad Vx = Ax + Bx + Wx,$$

$$Ax = v^{-1}a_0 x, \quad Bx = v^{-1}b_0 Jx, \quad Wx = v^{-1}\sum_{\nu=0}^{1} J^0 h_\nu x^{(\nu)},$$

$$f = v^{-1}y, \quad v = \frac{a_1 + ib_1}{\psi^-},$$

причем, по условию **A2** теоремы 1, $v(t) \neq 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что уравнения (2.1) и (5.6) разрешимы или нет одновременно и их решения совпадают.

Пусть $\mathrm{X}_n \subset \mathcal{T}_n$ множество тригонометрических полиномов вида (3.1), а $\mathrm{Y}_n = P_{2n}\mathrm{Y} \subset \mathcal{T}_n$. Тогда система уравнений (3.3) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv U_n x_n + V_n x_n = f_n, \quad K_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_n, \tag{5.7}$$

где

$$U_n = P_{2n}U, \quad V_n x_n = P_{2n}Ax_n + P_{2n}Bx_n + W_n x_n,$$

$$W_n x_n = P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1} J_0(P_{2n}^{\tau}(h_\nu x_n^{(\nu)})), \quad f_n = P_{2n}f.$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что если система уравнений (3.3) имеет решение $x_{2k}^*, x_{2k}'^*$, $\quad k = 0, 1, ..., n-1$, то уравнение (5.7) также будет иметь решение, совпадающее с полиномом

$$x_n^*(t) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{2k}^* + x_{2k}'^*\sin(t - t_{2k}))\frac{\sin^2\dfrac{n}{2}(t - t_{2k})}{\sin^2\dfrac{t - t_{2k}}{2}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Установим близость операторов K и K_n на X_n.

Для любого $x_n \in \mathrm{X}_n$, используя полином наилучшего равномерного приближения $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ для функции Ax_n, получим

$$\|Ax_n - P_{2n}Ax_n\|_{\mathrm{Y}} \leqslant (1 + \|P_{2n}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}})\|Ax_n - T_{n-1}\|_{\mathrm{Y}}. \tag{5.8}$$

Теперь, учитывая структурные свойства функции Ax_n, оценим

$$H(Ax_n;\alpha)\leqslant c(\|x_n\|_C+\|x_n'\|_{\mathrm{C}})\leqslant c\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.9}$$

Из (5.8), используя лемму 1, оценку (4.1) и учитывая (5.9), найдем

$$\|Ax_n-P_{2n}Ax_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.10}$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\|Bx_n-P_{2n}Bx_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.11}$$

Учитывая тригонометрическую степень точности использованных в (3.3) квадратурных формул для регулярных интегралов, можно записать

$$\|Wx_n-W_nx_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant \|\sum_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}-P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0P_{2n}^{\tau}(h_\nu x_n^{(\nu)})\|_{\mathrm{Y}}\leqslant \tag{5.12}$$

$$\leqslant \|\sum_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}-P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0(h_\nu x_n^{(\nu)})\|_{\mathrm{Y}}+\|P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0(x_n^{(\nu)}(h_\nu-P_{2n}^{\tau}h_\nu))\|_{\mathrm{Y}}.$$

Теперь, используя полином наилучшего равномерного приближения $T_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}$ для функции $\sum\limits_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}$, получим

$$\|\sum_{\nu=0}^{1}J^0(h_\nu x_n^{(\nu)})-P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0(h_\nu x_n^{(\nu)})\|_{\mathrm{Y}}\leqslant(1+\|P_{2n}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}})\|\sum_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}-T_{n-1}\|_{\mathrm{Y}}. \tag{5.13}$$

Учитывая структурные свойства функции $h_\nu(t,\tau)$ по переменной t, легко показать, что

$$H(\sum_{\nu=0}^{1}J^0(h_\nu x_n^{(\nu)});\alpha)\leqslant c\sum_{\nu=0}^{1}\|x_n^{(\nu)}\|_{\mathrm{C}}\leqslant c\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.14}$$

Из (5.13) и (5.14), используя лемму 1 и оценку (4.1), найдем

$$\|\sum_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}-P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0h_\nu x_n^{(\nu)}\|_{\mathrm{Y}}\leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.15}$$

Далее, учитывая структурные свойства функций $h_\nu(t,\tau)$ по переменной τ, оценку погрешности использованных квадратурных формул и лемму 2, для второго слагаемого правой части оценки (5.12) получим

$$\|P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1}J^0(x_n^{(\nu)}(h_\nu-P_{2n}^{\tau}h_\nu))\|_{\mathrm{Y}}\leqslant \tag{5.16}$$

$$\leqslant c(n^{\beta}\ln n)\|\sum_{\nu=0}^{1}J^0(x_n^{(\nu)}(h_\nu-P_{2n}^{\tau}h_\nu))\|_{\mathrm{C}}\leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}.$$

Наконец, используя оценки (5.12), (5.15) и (5.16), найдем

$$\|Wx_n-W_nx_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \tag{5.17}$$

Обозначим через $\psi_{n-1}(t)\in\mathcal{T}_{n-1}$ полином наилучшего равномерного приближения функции $\psi(t)$. Используя вспомогательный оператор

$$\bar{U}_n:\mathrm{X}_n\to\mathrm{Y}_n,\quad \bar{U}_nx_n=\psi_{n-1}^{-}x_n'^{+}-\psi_{n-1}^{+}x_n'^{-},$$

найдем

$$\|Ux_n-U_nx_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant(1+\|P_{2n}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}})\|Ux_n-\bar{U}_nx_n\|_{\mathrm{Y}}. \tag{5.18}$$

Далее, имеем

$$\|Ux_n-\bar{U}_nx_n\|_{\mathrm{Y}}\leqslant\|(\psi^{-}-\psi_{n-1}^{-})x_n'^{+}\|_{\mathrm{Y}}+\|(\psi^{+}-\psi_{n-1}^{+})x_n'^{-}\|_{\mathrm{Y}}. \tag{5.19}$$

Каждое из слагаемых правой части (5.19) оценим, применяя лемму 1, следующим образом:

$$\|(\psi^{\mp} - \psi^{\mp}_{n-1})x'^{\pm}_n\|_{\mathrm{Y}} \leqslant \|\psi^{\mp} - \psi^{\mp}_{n-1}\|_{\mathrm{Y}}\|x'^{\pm}_n\|_{\mathrm{Y}} \leqslant cn^{-\alpha+\beta}\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \quad (5.20)$$

Теперь, с учетом (5.19), (5.20) и (4.1), неравенство (5.18) примет вид

$$\|Ux_n - U_nx_n\|_{\mathrm{Y}} \leqslant c(n^{-\alpha+\beta}\ln n)\|x_n\|_{\mathrm{X}}. \quad (5.21)$$

Окончательно, используя оценки (5.10), (5.11), (5.17) и (5.21), получим

$$\|K - K_n\|_{\mathrm{X}_n\to\mathrm{Y}} \leqslant cn^{-\alpha+\beta}\ln n.$$

Поскольку операторы Q и K обратимы или нет одновременно и

$$\|K^{-1}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{X}} \leqslant \|v\|_{\mathrm{Y}}\|Q^{-1}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{X}}, \quad (5.22)$$

то для достаточно больших n имеем

$$\|K^{-1}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{X}}\|K - K_n\|_{\mathrm{X}_n\to\mathrm{Y}} \leqslant cn^{-\alpha+\beta}\ln n \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для таких n в силу теоремы 1.1 работы [19] существуют операторы $K_n^{-1} : \mathrm{Y}_n \to \mathrm{X}_n$, и они ограничены. Кроме того, для правых частей уравнений (5.6), (5.7) по аналогии с (5.8), используя условие **A1** теоремы 1, лемму 1 и оценку (4.1), получим

$$\|y - y_n\|_{\mathrm{Y}} = \|y - P_{2n}y\|_{\mathrm{Y}} \leqslant cn^{-\alpha+\beta}\ln n. \quad (5.23)$$

Теперь, используя следствие теоремы 1.2 работы [19] для решений x^* и x_n^* уравнений (5.6), (5.7), учитывая оценки (5.22), (5.23), найдем

$$\|x^* - x_n^*\|_{\mathrm{X}} \leqslant cn^{-\alpha+\beta}\ln n.$$

Теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1 функции a_ν, b_ν, h_ν (по обеим переменным), $\nu = 0, 1$, и $y \in \mathrm{H}^r_\alpha$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда приближенные решения x_n^* сходятся к точному решению x^* уравнения (2.1) при $n \to \infty$ по норме пространства H^1_β со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{\mathrm{H}^1_\beta} \leqslant cn^{-r-\alpha+\beta}\ln n, \quad r + \alpha > \beta. \quad (5.24)$$

Доказательство. Используя теорему 6 из [18], запишем

$$\|x^* - x_n^*\|_{\mathrm{X}} \leqslant (1 + \|K_n^{-1}P_{2n}K\|)\|x^* - \bar{x}_n\|_{\mathrm{X}} + \|K_n^{-1}\|\|K_n\bar{x}_n - P_{2n}K\bar{x}_n\|_{\mathrm{Y}}, \quad (5.25)$$

где $\bar{x}_n$ – произвольный элемент из X_n. В условиях следствия 1 решение x^* уравнения (2.1) таково, что $x^{*\prime} \in \mathrm{H}^r_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ и $x^{*(r+1)} \in Z$ при $\alpha = 1$ (Z – класс Зигмунда). Тогда, взяв в качестве $\bar{x}_n \in \mathcal{T}_n$ полином наилучшего равномерного приближения для функции x^* и используя лемму 1, для первого слагаемого правой части (5.25) найдем

$$(1 + \|K_n^{-1}P_{2n}K\|)\|x^* - \bar{x}_n\|_{\mathrm{X}} \leqslant cn^{-r-\alpha+\beta}\ln n. \quad (5.26)$$

Учитывая структурные свойства функций $h_\nu(t,\tau)$, $\nu = 0, 1$, по переменной τ, оценку погрешности квадратурных формул, используя лемму 2 и оценку (4.1) для второго слагаемого правой части неравенства (5.25), получим

$$\begin{aligned} \|K_n\bar{x}_n - P_{2n}K\bar{x}_n\|_{\mathrm{Y}} &= \|W_n\bar{x}_n - P_{2n}W\bar{x}_n\|_{\mathrm{Y}} \leqslant \quad (5.27)\\ &\leqslant \|P_{2n}\sum_{\nu=0}^{1} J_0(\bar{x}_n^{(\nu)}(h_\nu - P^\tau_{2n}h_\nu))\|_{\mathrm{Y}} \leqslant \\ &\leqslant c(n^\beta \ln n)\|\sum_{\nu=0}^{1} J_0(\bar{x}_n^{(\nu)}(h_\nu - P^\tau_{2n}h_\nu))\|_{\mathrm{C}} \leqslant c(n^{-r-\alpha+\beta})\ln n\|\bar{x}_n\|_{\mathrm{X}}. \end{aligned}$$

Теперь, подставляя в (5.25) оценки (5.26) и (5.27) и учитывая, что

$$\|\bar{x}_n\|_{\mathrm{X}} \leqslant \|x^*\|_{\mathrm{X}} + \|x^* - \bar{x}_n\|_{\mathrm{X}} \leqslant \|x^*\|_{\mathrm{X}} + cn^{-r-\alpha+\beta},$$

убедимся в справедливости оценки (5.24). Следствие 1 доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозинский С.М. *Об интерполяционном процессе Fejer'a* // ДАН СССР. Т. 24. № 4. 1939. С. 318–321.
2. Зеель Э.О. *О тригонометрическом* $(0,p,q)$*-интерполировании* // Изв. вузов. Математика. № 3. 1970. С. 27–35.
3. Зеель Э.О. *О кратном тригонометрическом интерполировании* // Изв. вузов. Математика. № 3. 1974. С. 43–51.
4. Киш О. *О тригонометрическом* $(0,r)$*-интерполировании* // Acta math. Acad. scient. Hung. V. 11. № 3–4. 1960. P. 243–276.
5. A. Sharma, A.K. Varma *Trigonometric interpolation* // Duke math. j. V. 32. № 2. 1965. P. 341–357.
6. A.K. Varma *Trigonometric interpolation* // J. math. analysis and applic. V. 28. № 3. 1969. P. 652–659.
7. H.E. Salzer *New formulas for trigonometric interpolation* // J. math and phys. V. 39. № 1. 1960. P. 83–96.
8. Габдулхаев Б.Г. *Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов* // ДАН СССР. Т. 227. № 3. 1976. С. 531–534.
9. Солиев Ю. *О квадратурных и кубатурных формулах для сингулярных интегралов с ядрами Коши* // Изв. вузов. Математика. № 3. 1977. С. 108–122.
10. Солиев Ю. *Об интерполяционных кубатурных формулах с кратными узлами для сингулярных интегралов* // Изв. вузов. Математика. № 9. 1977. С. 122–126.
11. Солиев Ю. *Квадратурные и кубатурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов.* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 1978. 124 с.
12. Федотов А.И. *Аппроксимация решений одного класса сингулярных интгро-дифференциальных уравнений тригонометрическими полиномами с кратными узлами*, Казан. ун-т. Казань, Деп. в ВИНИТИ № 2483 – В86. 1986. 12 с.
13. Федотов А.И. *Об одном подходе к построению квадратурно-разностного метода решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 29. № 7. 1989. С. 978–986.
14. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация в* H*-пространствах и приложения* // ДАН СССР. Т. 223. № 6. 1975. С. 1293–1296.
15. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ, Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1980. С. 251–307.
16. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1980. 232 с.
17. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* М.: Наука. 1977. 640 с.
18. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы терии приближенных методов, IV* // Изв. вузов. Математика. № 6. 1971. С. 15–23.
19. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I-IV* // Изв. вузов. Математика. № 11. 1971. С. 33–44; Изв. вузов. Математика. № 12. 1971. С. 28–38; Изв. вузов. Математика. № 3. 1972. С. 18–31; Изв. вузов. Математика. № 4. 1972. С. 32–43.
20. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. 1968. 512 с.

Александр Иванович Федотов,
Казанский филиал московского социально-гуманитарного института,
ул. Столярова, 3,
420030, г. Казань, Россия
E-mail: `fedotovkazan@mail.ru`