ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 3-12.

УДК 517.538

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

А.А. БОБОДЖАНОВ, В.Ф. САФОНОВ

Аннотация. Метод регуляризации Ломова обобщается на уравнения в частных производных с интегральными операторами, ядро которых содержит быстро изменяющийся экспоненциальный множитель. Исследуется случай, когда верхний предел интегрального оператора совпадает с переменной дифференцирования. Для таких задач развивается алгоритм построения регуляризованной асимптотики. В отличие от работ М.И. Иманалиева, где для аналогичных задач с медленно изменяющимися ядрами исследуется только предельный переход при стремлении малого параметра к нулю, здесь строится асимптотическое решение любого порядка (по параметру). Отметим, что метод регуляризации Ломова применялся в основном для обыкновенных сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений (см. подробную библиографию в конце статьи). В одной из работ авторов был рассмотрен случай уравнения в частных производных с медленно изменяющимися ядрами. Разработка этого метода для уравнений частных производных с быстро изменяющимися ядрами ранее не проводилась. Тип верхнего предела интегрального оператора в таких уравнениях порождает две принципиально разные ситуации. Наиболее трудной является ситуация, когда верхний предел оператора интегрирования не совпадает с переменной дифференцирования. Как показали исследования, в этом случае у интегрального оператора могут возникнуть характеристические значения, и для построения асимптотики потребуются более жесткие условия на исходные данные задачи. Ясно, что эти трудности возникают и при исследовании интегродифференциальной системы с быстро изменяющимся ядром, поэтому в данной работе сознательно избегается случай зависимости верхнего предела интегрального оператора от переменной x. Кроме того, предполагается, что та же закономерность наблюдается и в быстро убывающей экспоненте ядра интегрального оператора. Любые отклонения от этих (казалось бы незначительных) ограничений сильно усложняют задачу с точки зрения построения ее асимптотического решения. Предполагается, что в дальнейшем в наших работах будут продолжены исследования в направлении ослабления этих ограничений.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегродифференциальное уравнение, регуляризация интеграла.

Mathematics Subject Classification: 35R09, 45K05

A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, Regularized asymptotics of solutions to integro-differential partial differential equations with rapidly varying kernels.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Поступила 19 мая 2017 г.

В настоящей работе рассматривается интегродифференциальная система

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial y(t,x,\varepsilon)}{\partial t}=A\left(t\right)y\left(t,x,\varepsilon\right)+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)\,d\theta}K\left(t,x,s\right)y\left(s,x,\varepsilon\right)ds+h\left(t,x\right),\\ y\left(0,x,\varepsilon\right)=y^0\left(x\right)\ \left(\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\left[0,X\right]\right),\end{gathered}\tag{1}$$

с быстро изменяющимся ядром. Ставится задача о построении регуляризованного (по С.А. Ломову; см. [1], стр. 35, 137–144) асимптотического решения задачи (1). Ранее рассматривались в основном системы для обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися ядрами ($\mu(t)\equiv 0$; см. подробную библиографию в [2–3]). В работе [4] (стр. 53–61) для случая $\mu(t)\equiv 0$ исследовался лишь предельный переход при $\varepsilon\to+0$ в интегродифференциальной системе в частных производных, а в работе [5] для указанного случая строилась регуляризованная асимптотика любого порядка по ε.

Переходя к разработке алгоритма построения регуляризованных асимптотических решений для системы типа (1) с быстро изменяющимся ядром, отметим, что зависимость матрицы A от переменной x существенно не влияет на развитие этого алгоритма. Возникают лишь вычислительные трудности; основные же идеи разработки алгоритма остаются неизменными. Поэтому с самого начала будем предполагать, что матрица A не зависит от x. Кроме того, не умаляя общности, можно считать, что $T=X=1$.

§1. Регуляризация задачи (1)

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) матрица $A\left(t\right)\in C^\infty\left(\left[0,1\right],\mathbb{C}^{n\times n}\right)$, функция $h\left(t,x\right)\in C^\infty\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right],\mathbb{C}^n\right)$, функция $\mu\left(t\right)\in C^\infty\left(\left[0,1\right],\mathbb{C}^1\right)$, ядро $K\left(t,x,s\right)$ принадлежит пространству $C^\infty\left(\left\{0\le x\le 1,0\le s\le t\le 1\right\},\mathbb{C}^{n\times n}\right)$;

2) спектр $\left\{\lambda_j\left(t\right)\right\}$ матрицы $A\left(t\right)$ и спектральное значение $\mu\left(t\right)$ ядра интегрального оператора удовлетворяют требованиям:

а) $\lambda_i\left(t\right)\ne\lambda_j\left(t\right),\ i\ne j,\ \mu\left(t\right)\ne\lambda_i\left(t\right),\ i,j=\overline{1,n}\ \ \left(\forall t\in\left[0,1\right]\right);$

б) $\mathrm{Re}\,\lambda_j\left(t\right)\le 0,\ \lambda_j\left(t\right)\ne 0,\ \mathrm{Re}\mu\left(t\right)<0\ j=\overline{1,n}\left(\forall t\in\left[0,1\right]\right).$

Обозначим $\mu\left(t\right)\equiv\lambda_{n+1}\left(t\right)$ и, следуя [1], введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j\left(s\right)ds=\frac{\psi_j\left(t\right)}{\varepsilon},\ j=\overline{1,n+1}.\tag{2}$$

Для функции $\tilde y\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)$ поставим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde y}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\left(t\right)\frac{\partial\tilde y}{\partial\tau_j}-A\left(t\right)\tilde y-\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)\,d\theta}K\left(t,x,s\right)\tilde y\left(s,x,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds=h\left(t,x\right),\\ \tilde y\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)|_{t=0,\tau=0}=y^0\left(x\right)\qquad\left(\tau=\left(\tau_1,...,\tau_{n+1}\right),\ \psi=\left(\psi_1,...,\psi_{n+1}\right)\right).\end{gathered}\tag{3}$$

Связь задачи (3) с исходной задачей (1) такова: если $\tilde y=\tilde y\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)$ — решение задачи (3), то его сужение $y\left(t,x,\varepsilon\right)\equiv\tilde y\left(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ на регуляризирующих функциях (2) будет, очевидно, точным решением исходной задачи (1). Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde y=\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta}K\left(t,x,s\right)\tilde y\left(s,x,\frac{\psi\left(s\right)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds.$$

Для его регуляризации, как известно, надо ввести (см. [1], с. 62), пространство M_ε, асимптотически инвариантное относительно оператора J. Делается это так. Вводится класс U решений итерационных задач (см. ниже):

$$\begin{gathered}U=\Big\{\hat y\left(t,x,\tau\right):\hat y=\sum_{j=1}^{n+1}y_j\left(t,x\right)e^{\tau_j}+\\ +y_0\left(t,x\right),\quad y_j\left(t,x\right)\in C^\infty\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right),\ j=\overline{0,n+1}\Big\},\end{gathered}$$

а затем берется сужение этого класса при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Это и будет пространство M_ε. Для обоснования этого факта надо показать, что образ $J\hat{y}(t,x,\tau)$ интегрального оператора J на элементе пространства U представим в виде степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j^{(k)}(t,x) e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} + y_0^{(k)}(t,x) \right)$, сходящегося асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$). Займемся этим вопросом.

На произвольном элементе $\hat{y}(t,x,\tau)$ пространства U образ интегрального оператора J имеет вид

$$J\hat{y}(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_j(s,x)\, e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds + \\ + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_0(s,x)\, ds. \tag{4}$$

К каждому слагаемому этой суммы применим операцию интегрирования по частям. При $j = \overline{1,n}$ будем иметь

$$\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_j(s,x)\, e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds =$$

$$= e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \int_0^t K(t,x,s)\, y_j(s,x)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} ds =$$

$$= \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)d\theta} \int_0^t \frac{K(t,x,s)y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} d\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} \right) =$$
$$= \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)d\theta} \Bigg(\frac{K(t,x,s)\, y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} \Big|_0^t -$$
$$- \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t,x,s)\, y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} ds \Bigg) =$$
$$= \varepsilon \left[\frac{K(t,x,t)y_j(t,x)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \frac{K(t,x,0)y_j(0,x)}{\lambda_j(0)-\lambda_{n+1}(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)d\theta} \right] -$$
$$- \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_{n+1}(\theta)d\theta} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t,x,s)y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} ds.$$

Введем обозначение $I_j^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x)) \equiv \frac{K(t,x,s)y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда предыдущий результат преобразований можно записать в виде

$$\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_j(s,x)\, e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds =$$
$$= \varepsilon \left[I_j^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x))_{s=t} e^{\tau_j} - I_j^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x))_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \right] -$$
$$- \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left(I_j^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x)) \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+1}(\theta))d\theta} ds,\ j = \overline{1,n},$$

где $\tau_j = \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,n}$. Продолжая это процесс далее, получим ряд

$$\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_j(s,x)\, e^{\frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}} ds =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k+1} \Big[\left(I_j^k(K(t,x,s)\, y_1(s,x)) \right)_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \\ - \left(I_1^k(K(t,x,s)\, y_1(s,x)) \right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}} \Big], \tag{5}$$

где $\tau_j = \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,n}$, а операторы I_j^k имеют вид:

$$I_j^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x)) \equiv \frac{K(t,x,s)y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)},$$
$$I_j^1(K(t,x,s)\, y_j(s,x)) = \frac{1}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_1^0(K(t,x,s)\, y_j(s,x)), ...,$$
$$I_1^m(K(t,x,s)\, y_j(s,x)) = \frac{1}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} I_1^{m-1}(K(t,x,s)\, y_j(s,x)),\ m \geq 1,\ j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Слагемое в (4) при $j = n+1$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{array}{l} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, e^{\frac{\psi_{n+1}(s)}{\varepsilon}} ds \equiv \\ \equiv \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} ds = \\ = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds \equiv \\ \equiv \left(\int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds\right) e^{\tau_{n+1}}, \quad \tau_{n+1} = \frac{\psi_{n+1}(t)}{\varepsilon}. \end{array} \tag{7}$$

И, наконец, для последнего слагаемого в (4) будем иметь

$$\begin{array}{l} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} K(t,x,s)\, y_0(s,x)\, ds = \varepsilon \int_0^t \frac{K(t,x,s) y_0(s,x)}{-\lambda_{n+1}(s)} d_s e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} = \\ = \varepsilon \frac{K(t,x,s) y_0(s,x)}{-\lambda_{n+1}(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \Big|_{s=0}^{s=t} - \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t,x,s) y_0(s,x)}{-\lambda_{n+1}(s)}\right) ds = \\ = \varepsilon \left[\frac{K(t,x,t) y_0(t,x)}{-\lambda_{n+1}(t)} - \frac{K(t,x,0) y_0(0,x)}{-\lambda_{n+1}(0)} e^{\tau_{n+1}}\right] + \varepsilon \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+1}(\theta)\,d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{K(t,x,s) y_0(s,x)}{\lambda_{n+1}(s)}\right) ds = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left[\left(I_{n+1}^k \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right)_{s=0}\right) e^{\tau_{n+1}} - I_{n+1}^k \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right)_{s=t}\right], \end{array} \tag{8}$$

где введены операторы

$$\begin{array}{l} I_{n+1}^0 \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right) = \frac{K(t,x,s) y_0(s,x)}{\lambda_{n+1}(s)}, \\ I_{n+1}^m \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right) = \frac{1}{\lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{n+1}^{m-1} \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right), \; m \geq 1. \end{array} \tag{9}$$

Асимптотическая сходимость рядов (5) и (8) доказывается так же, как и аналогичное утверждение в [2] (гл.8). Пусть теперь $\tilde{y}(x,t,\tau,\varepsilon)$ — произвольная функция, непрерывная по $(t,x,\tau) \in [0,1] \times [0,1] \times \times \{Re\,\tau_j \leq 0,\; j = \overline{1,n+1}\}$ и имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t,x,\tau), \; y_k(t,x,\tau) \in U, \tag{10}$$

сходящееся при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t,x,\tau) \in [0,1] \times [0,1] \times \{\mathrm{Re}\,\tau_j \leq 0,\; j = \overline{1,n+1}\}$). Введём операторы $R_m : U \to U$, действующие на каждый элемент $\hat{y}(t,x,\tau)$ пространства U по закону:

$$\begin{array}{l} R_0 \hat{y}(t,x,\tau) \equiv R_0 \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j(t,x)\, e^{\tau_j} + y_0(t,x)\right) = \\ = e^{\tau_{n+1}} \int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds, \\ R_{k+1} \hat{y}(x,t,\tau) = (-1)^k \Big[\sum_{j=1}^n \left(I_j^k \left(K(t,x,s)\, y_j(s,x)\right)\right)_{s=t} \cdot e^{\tau_j} - \\ - \left(I_j^k \left(K(t,x,s)\, y_j(s,x)\right)\right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}}\Big] + \\ + \left(I_{n+1}^k \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right)\right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}} - \left(I_{n+1}^k \left(K(t,x,s)\, y_0(s,x)\right)\right)_{s=t}, \end{array} \tag{11}$$

где операторы I_j^k имеют вид (6), а операторы I_{n+1}^k — вид (9), $k \geq 0$. Операторы R_m называются *операторами порядка* (по ε), так как при применении их к функции $\hat{y}(t,x,\tau)$ они выделяют члены порядка ε^m. Расширенный оператор для интегрального оператора J естественно определить следующим образом.

Определение 1. *Формальным расширением оператора J называется оператор $\tilde{J}$, действующий на каждую функцию $\tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon)$ вида (10) по закону*[1]

$$\tilde{J}\tilde{y} \equiv \tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t,x,\tau)\right) \triangleq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left(\sum_{k=0}^{r} R_{r-k} y_k(t,x,\tau)\right). \tag{12}$$

[1]Значок $\triangleq$ означает "равно по определению".

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную (по отношению к исходной (1)):

$$\mathscr{L}_\varepsilon \tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{y} - \tilde{J}\tilde{y} = h(t,x),\ \tilde{y}(0,x,0,\varepsilon) = y^0(x), \qquad (13)$$

где $\tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon)$ — ряд (10).

§2. Разрешимость итерационных задач

Подставляя ряд (10) в (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$\mathscr{L}\, y_0(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - A(t)y_0 - R_0 y_0 = h(t,x),\ \ y_0(0,x,0) = y^0(x); \qquad (14_0)$$

$$\mathscr{L}\, y_1(t,x,\tau) = -\tfrac{\partial y_0}{\partial t} + R_1 y_0, \quad y_1(0,x,0) = 0; \qquad (14_1)$$

....

$$\mathscr{L}\, y_k(t,x,\tau) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_{k-1} + ... + R_k y_0, \quad y_k(0,x,0) = 0,\ k \geq 1. \qquad (14_k)$$

Каждая из итерационных задач (14_k) имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\, \hat{y}(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} + \mu(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_2} - A(t)y - R_0 y = H(t,x,\tau), \\ &\hat{y}(0,x,0) = y_*(x), \end{aligned} \qquad (15)$$

где $H(t,x,\tau) = \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t,x)e^{\tau_j} + H_0(t,x) \in U,\ y_*(x) \in C^\infty[0,1]$ — известные функции, а $R_0 y$ — оператор

$$R_0 \hat{y}(x,t,\tau) \equiv R_0 \left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j(t,x)e^{\tau_j} + y_0(t,x) \right) = e^{\tau_{n+1}} \int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds.$$

Попробуем решить задачу (15). Подставляя элемент $\hat{y}(t,x,\tau) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t,x)e^{\tau_j} + y_0(t,x)$ пространства U в (15), будем иметь

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(t)\, y_j(t,x)e^{\tau_j} - \sum_{j=1}^{n+1} A(t)\, y_j(t,x)e^{\tau_j} - \\ &-A(t)\, y_0(t,x) - e^{\tau_{n+1}} \textstyle\int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds = \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t,x)e^{\tau_j} + H_0(t,x). \end{aligned}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим уравнения

$$\begin{aligned} &-A(t)\, y_0(t,x) = H_0(t,x), \\ &(\lambda_j(t) I - A(t))\, y_j(t,x) = H_j(t,x),\ j = \overline{1,n}, \\ &(\lambda_{n+1}(t) I - A(t))\, y_{n+1}(t,x) - \textstyle\int_0^t K(t,x,s)\, y_{n+1}(s,x)\, ds = \ H_{n+1}(t,x). \end{aligned} \qquad (16)$$

Обозначим через $\varphi_j(t)$ — $\lambda_j(t)$-собственный вектор матрицы $A(t)$, а через $\chi_j(t)$ —$\bar{\lambda}_j(t)$-собственный вектор матрицы $A^*(t)$, причем системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_k(t)\}$ возьмем биортонормированными:

$$A(t)\varphi_j(t) \equiv \lambda_j(t)\varphi_j(t),\ \ A^*(t)\chi_k(t) \equiv \bar{\lambda}_k(t)\chi_k(t),\ \ (\varphi_j(t), \chi_k(t)) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера $j,k = \overline{1,n}$. Перейдем теперь к системам (16). Первое уравнение (16) имеет единственное решение $y_0(t,x) = -A^{-1}(t) H_0(t,x)$. Для разрешимости второй системы (16) при фиксированном $j \in \{1, ..., n\}$ в пространстве $C^{\infty}([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(H_j(t,x), \chi_j(t)) \equiv 0 \ \ (\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,1]).$$

Последнее уравнение (16) является уравнением Вольтерра второго рода с гладким ядром $G(t,x,s) = (\lambda_{n+1}(t) - A(t))^{-1} K(t,x,s)$ (в нем переменная x играет роль параметра), поэтому оно имеет единственное решение в пространстве $C^{\infty}([0,1] \times [0,1])$. Если ввести в пространстве U скалярное (при каждом $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$) произведение

$$\begin{array}{l} < \hat{y}(t,x,\tau), \ z(t,x,\tau) > \equiv \\ \equiv < \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t,x) e^{\tau_j} + y_0(t,x), \ \sum_{j=1}^{n+1} z_j(t,x) e^{\tau_j} + z_0(t,x) > \triangleq \\ \triangleq \sum_{j=0}^{n+1} (y_j(t,x), z_j(t,x)), \end{array}$$

где через $(\,,)$ обозначено обычное скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, то предыдущие рассуждения можно подытожить в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (15) правая часть*

$$H(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t,x) e^{\tau_j} + H_0(t,x) \in U$$

и выполнены условия 1) и 2). Тогда для разрешимости уравнения (15) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$< H(t,x,\tau), \ \chi_j(t) e^{\tau_j} > \equiv 0 \ \ j = \overline{1,n} \ (\forall (t,x) \in [0,1] \times [0,1]). \tag{17}$$

При ограничении (17) уравнение (15) имеет следующее решение в пространстве U :

$$\begin{array}{l} \hat{y}(t,x,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t,x) \varphi_j(t) e^{\tau_j} + \\ + \Big(\int_0^t R(t,x,s) (\lambda_{n+1}(s) I - A(s))^{-1} H_{n+1}(s,x) ds + \\ + (\lambda_{n+1}(t) I - A(t))^{-1} H_{n+1}(t,x) \Big) e^{\tau_{n+1}} - \\ - A^{-1}(t) H_0(t,x), \end{array} \tag{18}$$

где $\mathscr{R}(t,x,s)$ — резольвента ядра $G(t,x,s) = (\lambda_{n+1}(t) - A(t))^{-1} K(t,x,s)$ $\alpha_j(t,x) \in$ $\in C^{\infty}([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, $j = \overline{1,n}$.

Подчиним решение (18) начальному условию $y(0,x,0) = y_*(x)$. Будем иметь

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(0,x) \varphi_j(0) - A^{-1}(0) H_0(0,x) = y_*(x) \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_j(0,x) = (y_*(x) + A^{-1}(0) H_0(0,x), \chi_j(0)), \ j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{19}$$

Однако функции $\alpha_j(t,x)$ не найдены полностью. Необходимо дополнительное требование на решение задачи (15). Такое требование диктуют итерационные задачи (14_k), из которых видно, что естественным дополнительным ограничением является условие

$$< -\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1 \hat{y} + P(t,x,\tau), \ \chi_j(t) e^{\tau_j} > \equiv 0 \ j = \overline{1,n} \ \ (\forall (t,x) \in [0,1] \times [0,1]), \tag{20}$$

где $P(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} P_j(t,x) e^{\tau_j} + P_0(t,x) \in U$ — известная вектор-функция. Покажем, что при выполнении требования (20) задача (15) имеет единственное решение в пространстве U.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)-2) и правая часть $H(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n+1} H_j(t,x) e^{\tau_j} + H_0(t,x) \in U$ удовлетворяет условию ортогональности (17). Тогда задача (15) при дополнительном условии (20) однозначно разрешима в пространстве U.*

Доказательство. Чтобы воспользоваться условием (20), вычислим выражение $-\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1\hat{y}$. Так как

$$\begin{gathered} R_1\hat{y}\,(x,t,\tau) = -\Big[\sum_{j=1}^{n}\left(I_j^0\,(K\,(t,x,s)\,y_j\,(s,x))\right)_{s=t}\cdot e^{\tau_j} - \\ -\left(I_1^0\,(K\,(t,x,s)\,y_j\,(s,x))\right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}}\Big] - \\ -\left[\left(I_{n+1}^0\,(K\,(t,x,s)\,y_0\,(s,x))_{s=t} - I_{n+1}^0\,(K\,(t,x,s)\,y_0\,(s,x))_{s=0}\right)e^{\tau_{n+1}}\right], \\ y_j\,(s,x) = \alpha_j\,(s,x)\,\varphi_j\,(s)\,,\;\; y_0\,(s,x) = -A^{-1}\,(s)\,H_0\,(s,x)\,, \end{gathered}$$

$$I_j^0\,(K\,(t,x,s)\,y_j\,(s,x)) \equiv \frac{K(t,x,s)y_j(s,x)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)},$$

то

$$\begin{gathered} -\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + R_1\hat{y} + P\,(t,x,\tau) = \\ = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\alpha_j(t,x)\varphi_j(t))}{\partial t}e^{\tau_j} - \\ -\frac{\partial}{\partial t}[\int_0^t R\,(t,x,s)\,(\lambda_{n+1}\,(s)\,I - A\,(s))^{-1}\,H_{n+1}\,(s,x)\,ds + \\ +(\lambda_{n+1}\,(t)\,I - A\,(t))^{-1}\,H_{n+1}\,(t,x)]e^{\tau_{n+1}} + \frac{\partial}{\partial t}A^{-1}\,(t)\,H_0\,(t,x) - \\ -\sum_{j=1}^{n}\Big[\left(I_j^0\,(K\,(t,x,s)\,\alpha_j\,(s,x)\,\varphi_j\,(s))\right)_{s=t}\cdot e^{\tau_j} - \\ -\left(I_j^0\,(K\,(t,x,s)\,\alpha_j\,(s,x)\,\varphi_j\,(s))\right)_{s=0} e^{\tau_{n+1}}\Big] + \\ -\left[\left(I_{n+1}^0\,(K\,(t,x,s)\,y_0\,(s,x))_{s=t} - I_{n+1}^0\,(K\,(t,x,s)\,y_0\,(s,x))_{s=0}\right)e^{\tau_{n+1}}\right] + \\ +\sum_{j=1}^{n+1}P_j\,(t,x)\,e^{\tau_j} + P_0\,(t,x)\,, \end{gathered}$$

поэтому условие (20) принимает вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial(\alpha_j(t,x))}{\partial t} + \left(\frac{K(t,x,t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_{n+1}(t)} - \dot{\varphi}_j\,(t)\,,\chi_j\,(t)\right)\alpha_j\,(t,x) + \\ +(P_j\,(t,x)\,,\chi_j\,(t)) \equiv 0,\;\; j = \overline{1,n}. \end{gathered}$$

С учётом начального условия (19) это уравнение имеет единственное решение

$$\alpha_j\,(t,x) = e^{q_j(t,x)}\left[\alpha_j\,(0,x) + \int_0^t (P_j\,(s,x)\,,\chi_j\,(s))\,e^{-q(s,x)}ds\right], \tag{21}$$

где $q_j\,(t,x) = \int_0^t\left(\frac{K(s,x,s)\varphi_j(s)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)} - \dot{\varphi}_j\,(s)\,,\chi_j\,(s)\right)ds,\;\; j = \overline{1,n}$. Значит решение (14) в пространстве U в условиях нашей теоремы находится однозначно. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (14_k), построим ряд (10) с коэффициентами из класса U. Пусть $y_{\varepsilon N}\,(t,x) = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k\left(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$ – сужение N-й частичной суммы этого ряда при $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Так же, как и в [2] (глава 8), нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало, задача (1) имеет единственное решение $y\,(t,x,\varepsilon) \in C^1\,([0,1]\times[0,1])$ и имеет место оценка*

$$\|y\,(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}\,(t,x)\|_{C([0,1]\times[0,1])} \leq C_N\varepsilon^{N+1}\quad (N = 0,1,2,...)\,,$$

где постоянная $C_N > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

§3. Решение первой итерационной задачи. Исследование проблемы инициализации

Поскольку в системе (14_0) вектор-функция $H(t,x,\tau)\equiv h(t,x)$ не зависит от τ, то условия (17) для нее выполнены автоматически, поэтому система (14_0) имеет в пространстве U решение, которое можно записать в форме (см. (18))

$$y_0(t,x,\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\tau_j}-A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right), \tag{22}$$

где[1] $\alpha_j^{(0)}(t,x)\in C^{\infty}([0,1]\times[0,1],\mathbb{C}^1)$ — пока произвольные функции. Для вычисления этих функций найдем сначала ее значение в точке $t=0$. Так как $y_0(0,x,0)=y^0\left(x\right)$, то

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(0,x\right)\varphi_j\left(0\right)-A^{-1}\left(0\right)h\left(0,x\right)=y^0\left(x\right)\ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ \alpha_j^{(0)}\left(0,x\right)=\left(A^{-1}\left(0\right)h\left(0,x\right)+y^0\left(x\right),\chi_j\left(0\right)\right),\ j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{23}$$

Для полного вычисления функций $\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)$ надо перейти к следующей задаче (14_1) и подчинить ее правую часть условию ортогональности (17). В результате получим уравнения

$$-\frac{\partial\left(\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\right)}{\partial t}+\left(\frac{K\left(t,x,t\right)\varphi_j\left(t\right)}{\lambda_j\left(t\right)-\lambda_{n+1}\left(t\right)}-\dot{\varphi}_j\left(t\right),\chi_j\left(t\right)\right)\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\equiv0,\ j=\overline{1,n},$$

и с учетом равенства (23) найдем, что

$$\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)=e^{q_j(t,x)}\left(A^{-1}\left(0\right)h\left(0,x\right)+y^0\left(x\right),\chi_j\left(0\right)\right),\ j=\overline{1,n}, \tag{24}$$

где $q_j\left(t,x\right)\equiv\int_0^t\left(\frac{K(s,x,s)\varphi_j(s)}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+1}(s)}-\dot{\varphi}_j\left(s\right),\chi_j\left(s\right)\right)ds,\ j=\overline{1,n}$. Тем самым, однозначно найдем решение (22) первой итерационной задачи (14_0).

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы инициализации. Пусть $Re\,\lambda_j\left(t\right)<0\forall t\in[0,1],\ j=\overline{1,n}$. Тогда по теореме 3 имеем

$$\begin{gathered}||y(t,x,\varepsilon)-y_{\varepsilon0}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\leq c_0\varepsilon\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow||y(t,\varepsilon)-\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\tau_j}-A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)\right)||_{C([0,1]\times[0,1])}\leq c_0\varepsilon.\end{gathered}$$

Отсюда при любом $\delta\in(0,1]$ получаем, что

$$\begin{aligned}&c_0\varepsilon\geq||y(t,x,\varepsilon)-\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}-A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\geq\\ &\geq||y(t,x,\varepsilon)-\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}+A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\geq\\ &\geq||y(t,x,\varepsilon)+A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}-\\ &-||\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}||_{C([\delta,1]\times[0,1])},\end{aligned}$$

откуда выводим, что

$$\begin{aligned}&||y(t,x,\varepsilon)+A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\leq c_0\varepsilon+\\ &+||\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}}||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\leq\\ &\leq c_0\varepsilon+\left\|\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)\right\|_{C([\delta,1]\times[0,1])}e^{-\frac{\varkappa\delta}{\varepsilon}},\end{aligned}$$

где $\varkappa=\min\limits_{i=\overline{1,n},t\in[0,1]}\left(-Re\ \lambda_i\left(t\right)\right)>0$. Следовательно,

$$||y(t,x,\varepsilon)+A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\to0\,(\varepsilon\to+0). \tag{25}$$

Получен следующий результат.

---

[1] В выражениях типа $y_j^{(k)}$ верхний индекс (k) означает номер итерации; не путать с k-й производной.

Теорема 4. *Если выполнены условия 1) и 2), причем* $Re\,\lambda_j(t) < 0 \forall t \in [0,1],\ j = \overline{1,n}$, *то имеет место предельный переход (25), где* $y = y(t,x,\varepsilon)$ *— точное решение задачи (1), а функция* $\bar{\bar{y}}(t,x) = -A^{-1}(t)\,h(t,x)$ *является решением вырожденного (по отношению к (1)) уравнения* $A(t)\,\bar{\bar{y}}(t,x) + h(t,x) = 0$.

Однако в нашем случае допускаются чисто мнимые собственные значения $\lambda_j(t)$. Пусть, например,

$$\begin{array}{l}\lambda_j(t) = \pm i\omega_j(t)\,, \omega_j(t) > 0 \ \left(j = \overline{1,m}\right),\ Re\,\lambda_k(t) < 0 \\ \left(\forall t \in [0,1]\,,\ k = \overline{2m+1,n}\right).\end{array} \tag{26}$$

В этом случае предельный переход (25) в метрике пространства $C([0,1]\times[0,1])$ становится невозможным. В связи с этим возникает следующая *проблема инициализации*: какими должны быть исходные данные задачи (1), чтобы равномерный предельный переход $y(t,x,\varepsilon) \to \bar{\bar{y}}(t,x)$ (при $\varepsilon \to +0$) был возможен на множестве $[0,1]\times[0,1]$, включая и зону пограничного слоя по t? Исходные данные задачи (1), удовлетворяющие этому требованию, называют классом инициализации Σ. Так как

$$\begin{array}{l}y(t,x,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\, e^{\frac{-i}{\varepsilon}\int_0^t \omega_j(\theta)d\theta} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j^{(0)}(t,x)\varphi_{m+j}(t)\, e^{\frac{\pm i}{\varepsilon}\int_0^t \omega_j(\theta)d\theta} + \\ + \sum_{k=2m+1}^{n} \alpha_k^{(0)}(t,x)\varphi_k(t)\, e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_k(\theta)d\theta} - A^{-1}(t)\,h(t,x) + O(\varepsilon),\end{array}$$

то первые $2m$ слагаемых быстро осциллируют и препятствуют существованию предельного перехода $y(t,x,\varepsilon) \to y_0^{(0)}(t,x)$ на множестве $[0,1]\times[0,1]$, поэтому их надо удалить, т.е. положить

$$\alpha_j^{(0)}(t,x) \equiv 0,\ \beta_j^{(0)}(t,x) \equiv 0 \left(\forall (t,x) \in [0,1]\times[0,1]\,,\ j = \overline{1,m}\right).$$

Из формулы (25) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left(y^0(x) + A^{-1}(0)\,h(0,x)\,, \chi_j(0)\right) = 0,\ j = \overline{1,2m},\ \forall x \in [0,1]\,. \tag{$*$}$$

Доказан следующий результат.

Теорема 5. *Пусть для задачи (1) выполнены условия 1), 2) и (26). Тогда для того чтобы имел место предельный переход*

$$||y(t,x,\varepsilon) + A^{-1}(t)\,h(t,x)\,||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \to 0(\varepsilon \to +0),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(*)$.

Однако условие $(*)$ не описывает класс инициализации, так как экспоненты $\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_k(\theta)\,d\theta\right\}$ $\left(k = \overline{2m+1,n}\right)$ не стремятся равномерно к нулю в окрестности точки $t = 0$, поэтому в описании класса Σ их тоже нужно убрать. В итоге получим следующий результат.

Теорема 6. *Пусть для задачи (1) выполнены условия 1), 2) и (26). Тогда для того чтобы имел место предельный переход*

$$||y(t,x,\varepsilon) + A^{-1}(t)\,h(t,x)\,||_{C([0,1]\times[0,1])} \to 0(\varepsilon \to +0),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left(y^0(x) + A^{-1}(0)\,h(0,x)\,, \chi_j(0)\right) = 0,\ j = \overline{1,n},$$

значит класс инициализации не зависит от ядра и описывается следующим образом:

$$\Sigma = \left\{\left(y^0, h, K, A\right) :\ \left(y^0(x) + A^{-1}(0)\,h(0,x)\,, \chi_j(0)\right) = 0,\ j = \overline{1,n}, \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* М.: Наука,1981. 400 с.
2. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. *Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации: учебное пособие.* М.: Издательский дом МЭИ, 2012. 414 с.
3. Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя.* М.: Издательство Московского университета, 2011. 456 с.
4. Иманалиев М.И. *Методы решения обратных задач и их приложение.* Фрунзе: ИЛИМ, 1977. 348 с.
5. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. *Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных* // Математ. заметки. 2017. Т. 102, вып. 1. С. 28–38.

Абдухафиз Абдурасулович Бободжанов,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»,
ул. Красноказарменная, 14,
111250, г. Москва, Россия
E-mail: bobojanova@mpei.ru

Валерий Федорович Сафонов,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»,
ул. Красноказарменная, 14,
111250, г. Москва, Россия
E-mail: SafonovVF@mpei.ru