О ДВУСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И.А. ШАКИРОВ

Аннотация. В работе изучается поведение константы Лебега L_n оператора Фурье, определенного в пространстве непрерывных 2π-периодических функций. Известные её интегральные представления, выраженные через несобственные интегралы, имеют громоздкий вид. Они сложны как для теоретических, так и для приближенных расчётов. Здесь для L_n получено новое интегральное представление, выраженное через сумму интегралов Римана, определенных по конечным сужающимся областям. Установлены эквивалентные ему другие интегральные представления, составляющие которых строго оценены с двух сторон. Затем на их основе проведена двусторонняя оценка самой константы Лебега. Проблема верхней оценки константы L_n решена полностью. Улучшены известные нижние ее оценки.

Ключевые слова: частные суммы ряда Фурье, норма оператора Фурье, константа Лебега, асимптотическая формула, оценка константы Лебега, экстремальная задача.

Mathematics Subject Classification: 34A25, 22E05

1. Введение

Если ряд Фурье непрерывной, 2π-периодической функции $x = x(t)$ является её равномерно сходящимся разложением, то частные суммы этого ряда

$$S_n x(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(s) D_n(t-s)\, ds, \quad D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{1}$$

служат приближенным выражением для исходной функции [1], [2]. Соответствующий полиному (1) оператор Фурье

$$S_n : B \mapsto H_n^T \subset B, \quad B = C[0,2\pi] \quad \text{или} \quad B = L_1(0,2\pi), \tag{2}$$

действующий в B, имеет минимальную норму ([3], [4]) среди всевозможных проекторов

$$P_n : B \mapsto H_n^T \subset B, \quad H_n^T = \left\{ T_n(t) \mid T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right\}.$$

Другими словами, при любых натуральных значениях параметра n справедливо неравенство

$$\|P_n\|_B \geqslant \|S_n\|_B \equiv L_n,$$

согласно которому среди упомянутых проекторов наибольшего внимания заслуживает норма оператора (2). Величину L_n называют константой Лебега, для которой верна формула

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_n(t)|\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\, dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

I.A. Shakirov, On two-sided estimate for norm of Fourier operator.

Поступила 14 июля 2016 г.

Она является основной характеристикой процесса приближения исходной функции полиномами (1), участвует при оценке погрешности приближения в неравенстве Лебега (фундаментальном неравенстве)

$$\|x - S_n x\|_B \leqslant (1 + L_n) E_n^T(x), \quad x \in B, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n^T(x)$ – наилучшее приближение функции $x(t)$ тригонометрическими полиномами вида $T_n(t)$; $n = 0$ соответствует тривиальному случаю приближения.

Свойства оператора (2) и его обобщений, соответствующие им фундаментальные характеристики достаточно подробно изучены А. Лебегом, Л. Фейером, Г. Харди, Й. Литтлвудом, Г. Сёге, А. Зигмундом, Й. Марцинкевичем и др. Существенный вклад в развитие данного направления внесли советские математики С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, Н.П. Корнейчук, С.М. Никольский, И.П. Натансон, А.И. Степанец, С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин, П.К. Суетин, А.Ф. Тиман, М.Ф. Тиман, В.М. Тихомиров, С.А. Теляковский, их многочисленные ученики и последователи.

В начале прошлого века для константы (3) Л. Фейером [5] было установлено асимптотическое равенство

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Затем им же в [6] и Г. Сёге [7] найдены формулы для вычисления точного значения константы (3) вида

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{\pi k}{2n+1}, \quad L_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \sum_{m=1}^{k(2n+1)} \frac{1}{2m-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad L_0 = 1. \tag{5}$$

Более подробные сведения о других представлениях константы (3), её обобщениях $L_{\frac{n}{2}}$ и об их свойствах имеются в монографиях [2], [9], [14], работах [7], [8]. Вопросы об оценке L_n сверху, реже снизу, в математической литературе поднимались многократно (см. [1]–[4], [8]–[15]). Например, в монографии [14] для разности

$$O(n) \equiv L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad n \in \mathbb{N},$$

приводится двойное неравенство вида $\frac{1}{3} < O(n) < 3$. В работе [13] П.В. Галкиным на основе результата Г. Ватсона [8] получено двойное неравенство

$$1 \leqslant L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n+1) < 1.8724, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Допущенная в верхней оценке (6) техническая ошибка в работе [15] была исправлена на меньшую величину

$$c_0 + \frac{4}{\pi^2} \ln 2 \approx 1.2706, \quad c_0 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{4k^2 - 1} + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} \approx 0.9897,$$

где γ – известная константа Эйлера. В другой работе [16] Г.И. Натансона уточнена константа c_0, имеющая принципиальное значение при исследовании константы (3). В лемме 2 [16] с целью улучшения известных оценок для констант Лебега сумм Валле-Пуссена были введены более общие непрерывные аналоги константы Лебега $L(n)$, $n \in [1, \infty)$. Отметим, что для натуральных значений аргумента n полученные в этой лемме результаты согласуются с неравенствами (4), (5) и их обобщениями (6), (7) из работы [13]. В замечании 2 [16] отмечено, что представляет интерес поведение разности (функции двух переменных) вида

$$O(n, a) \equiv L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(n + a), \quad a \in [0, +\infty), \tag{7}$$

в которой соответствующие различным значениям параметра a разности $O(n,a)$ ведут себя по-разному (строго возрастают либо убывают, имеют различные области значений). Например, в [13] установлена, что разность $L_{\frac{n}{2}} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1)$ является строго убывающей функцией аргумента n, а разность $L_{\frac{n}{2}} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+2)$ – строго возрастающей функцией. В рамках данной работы подробно исследуется классический вариант разности

$$O_n \equiv O(n,0) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \in \mathbb{N},$$

соответствующий сдвигу $a = 0$ аргумента логарифмической функции в (7).

Для константы (3) Г. Харди в работе [10] получил интегральные формулы

$$L_n = 4\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{th}(2n+1)t}{\operatorname{th} t}\frac{dt}{\pi^2+4t^2}, \quad L_n = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(2n+1)t}{\operatorname{sh} t}\ln\left(\operatorname{cth}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt,$$

не содержащие модуля в подынтегральном выражении. Они сложны для теоретических исследований и приближенных расчётов, так как представлены через несобственные интегралы от сложнейших рационально-гиперболических и гиперболическо-логарифмических функций. Следовательно, установление более простых интегральных формул для L_n также представляет определенный интерес. Эти вопросы подробно рассмотрены в п.3 работы.

Активные исследования в этом направлении ведутся и в настоящее время. В работах [17]-[20] задачи приближения периодической и непериодической функций различными типами ортогональных полиномов (Фурье-Лежандра, Фурье-Якоби, Фурье-Чебышева и др.) решаются в весовых и обобщенных весовых функциональных пространствах. Особое внимание в них также обращается на получение двусторонних оценок для соответствующих фундаментальных характеристик, проблеме точности неравенства Лебега, а также изучению аппроксимативных возможностей некоторых модификаций частичных сумм Фурье на различных классах функций. В случаях лагранжевой интерполяции и синк-аппроксимации функций схожие проблемы рассматривались и решались в работах авторов [21]–[23].

В данной работе получены следующие новые результаты:

1) используя специфические узлы, получено новое интегральное представление для L_n, выраженное через интегралы Римана от тригонометрических функций со сдвигом аргумента по сужающимся при увеличении параметра n областям; приведены равносильные ему интегральные представления;

2) определены более точные, чем приведённые выше, двусторонние оценки для разности O_n;

3) на основе полученных результатов затем решена экстремальная задача

$$\inf\left\{A \in \mathbb{R}^+ \mid L_n \leqslant A + \frac{4}{\pi^2}\ln n \quad \forall n \in \mathbb{N}\right\} = A^*, \quad A^* = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991\ldots \tag{8}$$

2. Вспомогательные утверждения

При более детальном изучении свойств константы Лебега (3) и в ходе доказательства большинства лемм и теорем работы понадобятся классы функций $V_\delta^\pm$.

Определение 1. *Строго монотонная функция $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D = D(\varphi) \subseteq \mathbb{N})$ дискретного аргумента n принадлежит одному из классов $V_\delta^\pm$, если для изменения (вариации)*

$$\delta_\varphi \equiv \delta(\varphi) = \sup\left\{\varphi(n) \mid n \in D\right\} - \inf\left\{\varphi(n) \mid n \in D\right\}, \quad \delta_\varphi > 0,$$

области её значения $R(\varphi)$ выполняется условие $\delta_\varphi < \delta$, где δ – вполне определённое число; знак плюс в обозначении $V_\delta^\pm$ используется в случае возрастания функций в области D, минус – при их убывании.

Ясно, что эти классы определены как семейство функций $\{\varphi\}$, для вариации каждой из которых выполняется неравенство $\delta_\varphi < \delta$ (в нашем случае всюду $\delta = 0.2$). Участвующие в леммах и теоремах данной работы функции в основном имеют очень малую вариацию. Даже для самой “худшей” из них $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(n)$ $(n \in D)$ имеет место неравенство $\delta_{\overline{\varphi}} < 0.2$.

Замечание 1. *Для непрерывных продолжений* $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(n)$ $(n \in \overline{D} = \overline{(\inf D; \sup D)} \subset \mathbb{R})$ *дискретно определенных функций* $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D \subset \mathbb{N})$ *формулировка и суть определения 1 полностью сохраняются.*

Замечание 2. *Функции (последовательности) из классов* V_δ^+ *и* V_δ^- *обладают тем замечательным свойством, что наибольшие их вариации происходят при первоначальных значениях аргумента* n ($n = 1$ *или* $n = 1, 2$ *или* $n = 1, 2, 3$) *с последующей их “стабилизацией” около вполне определенных предельных точек. Данное свойство в работе используется для получения более тонких оценок для различных интегральных представлений константы Лебега.*

Приведем необходимые в дальнейшем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Функция*

$$\alpha_n \equiv \alpha(n) = \frac{1}{(2n+1)\sin\frac{\pi}{4n+2}}, \quad \alpha: D \mapsto \mathbb{R}, \quad D = D_1 \quad \text{или} \quad D = D_2, \quad D \subset \mathbb{N} \tag{9}$$

и её линейная комбинация

$$\varphi_1 = \varphi_1(n) = \frac{\pi}{2}\theta\alpha_n, \quad \theta = \frac{2}{\pi}\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{10}$$

являются строго убывающими функциями дискретного аргумента n.

Доказательство. Функцию (9) представим в виде

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4n+2}}{\frac{\pi}{4n+2}}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\sin\frac{\pi}{4n+2}}{\frac{\pi}{4n+2}}$$

монотонно возрастает, ограничена и для нее выполняются соотношения

$$\frac{3}{\pi} \leqslant \tilde{\alpha}_n < 1, \quad \lim_{n\to\infty}\tilde{\alpha}_n = 1,$$

справедливость которых легко следует из известных свойств первого замечательного предела. При этом исходная последовательность α_n монотонно убывает и имеет нижеследующие характеристики:

$$\begin{aligned}
&n \in D_1 \;\Rightarrow\; R(\alpha_n) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3}\right] \subset (0.636619, 0.666667),\\
&\delta(\alpha_n) = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi} = 0.03004\ldots,\\
&n \in D_2 \;\Rightarrow\; R(\alpha_n) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{1}{7\sin\frac{\pi}{14}}\right] \subset (0.636619, 0.641995),\\
&\delta(\alpha_n) = \frac{1}{7\sin\frac{\pi}{14}} - \frac{2}{\pi} = 0.00537\ldots
\end{aligned} \tag{11}$$

Ясно, что умножение последовательности α_n на константу $\frac{\pi}{2}\theta$, $\theta = 0.872654\ldots$, сохраняет её монотонность, при этом лишь незначительно меняются образ и вариация:

$$D_1 = \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad R(\varphi_1) = \left(\theta, \frac{\pi}{3}\theta\right] \subset (0.872654, 0.913842), \quad \delta(\varphi_1) = 0.04118\ldots, \tag{12}$$

$$D_2 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \quad \Rightarrow \quad R(\varphi_1) = \left(\theta, \frac{\pi\theta}{14\sin\frac{\pi}{14}}\right] \subset (0.872654, 0.880022), \\ \delta(\varphi_1) = 0.00736\ldots \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) для функции (10) (а также (11) для функции (9)) установлены на основе несложных вычислений. Следовательно, функции $\alpha(n)$, $\varphi_1(n)$ принадлежат классу V_δ^-, $\delta = 0.2$. Лемма полностью доказана. $\square$

Для краткости записи выбранное значение $\delta = 0.2$ после обозначений классов V_δ^+, V_δ^- далее всюду будем пропускать (см. комментарии после определения 1).

Лемма 2. *Для функции*

$$\varphi_2 = \varphi_2(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\left(2 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n\left(1 + \cos\frac{\pi}{4n+2}\right)\right) \tag{14}$$

верны соотношения

$$n \in D_1 \ \Rightarrow \ R(\varphi_2) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{8}{\pi}, \frac{4}{\pi^2}\ln(2+\sqrt{3})\right] \subset (0.378824,\ 0.533743), \\ \delta(\varphi_2) = 0.15491\ldots, \tag{15}$$

$$n \in D_2 \ \Rightarrow \ R(\varphi_2) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{8}{\pi}, \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{14} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}}{3}\right] \subset (0.378824, 0.439594), \\ \delta(\varphi_2) = 0.06077\ldots, \tag{16}$$

и она принадлежит классу V_δ^-.

Доказательство. Аргумент логарифма в (14) представим в виде суммы двух положительных функций, т.е. в виде

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n + \left(2 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\frac{\pi}{4n+2}.$$

Первая из них принадлежит классу V_δ^- как произведение двух функций из этого же класса, вторая также принадлежит V_δ^- согласно лемме 2 [24]. Следовательно, сама сумма и её логарифм также принадлежат классу V_δ^- (логарифмирование не нарушает свойство строгого убывания функции). Для обоснования справедливости соотношений (15) и (16) достаточно провести несложные вычисления. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Выраженные через (9) функции*

$$\varphi_3 = \varphi_3(n) = \frac{2}{\pi}\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{4n+2}, \quad n \in D, \quad D = D_1 \quad \textit{или} \quad D = D_2, \tag{17}$$

$$\varphi_4 = \varphi_4(n) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{4n+2}, \quad n \in D, \tag{18}$$

являются строго возрастающими в своих областях определения функциями. Для них верны соотношения:

$$n \in D_1 \ \Rightarrow \ R(\varphi_3) = \left[\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}, \frac{8}{\pi^3}\right) \subset (0.245035, 0.258013), \quad \delta(\varphi_3) = 0.01297\ldots, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &n \in D_2 \;\Rightarrow\; R(\varphi_3) = \left[\frac{2}{49\pi}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{14}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}, \frac{8}{\pi^3}\right) \subset (0.255808, 0.258013),\\ &\delta(\varphi_3) = 0.00220\ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &n \in D_1 \;\Rightarrow\; R(\varphi_4) = \left[\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right), \frac{8}{\pi^3}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right) \subset (0.089040, 0.093757),\\ &\delta(\varphi_4) = 0.00471\ldots, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} n \in D_2 \;\Rightarrow\; R(\varphi_4) = &\left[\frac{2}{49\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\operatorname{cosec}\frac{\pi}{14}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}, \frac{8}{\pi^3}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right)\\ &\subset (0.092955, 0.093757), \quad \delta(\varphi_4) = 0.00080\ldots, \end{aligned} \tag{22}$$

т.е. они принадлежат классу V_δ^+.

Доказательство. С целью исследования функции $\varphi_3(n)$ при помощи производной непрерывно продолжим её на недискретную область $\overline{D} = \overline{D}_1$ или $\overline{D} = \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 = [1, +\infty)$, $\overline{D}_2 = [3, +\infty)$. Она является гладкой функцией, т.е. $\varphi_3 \in C^1(\overline{D})$. Вычислим её производную:

$$\begin{aligned} \varphi_3'(n) =& \frac{2}{\pi}\left(2\alpha_n\alpha_n'\cos\frac{\pi}{4n+2} + \frac{\pi}{(2n+1)^2}\alpha_n^2\sin\frac{\pi}{4n+2}\right)\\ =& \frac{2}{\pi}\alpha_n\left(2\frac{\pi\cos\frac{\pi}{4n+2} - (4n+2)\sin\frac{\pi}{4n+2}}{(2n+1)^3\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}\cos\frac{\pi}{4n+2} + \frac{\pi}{(2n+1)^2}\alpha_n\sin\frac{\pi}{4n+2}\right)\\ =& \frac{2}{\pi(2n+1)}\alpha_n^3\left(2\pi\cos^2\frac{\pi}{4n+2} - 2(4n+2)\sin\frac{\pi}{4n+2}\cos\frac{\pi}{4n+2} + \pi\sin^2\frac{\pi}{4n+2}\right)\\ =& \frac{2}{\pi(2n+1)}\alpha_n^3\left(2\pi - \pi\sin^2\frac{\pi}{4n+2} - 2(2n+1)\sin\frac{\pi}{4n+2}\right)\\ =& \frac{2\alpha_n^3}{\pi(2n+1)}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2n+1} - (4n+2)\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)\\ =& \frac{4\alpha_n^3}{2n+1}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{\frac{\pi}{2n+1}}\right)\\ =& \frac{4\alpha_n^3}{2n+1}\Bigg(\frac{\pi^2}{4!(2n+1)^2} + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^4\\ &- \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^6 + \frac{1}{8!}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^8 - \ldots\Bigg). \end{aligned}$$

Полученный ряд Лейбница имеет положительные значения при любых натуральных n, поэтому $\varphi_3'(n) > 0$ для всех $n \in \overline{D} \subset \mathbb{R}$. Функции $\varphi_3(n)$ и $\varphi_4(n)$ различаются лишь на константу, поэтому $\varphi_4'(n) > 0$ для всех $n \in \overline{D} \subset \mathbb{R}$. Следовательно, функции (17) и (18) строго возрастают в области $\overline{D}$. Справедливость соотношений (19)–(22) для их образов и вариаций устанавливается без особых проблем.

С учётом замечания 1 можем утверждать, что $\varphi_3, \varphi_4 \in V_\delta^+$. Лемма доказана. □

В пункте 4 работы в ходе проведения нижней оценки константы Лебега используются функции из класса V_δ^-, поведения которых достаточно изучить лишь в области $D_1 = \mathbb{N}$. Необходимые в дальнейшем сведения о них содержатся в следующей лемме.

Лемма 4. *Функции дискретного аргумента*

$$\varphi_5(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\frac{\pi}{4n+2}\right), \quad \varphi_6(n) = \frac{1}{\pi}\alpha_n\sec\frac{\pi}{4n+2}, \quad n\in\mathbb{N},$$

являются строго убывающими в $\mathbb{N}$. *Для их образов и вариаций верны соотношения*

$$R(\varphi_5) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{4}{\pi}, \frac{2}{\pi^2}\ln 3\right] \subset (0.097902394, 0.222625359), \quad \delta(\varphi_5) = 0.12472\ldots,$$

$$R(\varphi_6) = \left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{4\sqrt{3}}{9\pi}\right] \subset (0.202642367, 0.245035065), \quad \delta(\varphi_6) = 0.04239\ldots$$

Доказательство. Последовательность

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\frac{\pi}{4n+2}, \quad n\in\mathbb{N},$$

является строго убывающей (см. лемму 2 в [24]), причём логарифмирование и умножение на константу не нарушают данное свойство. Для её образа и вариации имеют место приведённые в лемме 4 соотношения, которые получаются с учётом монотонности упомянутых выше преобразований.

Входящие в состав $\varphi_6(n)$, $n\in\mathbb{N}$, сомножители α_n и $\sec\frac{\pi}{4n+2}$ также являются строго убывающими функциями. Соотношения для образа $R(\varphi_6)$ и вариации $\delta(\varphi_6)$ устанавливаются на основе несложных расчётов.

Следовательно, $\varphi_5, \varphi_6 \in V_\delta^-$, что и завершает доказательство леммы 4. □

3. Интегральные представления константы Лебега

При более детальном изучении фундаментальных характеристик (функций и констант Лебега) тригонометрических интерполяционных полиномов Лагранжа важное значение имеет выбор класса узлов интерполяции, на основе которого затем определяются [24] их различные явные (безмодульные) виды. В нашем случае в процессе преобразования формулы (3) правильный выбор узлов также имеет первостепенное значение, т.е. позволяет избавиться от модуля в подынтегральном выражении в формуле (3) и получить новое интегральное представление для константы Лебега.

Теорема 1. *Для константы (3) справедлива формула*

$$L_n = I_0(n) + I(n), \quad L_n = L(n), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{23}$$

где

$$I_0(n) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt, \quad T = t_1 = \frac{\pi}{2(2n+1)}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} I(n) =& \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\left(\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})} + \frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}\right)dt \\ =& \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}\,dt, \end{aligned} \tag{25}$$

$$t_{2k-1} = \frac{\pi(2k-1)}{4n+2}, \quad k=1,\ldots,n, \quad t_{2k} = \frac{2\pi k}{4n+2}, \quad k=1,\ldots,n. \tag{26}$$

Доказательство. На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ рассмотрим систему узлов $t_j = \frac{\pi}{2(2n+1)}j$, $j = 0, \ldots, 2n+1$, образованную из нулей и экстремумов функции $y = |\sin(2n+1)t|$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, которая разбивает рассматриваемый отрезок на $N = 2n+1$ одинаковых частей. Пропуская крайние узлы, оставшуюся часть разобьем на два подкласса: $t_{2k-1} = \frac{\pi}{4n+2}(2k-1)$, $k = 1, \ldots, n$ – точки максимума рассматриваемой функции в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, $t_{2k} = \frac{2\pi k}{4n+2} = \frac{\pi}{2n+1}k$, $k = 1, \ldots, n$ – её нули в той же области.

Далее константу Лебега (3) представим в виде суммы N интегралов, затем применим к каждому из них (кроме первого) формулу замены переменной. Соответствующим образом введенные и использованные в расчётах новые переменные $u = t - t_{2k-1}$, $v = t - t_{2k}$, $u, v \in [0, T]$, $k = 1, \ldots, n$ позволяют избавиться от модуля в формуле (3) и получить представление (23):

$$
\begin{aligned}
L_n =& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \\
=& \frac{2}{\pi}\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt + \int\limits_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \\
&+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)(u+t_{2k-1})|}{\sin(u+t_{2k-1})}\,du + \int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)(v+t_{2k})|}{\sin(v+t_{2k})}\,dv\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt \\
&+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_0^{T} \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2} + (2n+1)u\right)\right|}{\sin(u+t_{2k-1})}\,du + \int\limits_0^{T} \frac{|\sin(\pi k + (2n+1)v)|}{\sin(v+t_{2k})}\,dv\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_0^{T} \frac{|\cos(2n+1)u|}{\sin(u+t_{2k-1})}\,du + \int\limits_0^{T} \frac{|\sin(2n+1)v|}{\sin(v+t_{2k})}\,dv\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{T}\left(\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}\,dt + \frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})}\right)dt \\
=& I_0(n) + I(n),
\end{aligned}
$$

где $T = \frac{\pi}{4n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Основная теорема данного пункта доказана. □

Теорема 2. *Для составляющей (24) константы Лебега (23) справедливы соотношения*

$$\theta < I_0(n) < \varphi_1(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_1(n) \equiv \frac{\pi}{2}\theta\alpha_n, \tag{27}$$

где функция α_n определена в (9),

$$\theta = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 0.872654299\ldots \tag{28}$$

Доказательство. В области $(0,T]$ рассмотрим следующие эквивалентные между собой двусторонние неравенства:

$$\begin{gathered}\frac{\sin\frac{\pi}{4n+2}}{\frac{\pi}{4n+2}}t \leqslant \sin t < t \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t} < \frac{1}{\sin t} \leqslant \frac{\frac{\pi}{4n+2}}{\sin\frac{\pi}{4n+2}}\frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow\; \frac{\sin(2n+1)t}{t} < \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \leqslant \frac{\frac{\pi}{4n+2}}{\sin\frac{\pi}{4n+2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}, \quad t\in\left(0,\frac{\pi}{4n+2}\right].\end{gathered} \tag{29}$$

В точке $t=0$ функции $y=\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$, $y=\frac{\sin(2n+1)t}{t}$ доопределим через их правосторонние пределы $y(0)=y(+0)=2n+1$. Теперь двойное неравенство (29) интегрируем по области $[0,T]$, предварительно умножив его на константу $\frac{2}{\pi}$. В итоге получим строгие неравенства вида

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt < \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt < \frac{\frac{\pi}{4n+2}}{\sin\frac{\pi}{4n+2}}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt \\ \Leftrightarrow\; \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt < I_0(n) < \frac{\pi}{2}\alpha_n\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt.\end{gathered}$$

Интеграл, участвующий в последнем неравенстве, выразим через ряд:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt \\ =&\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\left((2n+1)-\frac{1}{3!}(2n+1)^3t^2+\frac{1}{5!}(2n+1)^5t^4-\frac{1}{7!}(2n+1)^7t^6+\ldots\right)dt \\ =&\frac{2}{\pi}\left((2n+1)t-\frac{1}{3\cdot3!}(2n+1)^3t^3+\frac{1}{5\cdot5!}(2n+1)^5t^5-\frac{1}{7\cdot7!}(2n+1)^7t^7+\ldots\right)\Bigg|_0^T \\ =&1-\frac{1}{3\cdot3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{5\cdot5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{7\cdot7!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\equiv\theta.\end{aligned}$$

Получили быстро сходящийся знакопеременный ряд, сумма которого совпадает со значением $\frac{2}{\pi}\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (см. формулы (10), (28)). С учётом лишь первых семи его членов для его суммы имеем двустороннюю оценку $0.87265429946<\theta<0.87265429948$. Теорема 2 доказана. □

Введем обозначения, позволяющие далее компактно записать формулы для L_n, получаемые на основе теоремы 1:

$$y_{2k-1}=y(t_{2k-1})=\frac{1}{\sin t_{2k-1}},\quad y_{2k}=y(t_{2k})=\frac{1}{\sin t_{2k}},\quad k=1,\ldots,n, \tag{30}$$

$$S(n)=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}y_{2k}=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin t_{2k}}, \tag{31}$$

$$I_1(n)=\frac{2}{\pi(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\left(\frac{\sin(2n+1)t\,\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})}-\frac{\cos(2n+1)t\,\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})}\right)dt, \tag{32}$$

$$I_2(n) = \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left(\frac{\cos(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k-1}))}{\sin^3(t+t_{2k-1})} \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k}))}{\sin^3(t+t_{2k})} \right) dt, \tag{33}$$

где $n \in \mathbb{N}$, узлы t_j определены в (26).

Теорема 3. *Для второй составляющей (25) константы (23) верны следующие представления:*

$$I(n) = S(n) + I_1(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

$$I(n) = S(n) + \varphi_3(n) - I_2(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

где функции, входящие в их правые части, определены соответственно в (31), (32), (17) и (33).

Доказательство. Для преобразования интегралов, входящих в сумму (25), используем формулу интегрирования по частям. К первой группе интегралов применим замены

$$u = \frac{1}{\sin(t+t_{2k-1})}, \quad dv = \cos(2n+1)t\,dt, \quad k = 1,\dots,n, \quad t_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{4n+2},$$

а ко второй –

$$u = \frac{1}{\sin(t+t_{2k})}, \quad dv = \sin(2n+1)t\,dt, \quad k = 1,\dots,n, \quad t_{2k} = \frac{2k\pi}{4n+2}.$$

После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
I(n) =& \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left(\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})}\,dt + \frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})} \right) dt \\
=& \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} \frac{1}{\sin(t+t_{2k-1})} \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\sin(2n+1)t\cos(t+t_{2k-1})}{(2n+1)\sin^2(t+t_{2k-1})}\,dt \right. \\
& \left. + \left(-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} \frac{1}{\sin(t+t_{2k})} \right) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\cos(2n+1)t\cos(t+t_{2k})}{(2n+1)\sin^2(t+t_{2k})}\,dt \right) \\
=& \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2n+1} \frac{1}{\sin t_{2k}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2n+1} \int_0^T \left(\frac{\sin(2n+1)t\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})} - \frac{\cos(2n+1)t\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})} \right) dt \right) \\
=& \frac{4}{\pi(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} y_{2k} \\
& + \frac{2}{\pi(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left(\frac{\sin(2n+1)t\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})} - \frac{\cos(2n+1)t\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})} \right) dt,
\end{aligned}$$

где значения функций y_j определены в (30). Использование обозначений (31) и (32) в полученном равенстве позволяет завершить доказательство формулы (34).

Далее используем формулу интегрирования по частям в (32). На этот раз к первой группе интегралов из состава $I_1(n)$ применим замены вида

$$u = \frac{\cos(t + t_{2k-1})}{\sin^2(t + t_{2k-1})}, \quad dv = \sin(2n+1)t\,dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

а ко второй –

$$u = \frac{\cos(t + t_{2k})}{\sin^2(t + t_{2k})}, \quad dv = \cos(2n+1)t\,dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

затем упростим их:

$$\begin{aligned}
I_1(n) =& \frac{2}{\pi(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} \Bigg(-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} \frac{\cos(t+t_{2k-1})}{\sin^2(t+t_{2k-1})}\Bigg|_0^T - \int\limits_0^T \frac{\cos(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k-1}))}{(2n+1)\sin^3(t+t_{2k-1})}\,dt \\
&\qquad - \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} \frac{\cos(t+t_{2k})}{\sin^2(t+t_{2k})}\Bigg|_0^T - \int\limits_0^T \frac{\sin(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k}))}{(2n+1)\sin^3(t+t_{2k})}\,dt \Bigg) \\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos t_{2k-1}}{\sin^2 t_{2k-1}} - \frac{\cos t_{2k+1}}{\sin^2 t_{2k+1}} \right) \\
&- \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^T \Bigg(\frac{\cos(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k-1}))}{\sin^3(t+t_{2k-1})} \\
&\qquad + \frac{\sin(2n+1)t\,(1+\cos^2(t+t_{2k}))}{\sin^3(t+t_{2k})} \Bigg) dt \\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \left(\frac{\cos t_1}{\sin^2 t_1} - \frac{\cos t_{2n+1}}{\sin^2 t_{2n+1}} \right) - I_2(n) \\
=& \frac{2\cos t_1}{\pi((2n+1)\sin t_1)^2} - I_2(n) = \frac{2}{\pi}\alpha_n^2 \cos\frac{\pi}{4n+2} - I_2(n).
\end{aligned}$$

С учётом обозначения (17) полученное равенство перепишем в виде

$$I_1(n) = \varphi_3(n) - I_2(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

который и позволяет из формулы (34) получить равносильную ей формулу (35). Теорема полностью доказана. □

Замечание 3. *Для константы Лебега верны представления*

$$L_n = I_0(n) + S(n) + I_1(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

$$L_n = I_0(n) + S(n) + \varphi_3(n) - I_2(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

которые являются простыми следствиями теорем 1 и 3 (см. формулы (23), (34), (35)). В следующем пункте они позволят строго оценить константу L_n снизу и сверху.

4. Двусторонние оценки константы Лебега

Несколько первых точных значений константы Лебега $L_n = L(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $L(0) = 1$, ниже будут использованы в ходе обоснования теорем, связанных с верхней оценкой L_n. Вычислим их согласно формулам (23)–(25) либо (5):

$$\begin{aligned} L(1) &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991124\ldots, \\ L(2) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{\pi}\left(-\sin\frac{\pi}{5} + 3\sin\frac{2\pi}{5}\right) = 1.642188435\ldots, \\ L(3) &= \frac{1}{7} + \frac{2}{3\pi}\left(11\sin\frac{\pi}{7} + 5\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) = 1.778322861\ldots \end{aligned} \tag{39}$$

Заметим, что трудоемкость вычислений быстро увеличивается с ростом n. Следовательно, с практической точки зрения на первый план выходит нахождение хорошей приближенной формулы вида

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln n + A, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A \in [1, 3] \subset (0, \infty) \tag{40}$$

для вычисления значений констант L_n, $n \geqslant 1$. Заметим, что сужение области изменения параметра A в (40) до промежутка $[1, 3]$ согласовано с известными результатами упомянутых во введении работ.

В рамках данного пункта решим задачу улучшения известных в литературе нижних и верхних оценок для константы Лебега L_n.

Задача 1. *Найти монотонно убывающую последовательность $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$, $A_k \in [1, 3]$, элементы которой равномерно относительно параметра n обеспечивают выполнение неравенств*

$$L_n \leqslant A_k + \frac{4}{\pi^2}\ln n \equiv \mu_k(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{41}$$

Используя результаты и обозначения предыдущих пунктов, вначале докажем теорему о двусторонней оценке константы (3).

Теорема 4. *Для константы Лебега (3) имеет место двойное неравенство*

$$I_0(n) + S(n) < L_n < I_0(n) + S(n) + \varphi_3(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

составляющие которого определены формулами (24), (31) и (17).

Доказательство. 1. Для обоснования верхней оценки в (42) используем формулу (38), согласно которой достаточно установить, что сумма $I_2(n)$ (см. (33)) положительна при любых натуральных значениях параметра n. Действительно, все подынтегральные функции в формуле (33) положительны, таковыми являются и определенные интегралы от них по области $[0, T]$, следовательно, верна импликация

$$I_2(n) > 0, \quad n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; L_n < I_0(n) + S(n) + \varphi_3(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Для доказательства нижней оценки в (42) достаточно установить положительность последней составляющей в формуле (37), т.е. доказать неравенство $I_1(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Используя формулу (32) и обозначения

$$y = g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(t + t_{2k-1})}{\sin^2(t + t_{2k-1})} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}(t + t_{2k-1})\operatorname{ctg}(t + t_{2k-1}), \quad t \in [0, T], \tag{43}$$

$$y = h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(t + t_{2k})}{\sin^2(t + t_{2k})} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}(t + t_{2k})\operatorname{ctg}(t + t_{2k}), \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

перепишем неравенство $I_1(n) > 0$ в эквивалентном виде

$$\overline{I}_1(n) > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \overline{I}_1(n) = \int\limits_0^T \big(g_n(t)\sin(2n+1)t - h_n(t)\cos(2n+1)t\big)\,dt. \tag{45}$$

Предварительно исследуем поведение функций (43), (44) в декартовой системе координат tOy. Они являются положительными, вогнуто убывающими в области своего определения функциями. Таковыми являются, как нетрудно в этом убедиться, входящие в их составы косекансы, котангенсы и их произведения, определенные в соответствующих подобластях области $[T, \frac{\pi}{2}]$. Для них и их производных верны соотношения

$$g_n(t) > h_n(t), \quad t \in [0,T], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{46}$$

$$g_n'(t) < h_n'(t) < 0 \ (\Leftrightarrow |g_n'(t)| > |h_n'(t)|), \quad g_n''(t) > h_n''(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Справедливость неравенства (46) легко следует из определений функций (43), (44) и их свойств: при любых значениях аргумента t и параметра n каждая составляющая $\operatorname{cosec}(t+t_{2k-1})\operatorname{ctg}(t+t_{2k-1})$ в сумме (43) больше соответствующей составляющей $\operatorname{cosec}(t+t_{2k})\operatorname{ctg}(t+t_{2k})$ из (44). Неравенства (47) устанавливаются, применяя к явным выражениям их производных, выраженных также через котангенсы и косекансы, аналогичные рассуждения. Проще говоря, эти неравенства являются очевидными выражениями геометрических свойств функций g_n, h_n.

Понадобятся уравнения прямых (стягивающих хорд $y = L_n(t)$, $y = l_n(t)$), проходящих через известные граничные точки $A_1(0, g_n(0))$, $A_2(T, g_n(T))$ и $B_1(0, h_n(0))$, $B_2(T, h_n(T))$ графиков функций (43) и (44) соответственно:

$$L_n(t) = a_1 + k_1 t, \quad a_1 = a_1(n) = g_n(0), \quad k_1 = k_1(n) = \frac{g_n(T) - g_n(0)}{T}, \quad t \in [0,T], \tag{48}$$

$$l_n(t) = a_2 + k_2 t, \quad a_2 = a_2(n) = h_n(0), \quad k_2 = k_2(n) = \frac{h_n(T) - h_n(0)}{T}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{49}$$

где коэффициенты прямых (48), (49) выражены через вполне определенные величины

$$g_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos t_{2k-1}}{\sin^2 t_{2k-1}}, \quad g_n(T) = h_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos t_{2k}}{\sin^2 t_{2k}}, \quad h_n(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos t_{2k+1}}{\sin^2 t_{2k+1}}. \tag{50}$$

В силу того, что функции $g_n(t)$, $h_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ являются вогнуто убывающими в области $[0,T]$ и для их стягивающих хорд выполняются соотношения (46)–(50), имеем:

$$\begin{aligned} &g_n(t) < L_n(t), \quad h_n(t) < l_n(t), \quad t \in (0,T),\\ &g_n(0) = L_n(0), \quad g_n(T) = L_n(T) = l_n(0), \quad h_n(T) = l_n(T), \end{aligned} \tag{51}$$

$$L_n(t) - g_n(t) \geqslant l_n(t) - h_n(t) \geqslant 0, \quad t \in [0,T], \tag{52}$$

причём равенство в (52) достигается только на концах рассматриваемой области.

Далее, как следствие соотношений (49)–(51), получим необходимую для решения проблемы нижней оценки константы Лебега цепочку неравенств вида

$$g_n(t) > g_n(T) > l_n(t) > h_n(t) > 0, \quad t \in (0,T), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

Используя неравенства (53) и свойства интеграла Римана, оценим снизу дискретную функцию $\overline{I}_1(n)$. Для этого первое подынтегральное выражение в (45) уменьшим, а второе – увеличим, затем вычислим эти интегралы. В итоге получим:

$$\overline{I}_1(n) > \int\limits_0^T g_n(T)\sin(2n+1)t\,dt - \int\limits_0^T l_n(t)\cos(2n+1)t\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= g_n(T)\int_0^T \sin(2n+1)t\,dt - \int_0^T \cos(2n+1)t\,(a_2+k_2t)\,dt \\
&= \frac{g_n(T)}{2n+1} - \left(\frac{a_2+k_2t}{2n+1}\sin(2n+1)t\Big|_0^T - \int_0^T \frac{k_2\sin(2n+1)t}{2n+1}\,dt\right) \\
&= \frac{h_n(0)}{2n+1} - \left(\frac{a_2}{2n+1} + k_2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right) \\
&= \frac{h_n(0)}{2n+1} - \left(\frac{h_n(0)}{2n+1} + \frac{\pi-2}{2(2n+1)^2}\frac{h_n(T)-h_n(0)}{T}\right) \\
&= \frac{\pi-2}{\pi(2n+1)}\big(h_n(0)-h_n(T)\big) > 0, \quad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Дополнительно здесь использованы соотношения $g_n(T) = h_n(0)$, $h_n(0) > h_n(T)$.

Установленное неравенство, эквивалентность вида

$$\overline{I}_1(n) > 0, \quad n\in\mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad I_1(n) > 0, \quad n\in\mathbb{N},$$

формула (37) позволяют теперь без больших усилий установить справедливость нижней оценки в (42). Теорема доказана. □

Из хода обоснования теоремы 4 видно, что константа Лебега и сверху, и снизу оценена несколько грубо. Несмотря на это, основное неравенство (42) позволит нам далее получить строгие двусторонние оценки для константы (3). В литературе нижние оценки L_n проводились реже, чем верхние. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае лагранжевой интерполяции [24]. Сказанное связано с возникающими при их получении специфическими проблемами. Однако результаты теорем 2 и 4, а также леммы 4 позволят ниже достаточно строго оценить константу L_n снизу.

Теорема 5. *Для константы Лебега (3) верна равномерная нижняя оценка вида*

$$L_n > 1.173198 + \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{54}$$

Доказательство. Согласно неравенству (42) для обоснования теоремы следует детально изучить поведения интеграла $I_0(n)$ и суммы $S(n)$. Исследование первого из них проведено в теореме 2. Сумма $S(n)$ входит и в верхнюю, и в нижнюю оценки основного неравенства (42), а потому ниже её оценим с двух сторон. Для этого перепишем (31) в более удобном для изучения виде

$$S(n) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} y_{2k}\frac{\pi}{2n+1} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{2n+1}}\frac{\pi}{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{55}$$

Ясно, что сумма (55) представляет собой приближенную формулу средних прямоугольников по равномерно распределенным на отрезке $[T, \frac{\pi}{2}]$ узлам для интеграла

$$i(n) = \frac{4}{\pi^2}\int_T^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}, \quad T = \frac{\pi}{4n+2}.$$

В нашем случае, т.е. для вогнуто убывающей в ограниченной области $[T, \frac{\pi}{2}]$ функции $y = \frac{1}{\sin t}$, для суммы (55) верна двусторонняя оценка

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi}{2(2n+1)}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{t_2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} < S(n) < i(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Упростим составляющие двойного неравенства (56), используя при этом леммы 2 и 4:

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi}{2(2n+1)}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\pi(2n+1)\sin\frac{\pi}{4n+2}\cos\frac{\pi}{4n+2}} = \frac{\alpha_n}{\pi}\sec\frac{\pi}{4n+2} \equiv \varphi_6(n),$$

$$\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{t_2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} = \frac{4}{\pi^2}\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{4n+2}}{\sin\frac{\pi}{4n+2}} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{4n+2}n(2n+1)}{\sin\frac{\pi}{4n+2}n(2n+1)}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\ln n + \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\frac{\pi}{4n+2}\right) \equiv \frac{4}{\pi^2}\ln n + \varphi_5(n),$$

$$i(n) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{T}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} = \frac{4}{\pi^2}\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{8n+4}}{\sin\frac{\pi}{8n+4}} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{8n+4}\cdot 2\cos\frac{\pi}{8n+4}\cdot n(2n+1)}{\sin\frac{\pi}{8n+4}\cdot 2\cos\frac{\pi}{8n+4}\cdot n(2n+1)}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\ln n + \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{4n+2}\right)\right) \equiv \frac{4}{\pi^2}\ln n + \varphi_2(n).$$

Проведённые выше расчёты позволяют переписать неравенство (56) в виде

$$\varphi_5(n) + \varphi_6(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n < S(n) < \varphi_2(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

Теперь с учётом неравенств (42), (27), (57) и результатов леммы 4 легко установим справедливость неравенства (54):

$$L(n) > I_0(n) + S(n) > \theta + \varphi_5(n) + \varphi_6(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n > \theta + \inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi_5(n) + \inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi_6(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n$$

$$> 0.872654 + 0.0907902 + 0.202642 + \frac{4}{\pi^2}\ln n = 1.173198 + \frac{4}{\pi^2}\ln n.$$

Теорема доказана. □

В последующих двух теоремах определим конкретные значения первых двух констант A_1 и A_2 из задачи 1, посвящённой верхней оценке константы Лебега.

Теорема 6. *Решением задачи 1 является константа* $A_1 = 1.705598$, *т.е. имеет место строгое неравенство*

$$L_n < 1.705598 + \frac{4}{\pi^2}\ln n \equiv \tilde{\mu}_1(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{58}$$

Доказательство. Константу Лебега (3) оценим сверху с учетом неравенств (42), (27), (57):

$$L_n < I_0(n) + S(n) + \varphi_3(n) < \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \varphi_3(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

Учитывая справедливые для функций $\varphi_1, \varphi_2 \in V_\delta^-$, $\varphi_3 \in V_\delta^+$ соотношения (12), (15), (19), продолжим равномерную оценку сверху в (59):

$$L_n < \max_{n\in\mathbb{N}}\varphi_1(n) + \max_{n\in\mathbb{N}}\varphi_2(n) + \max_{n\in\mathbb{N}}\varphi_3(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n$$

$$< 0.913842 + 0.533743 + 0.258013 + \frac{4}{\pi^2}\ln n = 1.705598 + \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \in D_1 = \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

Проверим выполнение неравенства (58) при первоначальных значениях аргумента n, используя точные значения констант Лебега из (39), и вычислим допущенную при этом погрешность $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}(n) \equiv \tilde{\mu}_1(n) - L(n)$:

$$
\begin{aligned}
n = 1: \quad & L(1) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991\ldots, \quad \tilde{\mu}_1(1) = 1.705598 + \frac{4}{\pi^2}\ln 1 = 1.705598 \\
& \Rightarrow\ L(1) < \tilde{\mu}_1(1), \quad \tilde{\varepsilon}_1 \approx 0.269607; \\
n = 2: \quad & L(2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{\pi}\left(3\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}\right) = 1.642188\ldots, \\
& \tilde{\mu}_1(2) = 1.705598 + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 \approx 1.986919\ \Rightarrow\ L(2) < \tilde{\mu}_1(2), \quad \tilde{\varepsilon}_2 \approx 0.344731; \\
n = 3: \quad & L(3) = \frac{1}{7} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\sin\frac{4\pi}{7} + \frac{5}{3}\sin\frac{2\pi}{7} + \frac{11}{3}\sin\frac{\pi}{7}\right) = 1.778322\ldots, \\
& \tilde{\mu}_1(3) = 1.705598 + \frac{4}{\pi^2}\ln 3 \approx 2.150849\ \Rightarrow\ L(3) < \tilde{\mu}_1(3), \quad \tilde{\varepsilon}_3 \approx 0.372526.
\end{aligned}
$$

Неравенства выполнены, их левые и правые части различаются на небольшую величину. При увеличении аргумента n наблюдается рост допущенной погрешности $\tilde{\varepsilon}_n$, которая затем ($n \gg 1$) будет стабилизироваться около вполне определенного числа.

Решение $A_1 = 1.705598$ задачи 1 позволяет утверждать, что существует множество других ее решений, которые удовлетворяют последовательности неравенств $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_k > \ldots$ Ниже найдем конкретное значение A_2, используя при этом результаты лемм 1–3, установленные для области $D_2 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Теорема 7. *Константа $A_2 = 1.577629$, $A_2 < A_1$, является решением задачи 1, т.е. имеет место строгое неравенство*

$$
L_n < 1.577629 + \frac{4}{\pi^2}\ln n \equiv \tilde{\mu}_2(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{60}
$$

Доказательство. Вначале установим справедливость оценки (60) в подобласти D_2 множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для этого используем неравенство (59) (оно автоматически выполняется для всех n из области D_2), в котором функции $L(n)$, $\varphi_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, оценим сверху, используя на этот раз соотношения (13), (16), (20):

$$
\begin{aligned}
L_n <& \max_{n\in D_2}\varphi_1(n) + \max_{n\in D_2}\varphi_2(n) + \max_{n\in D_2}\varphi_3(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n \\
<& 0.880022 + 0.439594 + 0.2580134 + \frac{4}{\pi^2}\ln n = 1.577629 + \frac{4}{\pi^2}\ln n = \tilde{\mu}_2(n), \quad n \in D_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, неравенство (41) в подобласти $D_2 \subset \mathbb{N}$ выполняется для константы $A_2 = 1.577629$, $A_2 < A_1$.

Проверим выполнение полученного неравенства при значениях параметра $n = 1$ и $n = 2$, не входящих в область D_2:

$$
\begin{aligned}
n = 1: \quad & L(1) = 1.435991\ldots, \quad \tilde{\mu}_2(1) = 1.577629 + \frac{4}{\pi^2}\ln 1 = 1.577629\ \Rightarrow\ L(1) < \tilde{\mu}_2(1), \\
n = 2: \quad & L(2) = 1.642188\ldots, \quad \tilde{\mu}_2(2) = 1.577629 + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 \approx 1.858551\ \Rightarrow\ L(2) < \tilde{\mu}_2(2).
\end{aligned}
$$

Они выполнены, следовательно, справедливость неравенства (60) полностью установлена. Теорема доказана. □

Замечание 4. *Для остаточного члена $O_n \equiv L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n$ функции Лебега верна равномерная двусторонняя оценка*

$$1.173198 < L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n < 1.577629, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{61}$$

которая является прямым следствием теорем 5 и 7.

Замечание 5. *Поиск последовательности решений A_k из задачи 1 с использованием основной теоремы 4 не приводит к установлению верхней экстремальной величины A^* из (8). Сказанное следует из выводов лемм 1–3 относительно образов $R(\varphi_k)$ функций $\varphi_k = \varphi_k(n)$, $k = 1, 2, 3$. Поэтому задачу (8) ниже решим несколько другим способом.*

5. Экстремальная задача, связанная с верхней оценкой L_n

Используя обозначения предыдущего пункта, экстремальную задачу (8) сформулируем в удобном для дальнейших исследований виде.

Задача 2. *Среди всевозможных решений задачи 1 найти наименьшую константу $A^* = \min\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, для которой равномерно относительно аргумента n выполняется неравенство*

$$L_n \leqslant A^* + \frac{4}{\pi^2}\ln n \equiv \tilde{\mu}(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Данную экстремальную задачу, связанную с верхней оценкой константы Лебега, решим на основе усиления основной теоремы 4 (см. замечание 5). Заметим, что вопросы нижней оценки константы L_n, рассмотренные и частично решенные в предыдущем пункте, а также ее экстремальный вариант в рамках данной работы рассматриваться не будут. Решение аналога задачи 2 для этого случая требует привлечения дополнительных ресурсов и усилий.

В декартовой системе координат nOy рассмотрим функции

$$y = L(n), \quad y = \tilde{\mu}_1(n), \quad y = \tilde{\mu}_2(n), \quad y = \tilde{\mu}(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{63}$$

входящие в соотношения (23), (58), (60) и (62) соответственно. Первая из них (константа Лебега) с некоторой погрешностью ведет себя как логарифмическая функция, но не является таковой. Остальные функции из (63) можно получить друг от друга параллельным переносом их графиков относительно оси On, сохраняя при этом их вершины на прямой $n - 1 = 0$.

Исходя из ранее проведенных исследований функции Лебега и геометрических соображений, можно предположить, что решением экстремальной задачи 2 является константа $A^* = L(1) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. Для обоснования справедливости данной гипотезы вернёмся к тождеству (37), в котором слагаемое $I_1(n)$ (см. (32)) оценим сверху другим способом. Ранее в ходе доказательства основной теоремы 4 использовали неравенство $I_1(n) < \varphi_3(n)$, $n \in \mathbb{N}$. С целью получения более точной верхней оценки для суммы (32) представим её в виде разности двух интегралов:

$$I_1(n) = \tilde{I}_1(n) - \tilde{I}_\varepsilon(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(n) =& \frac{2}{\pi(2n+1)} \int\limits_0^T \big(L_n(t)\sin(2n+1)t - l_n(t)\cos(2n+1)t\big)\,dt \\ =& \frac{2}{\pi(2n+1)} \int\limits_0^T L_n(t)\sin(2n+1)t\,dt - \frac{2}{\pi(2n+1)} \int\limits_0^T l_n(t)\cos(2n+1)t\,dt, \end{aligned} \tag{65}$$

$$\tilde{I}_\varepsilon(n) = \frac{2}{\pi(2n+1)} \int\limits_0^T \big((L_n(t) - g_n(t))\sin(2n+1)t - (l_n(t) - h_n(t))\cos(2n+1)t\big)\,dt,$$

функции $g_n(t)$, $h_n(t)$, $L_n(t)$, $l_n(t)$ определены в (43), (44), (48), (49) соответственно.

Вначале вычислим точное значение интеграла $\tilde{I}_1(n)$. Для этого к разности интегралов в (65) применим формулу интегрирования по частям с соответствующими заменами вида $u = L_n(t)$, $dv = \sin(2n+1)t\,dt$ и $u = l_n(t)$, $dv = \cos(2n+1)t\,dt$, затем вычислим их, используя при этом соотношения (48), (49):

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1(n) =& \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\int\limits_0^T (k_1 t + a_1)\sin(2n+1)t\,dt - \int\limits_0^T (k_2 t + a_2)\cos(2n+1)t\,dt\right)\\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)}\Bigg(\left(-\frac{k_1 t + a_1}{2n+1}\cos(2n+1)t\right)\Big|_0^T + \frac{k_1}{2n+1}\int\limits_0^T \cos(2n+1)t\,dt\\
&\qquad - \left(\frac{k_2 t + a_2}{2n+1}\sin(2n+1)t\right)\Big|_0^T - \frac{k_2}{2n+1}\int\limits_0^T \sin(2n+1)t\,dt\Bigg)\\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\frac{k_1+k_2}{(2n+1)^2} + \frac{a_1 - a_2 - k_2 T}{2n+1}\right)\\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{h_n(T) - g_n(0)}{T} + \frac{1}{(2n+1)}(g_n(0) - h_n(T))\right)\\
=& \frac{2}{\pi(2n+1)}\frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(g_n(0) - h_n(T))\\
=& \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos t_{2k-1}}{\sin^2 t_{2k-1}} - \frac{\cos t_{2k+1}}{\sin^2 t_{2k+1}}\right)\\
=& \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\frac{\cos t_1}{\sin^2 t_1} - \frac{\cos t_{2n+1}}{\sin^2 t_{2n+1}}\right)\\
=& \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\cos\frac{\pi}{4n+2}}{\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}\\
=& \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{4n+2}.
\end{aligned}$$

Полученный результат и обозначение (18) позволяют записать следующую явно определенную формулу для интеграла (65):

$$\tilde{I}_1(n) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\alpha_n^2\cos\frac{\pi}{4n+2} \equiv \varphi_4(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Теперь исследуем поведение интеграла $\tilde{I}_\varepsilon(n)$. Для этого подробно изучим подынтегральную функцию (функцию погрешности)

$$\begin{gathered}
\varepsilon_n(t) \equiv p_n(t) - q_n(t),\\
p_n(t) \equiv (L_n(t) - g_n(t))\sin(2n+1)t, \quad q_n(t) \equiv (l_n(t) - h_n(t))\cos(2n+1)t
\end{gathered} \tag{67}$$

с использованием элементов дифференциального исчисления.

1. Для функции (67) выполняются соотношения

$$\varepsilon_n(0)=\varepsilon_n(T)=0,\quad \varepsilon_n\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(L_n\left(\frac{T}{2}\right)-g_n\left(\frac{T}{2}\right)\right)-\left(l_n\left(\frac{T}{2}\right)-h_n\left(\frac{T}{2}\right)\right)\right]>0.$$

Более того, имеем $\varepsilon_n(t)>0$, $t\in(\frac{T}{2},T)$, так как в рассматриваемой области для её составляющих верны неравенства $\sin(2n+1)t>\cos(2n+1)t$ и $L_n(t)-g_n(t)>l_n(t)-h_n(t)$ (см. (52)).

Функция $\varepsilon_n(t)$ обращается в нуль ещё в одной точке $t^*=t^*(n)$, принадлежащий интервалу $(0,\frac{T}{2})$. С целью обоснования этого утверждения рассмотрим эквивалентные между собой уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(t)=0\ &\Leftrightarrow\ (L_n(t)-g_n(t))\sin(2n+1)t=(l_n(t)-h_n(t))\cos(2n+1)t\\ &\Leftrightarrow\ \operatorname{ctg}(2n+1)t=\frac{L_n(t)-g_n(t)}{l_n(t)-h_n(t)},\quad t\in(0,T),\quad n\in\mathbb{N},\end{aligned}\tag{68}$$

где правая часть уравнения (68) согласно неравенству (52) всегда строго больше единицы, следовательно, $\operatorname{ctg}(2n+1)t>1$, $t\in(0,T)$, $n\in\mathbb{N}$. Полученное условие на правую часть равенства (68) означает, что корень t^* всегда находится в области $(0,\frac{T}{2})$.

2. Выполняется неравенство $\varepsilon_n'(0)<0$, т.е. функция погрешности убывает в некоторой окрестности нуля и принимает отрицательные значения. Здесь

$$\varepsilon_n'(0)=h_n'(0)-l_n'(0)\equiv\operatorname{tg}\alpha(B_1)-\operatorname{tg}\beta(B_1),$$

где $\alpha(B_1)$ – угол между осью Ot и касательной к графику функции $y=h_n(t)$, проведённой в точке $B_1=B_1(0,h_n(0))$, а $\beta(B_1)$ – угол между осью Ot и стягивающей хордой $y=l_n(t)$, $t\in[0,T]$. Так как $h_n(t)$, $t\in[0,T]$, является вогнуто убывающей функцией, в точке B_1 имеем $\alpha(B_1)<\beta(B_1)$ (оба угла принадлежат второй четверти). Поэтому разность их тангенсов всегда отрицательна.

На правом конце области определения имеет место неравенство $\varepsilon_n'(T)<0$, где

$$\varepsilon_n'(T)=L_n'(T)-g_n'(T)\equiv\operatorname{tg}\beta(A_2)-\operatorname{tg}\alpha(A_2),$$

$\alpha(A_2)$ – угол между осью Ot и касательной к графику функции $y=g_n(t)$, проведённой в точке $A_2(T,g_n(T))$, а $\beta(A_2)$ – угол между осью Ot и стягивающей хордой $y=L_n(t)$, $t\in[0,T]$, и эти углы также принадлежат второй четверти. Следовательно, имеют место импликации

$$\alpha(A_2)>\beta(A_2)\quad\Rightarrow\quad\operatorname{tg}\alpha(A_2)>\operatorname{tg}\beta(A_2)\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_n'(T)<0.$$

Теперь можем сказать, что функция $\varepsilon_n(t)$ принимает отрицательные значения в интервале $(0,t^*)$, положительные – в (t^*,T), равномерно ограничена в области своего определения, т.е. имеет место двойное неравенство:

$$-\|l_n-h_n\|<\varepsilon_n(t)<\|L_n-g_n\|,\quad t\in[0,T],$$

где $\|L_n-g_n\|\gg\|l_n-h_n\|$.

3. Выполнено

$$\varepsilon_n''(0)=2(2n+1)(L_n'(0)-g_n'(0))+h_n''(0)\equiv 2(2n+1)(\operatorname{tg}\beta(A_1)-\operatorname{tg}\alpha(A_1))+h_n''(0)>0,$$

так как обе составляющие последней суммы положительны: в вершине $A_1=A_1(0,g_n(0))$ стягивающая хорда образует больший угол $\beta(A_1)$, чем угол $\alpha(A_1)$, являющийся углом между осью Ot и касательной к графику функции $y=g_n(t)$ в точке A_1. В силу всюду вогнутости графика функции $y=h_n(t)$, $t\in[0,T]$, верно $h_n''(0)>0$.

Справедливо

$$\varepsilon_n''(T)=2(2n+1)(l_n'(T)-h_n'(T))-g_n''(T)=2(2n+1)(\operatorname{tg}\beta(B_2)-\operatorname{tg}\alpha(B_2))-g_n''(T)<0,$$

что следует из аналогичных рассуждений, проведенных с учётом специфики вершины $B_2(T, h_n(T))$ графика функции $h_n(t)$.

Таким образом, результаты пунктов 1)–3), дополнительные сведения о составляющих p_n и q_n функции погрешности (67), полученные с использованием элементов дифференциального исчисления, позволяют утверждать следующее:

$$\tilde{I}_\varepsilon(n) = \frac{2}{\pi(2n+1)} \left(\int\limits_0^{t^*} \varepsilon_n(t)\,dt + \int\limits_{t^*}^{T} \varepsilon_n(t)\,dt \right) > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Как результат проведенных выше исследований (см. (64), (66), (69)), можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. *Для функциональной зависимости (32) справедлива следующая равномерная верхняя оценка:*

$$I_1(n) < \varphi_4(n), \quad n \in D_1 = \mathbb{N}, \tag{70}$$

где функция в правой части неравенства определена формулой (18).

Замечание 6. *Из тождеств (36), (64), (66) и обозначений (17), (18) имеем равносильность*

$$\tilde{I}_\varepsilon(n) = I_2(n) - (\varphi_3(n) - \varphi_4(n)), \quad n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{I}_\varepsilon(n) = I_2(n) - \frac{4}{\pi^2}\alpha_n^2 \cos\frac{\pi}{4n+2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где правая часть последнего равенства представлена в виде разности двух положительных функций. Следовательно, справедливость неравенства (69) можно также установить, оценив интеграл (33) снизу, т.е. проверив выполнение неравенства

$$I_2(n) > \frac{4}{\pi^2}\alpha_n^2 \cos\frac{\pi}{4n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Результаты теорем 2, 3, 5, 8 позволяют теперь решить экстремальную задачу, поставленную во введении данной работы.

Теорема 9. *Решением экстремальной задачи 2 является константа* $A^* = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$, *т.е.*

$$\min\left\{ A \mid L_n \leqslant A + \frac{4}{\pi^2}\ln n,\ n \in \mathbb{N} \right\} = A^*, \quad A^* = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991\ldots$$

Доказательство. Формула (37) для константы Лебега автоматически выполняется в подобласти $D_2 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Её составляющие $I_0(n)$, $S(n)$, $I_1(n)$ оценим сверху в области D_2, используя при этом соотношения (27), (57), (70). Затем к функциям $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, $\varphi_4(n)$, $n \in D_2$, применим соответствующие оценки (13), (16), (22). В итоге получим:

$$\begin{aligned} L(n) =& I_0(n) + S(n) + I_1(n) < \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n + \varphi_4(n) \\ &< \max_{n\in D_2}\varphi_1(n) + \max_{n\in D_2}\varphi_2(n) + \max_{n\in D_2}\varphi_4(n) + \frac{4}{\pi^2}\ln n \\ &< 0.880440 + 0.439594 + 0.093757 + \frac{4}{\pi^2}\ln n < 1.413791 + \frac{4}{\pi^2}\ln n \\ &\Rightarrow\ L(n) < 1.413791 + \frac{4}{\pi^2}\ln n \equiv \tilde{\mu}_3(n), \quad n \in D_2 \subset \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{71}$$

Используя вычисленные в (39) точные значения констант Лебега $L(1)$, $L(2)$, проверим выполнение неравенства (71) при значении аргумента $n = 2$:

$$L(2) = 1.642188\ldots, \quad \tilde{\mu}_3(2) = 1.413791 + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 = 1.694712\ldots \quad \Rightarrow \quad L(2) < \tilde{\mu}_3(2),$$

т.е. оно выполнено. Следовательно, неравенство (71) выполняется в более широком множестве аргументов $D_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$. При значении аргумента $n = 1$ оно не выполняется, т.е. верно неравенство $L(1) > \tilde{\mu}_3(1)$ ($\Leftrightarrow$ $1.435991\ldots > 1.413791\ldots$).

С целью выхода из этой ситуации переместим вершину $K(1, 1.413791)$ графика функции $y = \tilde{\mu}_3(n)$ вверх в точку $L(1, \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi})$, сохраняя параллельный перенос графика относительно оси On. При этом логарифмическая функция $\tilde{\mu}_3(n)$ тождественно совпадет с функцией

$$y = \tilde{\mu}(n) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\ln n,$$

и будут выполнены неравенства

$$L(n) < \tilde{\mu}_3(n) < \tilde{\mu}(n), \quad n \in D_3.$$

При значении аргумента $n = 1$ имеем равенство

$$L(1) = \tilde{\mu}(1) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Следовательно, во всем множестве натуральных чисел ($N \supset D_3 \supset D_2$) справедливо неравенство

$$L(n) \leqslant \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\ln n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 7. *Теорема 9 и неравенства (61) позволяют сделать следующий вывод: для остаточного члена $O_n \equiv L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n$ функции Лебега выполняется двойное неравенство*

$$1.173198 < L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n \leqslant \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991\ldots,$$

в котором верхняя оценка является окончательной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. М.: Мир, 1965.
3. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* М.: Физматгиз, 1960.
4. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ, 1976.
5. L. Fejér *Lebesguesche konstanten und divergente Fourierreihen* // J. Reine Angew. Math. 1910. V. 138. P. 22–53.
6. L. Fejér *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues* // Ann. de l'Éc. Norm. Ser. 3. 1911. V. 28. P. 63–103.
7. G. Szegö *Über die Lebesgueschen konstanten bei den Fourierchen reihen* // Math. Z. 1921. V. 9. No. 1–2. P.163–166.
8. G.H. Watson *The constant of Landau and Lebesgue* // Quart. J. Math., Oxford. 1930. Ser. 1. P. 310–318.
9. Корнейчук И.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* М.: Наука, 1976.
10. G.H. Hardy *Note on Lebesgues constants in the theory of Fourier series* // J. London Math. Soc. 1942. V. s1-17. No. 1. P. 4–13.
11. Никольский С.М. *О линейных методах суммирования рядов Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. No. 3. С. 259-278.
12. Стечкин С.Б. *Несколько замечаний о тригонометрических полиномах* // Успехи матем. наук. 1955. Т. 10. No. 1. С. 159–166.
13. Галкин П.В. *Оценки для констант Лебега* // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 3–5.
14. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Мир, 1965.
15. Жук В.В., Натансон Г.И. *Тригонометрические ряды и элементы теории аппроксимации.* Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.

16. Натансон Г.И. *Об оценке констант Лебега сумм Валле-Пуссена / Геометрические вопросы теории функций и множеств.* Калинин, 1986.
17. Сандакова С.Л. *Приближение функций суммами Фурье по тригонометрическим ортогональным полиномам*: дис. ... канд. физ.-мат. наук, Уральский гос. ун-т им. А.М. Горького. Екатеринбург, 2005. 75 с.
18. Бадков В.М. *Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: учебное пособие.* Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006.
19. Моторный В.П., Гончаров С.В., Нитиема П.К. *О сходимости в среднем рядов Фурье-Якоби* // Доповіді Національной академіі наук Украіни. 2010. № 3. С. 35–55.
20. Бадков В.М. *Оценки функции Лебега сумм Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с весом, не принадлежащим пространствам* // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 71–82.
21. Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sink-приближений непрерывных функций на отрезке* // Сиб. матем. ж. 2007. Т.48, №5. С. 1155–1166.
22. Шакиров И.А. *Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа* // Изв. ВУЗов. Матем. 2011. № 10. С. 80–88.
23. Шакиров И.А. *О функциях Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа* // Изв. ВУЗов. Матем. 2013. № 7. С. 77–89.
24. Шакиров И.А. *О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега* // Сиб. матем. ж. 2014. Т. 55, № 6. С. 1404–1423.

Искандер Асгатович Шакиров,
Набережночелнинский государственный
педагогический университет,
ул. Низаметдинова, 28,
423806, г. Набережные Челны, Россия
E-mail: iskander@tatngpi.ru