ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 1 (2018). С. 78-82.

УДК 517.5

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

А.А. МАХОТА

Аннотация. Работа посвящена исследованию вопроса полноты системы экспонент в пространстве аналитических функций в выпуклой области. Задача о полноте систем экспонент в различных функциональных пространствах является классической и изучалась в работах многих математиков: Б.Я. Левина, А.Ф. Леонтьева, А.М. Седлецкого, Б.Н. Хабибуллина, Р.С. Юлмухаметова и др.

Доказана теорема о том, что задача о полноте системы экспонент в пространстве аналитических функций в выпуклой области эквивалентна задаче о полноте системы экспонент в пространстве аналитических функций в круге, радиус которого зависит от свойств данной выпуклой области. А также рассмотрен пример, в котором в качестве выпуклой области выступает эллипс. При этом были найдены значения опорной функции эллипса и радиус соответствующего круга.

Ключевые слова: полнота системы, выпуклая область, целая функция, преобразованием Фурье-Лапласа.

Mathematics Subject Classification: 30D20

Пусть D — ограниченная, выпуклая область на комплексной плоскости и $H(D)$ — пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах. С каждым множеством комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$, в которое числа λ_k могут входить с некоторой кратностью $n_k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $k = 1, 2, ...$, связывается система экспоненциальных мономов

$$\exp\Lambda = \{\lambda^j e^{\lambda_k \lambda},\ k = 1, 2, ...,\ j = 0, ..., n_k\}.$$

Кратность $n_k = 0$ означает, что число λ_k входит в Λ ровно один раз.

Задача о полноте такой системы в пространстве $H(D)$ и в других функциональных пространствах относится к классическим задачам и послужила объектом исследований многих авторов [1]–[9]. Мы показываем, что если граница области D достаточно гладкая, то задача о полноте системы $\exp\Lambda$ в пространстве $H(D)$ эквивалентна задаче о полноте некоторой системы $\exp\Lambda'$ в пространстве $H(K)$, где K — круг, радиус которого будет зависеть от свойств области D.

Для любого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D)$ через $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$ обозначим преобразование Фурье-Лапласа этого функционала. Как известно, отображение $L : S \longrightarrow \widehat{S}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между

A.A. Makhota, On completeness of exponential systems in convex domain.

Поступила 12 октября 2017 г.

сопряженнным пространством $H^*(D)$ и пространством целых функций F, удовлетворяющих для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(F) > 0$ оценке

$$|F(re^{i\varphi})| \le \mathrm{Const}.e^{(h(\varphi)-\varepsilon)r},\ re^{i\varphi} \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Здесь

$$h(\varphi) = \max_{z\in\overline{D}} \mathrm{Re}\ e^{i\varphi}z$$

— опорная функция области D. Известно, что $\widehat{S}^{(k)}(\lambda) = S(z^k e^{\lambda z})$. Таким образом, по теореме Банаха о полноте система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда, когда найдется целая функция, которая при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (1) и имеет нули кратности n_k в точках λ_k, $k = 1, 2, ...$

В работе мы рассматриваем области с дважды непрерывно дифференцируемой опорной функцией. Положим

$$M = \max_{\varphi\in[0;2\pi]}(h''(\varphi) + h(\varphi)). \tag{2}$$

Из геометрической интерпретации опорных функций следует, что M — это максимальный радиус кривизны в точках границы области D (см. [1], стр. 108). Суммой $\Lambda' + \Lambda''$ двух наборов $\Lambda' = \{(\lambda'_k, n_k)\}$ и $\Lambda'' = \{(\lambda''_k, m_k)\}$ будем называть объединение множеств λ'_k, λ''_k, $k = 1, 2, ...$, с кратностью n_k или m_k, если точка попадает только в один из наборов, и с суммарной кратностью, если какая-то точка попадает в оба множества.

В дальнейшем воспользуемся следующей теоремой А из работы [2].

Теорема А. *Пусть u субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста ρ. Тогда существует целая функция f такая, что для любого $\gamma \ge \rho$*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \le c_\gamma \ln|z|,\ z \notin E_\gamma,$$

причем исключительное множество E_γ может быть покрыто кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = o(R^{\rho-\gamma}), \quad R \longrightarrow \infty.$$

Если число M определено по формуле (2), то функция

$$u(re^{i\varphi}) = Mr - h(\varphi)r \tag{3}$$

субгармонична на всей плоскости. В этом легко убедиться, если воспользоваться выражением оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{r}\left(M - h(\varphi)\right) - \frac{1}{r^2}rh''(\varphi) = \frac{1}{r}(M - h(\varphi) - h''(\varphi)) \ge 0.$$

В дальнейшем через L будем обозначать какую-нибудь одну фиксированную целую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы А с функцией u, определенной в (3) (при $\rho = 1$). Через Λ_0 обозначим множество нулей функции L с учетом кратности.

Теорема 1. *Система экспонент $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда, когда система $\exp(\Lambda+\Lambda_0)$ не полна в пространстве $H(K_M)$, где K_M — круг радиуса M с центром в нуле.*

Доказательство. Если система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $H(D)$, то, как отмечалось выше, найдется целая функция F, удовлетворяющая условию (1) и обращающаяся в нуль в точках $\lambda_k \in \Lambda$ с кратностью n_k.

Рассмотрим функцию $G(z) = F(z)L(z)$. Она обращается в нуль на множестве $\Lambda + \Lambda_0$ с соответствующими кратностями и вне множества E_1 удовлетворяет оценке

$$\left|G(re^{i\varphi})\right| \leqslant |F(z)L(z)| \leqslant Ce^{(h(\varphi)-\varepsilon)r}e^{\left(M-h(\varphi)+\frac{\varepsilon}{2}\right)r} = Ce^{(M-\varepsilon')r}, \tag{4}$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Множество E_1 по теореме А покрывается кругами со сходящейся суммой радиусов. Пусть сумма радиусов кругов некоторого покрытия равна A. Для произвольной точки $z \in \mathbb{C}$ проведем проекции кругов покрытия вдоль окружностей $C(z,t) = \{w : w = z + te^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi]\}$ на луч $z+\tau,\ \tau > 0$.

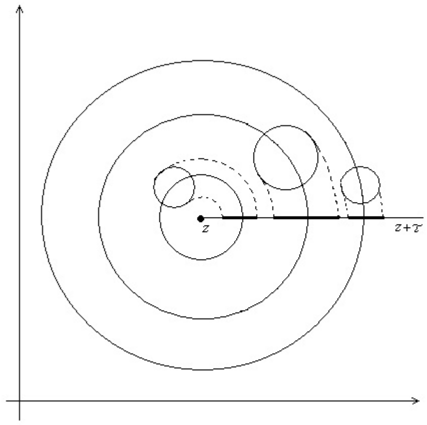

Рис. 1. Проекции окружностей

Такое геометрическое рассмотрение показывает, что можно найти окружность $C(z,t)$ с $t \in [0; 3A]$, которая не пересекается с кругами покрытия и, значит, с исключительным множеством E_1. Тогда на этой окружности выполняется оценка (4). По принципу максимума имеем

$$|G(z)| \leqslant C\exp(\max_{w\in C(z,t)}(M-\epsilon')|w|) \leq C'e^{(M-\epsilon')|z|}.$$

Поскольку функция $h_1(\varphi) \equiv M$ есть опорная функция круга K_M, то мы получаем, что система $\exp(\Lambda+\Lambda_0)$ не полна в пространстве $H(K_M)$.

Пусть теперь обратно: система $\exp(\Lambda+\Lambda_0)$ не полна в пространстве $H(K_M)$. Это значит, что найдется целая функция G, удовлетворяющая оценке

$$|G(z)| \leq Ce^{(M-\varepsilon)|z|}$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и обращающаяся в нуль на множестве $\Lambda + \Lambda_0$. Тогда функция

$$F(z) = \frac{G(z)}{L(z)}$$

является целой.

Из оценок на функции L и G получим, что вне множества E_1 выполняется оценка

$$|F(z)| \leqslant \text{Const}.r^{C}e^{(M-\varepsilon)r}e^{(-M+h(\varphi))r} \leq \text{Const}.e^{(h(\varphi)-\frac{\varepsilon}{2})r}.$$

Так же, как и выше, эту оценку можно продолжить на всю плоскость. При этом нужно воспользоваться свойством опорных функций

$$|h(\varphi)r - h(\vartheta)t| \le \max_{z\in\overline{D}} \left|re^{i\varphi} - te^{i\vartheta}\right|, \quad re^{i\varphi}, te^{i\vartheta} \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, система $\exp\Lambda$ не полна в пространстве $H(D)$. Теорема 1 доказана.

□

Приведем пример.

Рассмотрим в качестве выпуклой области D эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Опорная функция $h(\varphi)$ области D в данном случае имеет вид:

$$h(\varphi) = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Нам необходимо найти $M = \max\limits_{\varphi\in[0;2\pi]}(h''(\varphi) + h(\varphi)) < \infty$. Для этого найдем первую, вторую и третью производные опорной функции $h(\varphi)$.

Сделаем замену

$$h(\varphi) = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \\ = \sqrt{\frac{a^2(1+\cos 2\varphi)}{2} + \frac{b^2(1-\cos 2\varphi)}{2}} = \\ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\varphi}.$$

Обозначим

$$A := \frac{a^2+b^2}{2}; B := \frac{a^2-b^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$h(\varphi) = \sqrt{A + B\cos 2\varphi}.$$

Найдем

$$h''(\varphi) = \frac{-\left(A + B\cos 2\varphi\right)^2 + A^2 - B^2}{\left(A + B\cos 2\varphi\right)^{3/2}}.$$

Получаем, что

$$M = \max_{\varphi\in[0;2\pi]}(h''(\varphi) + h(\varphi)) = \frac{a^2}{b}.$$

Таким образом, максимальный радиус кривизны в точках на границе области D равен $M = \dfrac{a^2}{b}$. И система экспонент $\exp\Lambda$ не полна в пространстве функций аналитических в эллипсе тогда и только тогда, когда система $\exp(\Lambda + \Lambda_0)$ не полна в пространстве функций аналитических в круге радиуса $M = \dfrac{a^2}{b}$ с центром в нуле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распеределение корней целых функций.* Гос. изд.-во тех.-теор. лит. М: 1956. 632с.
2. Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica, 1985. Т. 11. С.257–282.
3. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 175 с.
4. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // ДАН, 2009. Т. 429, № 2, С. 155–158.
5. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 1, С. 97–109.
6. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Математ. заметки. Т. 48, вып 5. 1990. С. 80–85.
7. Румянцева А.А. *Асимптотика δ-субгармонических функций и их ассоциированных мер* // Уфимский мат. журнал, 2010, Т. 2, № 3, С. 83–107.
8. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* М.: Физматлит. 2005. 504 с.
9. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Уфа. РИЦ БашГУ. 2006. 171 с.

Алла Александровна Махота,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: allarum@mail.ru