ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 1 (2018). С. 66-77.

УДК 517.53

О МЕРАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ С ОДИНАКОВЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ ОТНОШЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

А.А. КОНОНОВА

Аннотация. Изучается влияние возмущения меры на асимптотическое поведение отношения соответстующих ортогональных многочленов. Предполагается, что носитель абсолютно непрерывной части меры сосредоточен на конечном наборе жордановых кривых. На весовую функцию накладывается модифицированное условие Сегё. Сингулярная часть меры состоит из конечного числа точечных нагрузок вне полиномиальной выпуклой оболочки носителя абсолютно непрерывной составляющей меры. Исследуется вопрос о стабильности асимптотики отношения ортогональных многочленов в следующем смысле: $\frac{P_{\nu,n}(z)}{P_{\nu,n+1}(z)} - \frac{P_{\mu,n}(z)}{P_{\mu,n+1}(z)} \to 0,\ \ n \to \infty$. Задача является обобщением задачи о компактности возмущения оператора Якоби при возмущении его спектральной меры. Найдено необходимое (а при дополнительных ограничениях необходимое и достаточное) условие сохранения асимптотического поведения ортогональных многочленов. Одним из основных инструментов исследования являются тэта-функции Римана.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, многозначные функции.

Mathematics Subject Classification: 30E15, 42C05

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследования устойчивости асимптотики отношения ортогональных многочленов при возмущении меры ортогональности, начало этого исследования опубликовано в статье [3]. Для конечной борелевской меры μ с компактным бесконечным носителем $E \subset \mathbb{C}$ рассмотрим последовательность многочленов со старшим коэффициентом единица $P_{\mu,n}(z) = z^n + ...$, ортогональных относительно меры μ:

$$\int_E P_{\mu,n}\overline{P_{\mu,k}}d\mu = \alpha_n \delta_{n,k}, \ \ \alpha_n > 0.$$

Мы будем рассматривать меры, сосредоточенные на конечном наборе жордановых кривых $E = \cup_{k=0}^{p} E_k \subset \mathbb{C}$, и конечном наборе дискретных масс, лежащих вне полиномиальной выпуклой оболочки множества E.

Хорошо известно, что при $\mathrm{supp}(\mu) \subset \mathbb{R}$ ортогональные многочлены удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению:

$$P_{n+1}(z) = (z - b_{n+1})P_n(z) - a_n^2 P_{n-1}(z).$$

A.A. Kononova, On measures generating orthogonal polynomials with similar asymptotic behavior of the ratio at infinity.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-51-150005).

Поступила 9 марта 2017 г.

Трехдиагональная матрица, элементами которой являются коэффициенты рекуррентного соотношения

$$J_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

называется матрицей Якоби. Если множество $\operatorname{supp}(\mu)$ компактно и бесконечно, то матрица Якоби порождает ограниченный самосопряженный оператор в $l^2(\mathbb{N})$, спектральной мерой которого является мера μ. Известно (см. [2]), что оператор J_ν является компактным возмущением оператора J_μ (т.е. оператор $J_\nu - J_\mu$ является компактным) тогда и только тогда, когда

$$\frac{P_{\nu,n}(z)}{P_{\nu,n+1}(z)} - \frac{P_{\mu,n}(z)}{P_{\mu,n+1}(z)} \to 0, \quad n \to \infty \tag{1}$$

(сходимость равномерная на компактных окрестностях бесконечности).

В общем случае $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathbb{C}$ в качестве обобщения матрицы Якоби можно рассматривать матрицы Хессенберга (т.е. матрицы, соответствующие оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$ в базисе из соответствующих ортогональных полиномов). В работе Б. Симанека [5] показано, что при $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathbb{C}$ условие (1) эквивалентно совпадению правых пределов соответствующих матриц Хессенберга.

В работе [3] было найдено условие на меру ν, достаточное (и в некоторых случаях необходимое) для выполнения (1). В настоящей работе вместо условия (1) рассматривается аналогичное условие со сдвигом: для некоторого фиксированного $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)} \right) = 0,$$

(сходимость равномерная на компактных окрестностях бесконечности), а также рассмотрен случай выполнения этого условия при n, стремящемся к бесконечности по подпоследовательности.

2. Основные определения и вспомогательные сведения

В этом разделе приведены основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения, для более подробного ознакомления см. [7]–[10]).

2.1. Основные обозначения. Будем говорить, что спрямляемая кривая принадлежит классу гладкости C^{2+}, если вторые производные ее координатных функций (как функций от натурального параметра) удовлетворяют условию Липшица с некоторым положительным показателем.

Пусть Ω – область в расширенной комплексной плоскости, содержащая бесконечно удаленную точку, граница которой состоит из конечного числа непересекающихся жордановых кривых $E_k,\ k = 0, \dots, p$, принадлежащих классу гладкости C^{2+}:

$$\infty \in \Omega \subset \overline{\mathbb{C}}, \ \ \partial\Omega = E := \bigcup_{k=0}^{p} E_k.$$

Рассмотрим вещественную **функцию Грина** $g(z, z_0)$ с логарифмической особенностью в точке $z_0 \in \overline{\Omega}$ (в случае $z_0 = \infty$ вместо $g(z,\infty)$ будем писать $g(z)$), ее можно определить следующими свойствами:

- $g(z, z_0)$ гармонична в $\Omega \setminus z_0$;
- $g(z, z_0) - \log|z - z_0|^{-1}$ гармонична в окрестности z_0, а при $z_0 = \infty$ $g(z) - \ln|z|$ гармонична в окрестности ∞;

- $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\Omega}} g(z,z_0)=0$ для п.в. $\zeta\in E$.

Пусть $\Phi(z,z_0)=\exp[g(z,z_0)+i\tilde{g}(z,z_0)]$[1]. Напомним, что решение задачи Дирихле с граничной функцией f может быть получено с использованием нормальной производной функции Грина:[2]

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_E f(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n_\zeta}|d\zeta|.$$

Логарифмической емкостью множества E называется число $C(E)$:

$$\ln(C(E)):=-\lim_{z\to\infty}(g(z)-\log|z|).$$

Гармонической мерой $\omega_k(z)$ $(k=0,...,p)$ будем называть решение задачи Дирихле для $\overline{\Omega}$ с граничной функцией $\chi_k(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta\in E_k;\\ 0, & \zeta\in E\setminus E_k\end{cases}$:

$$\omega_k(z):=\frac{1}{2\pi}\oint_{E_k}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n_\zeta}|d\zeta|.$$

Положим $\Omega_k(z):=1/2(\omega_k(z)+i\tilde{\omega}_k(z))$.

2.2. Класс мер. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\omega_k(\infty)\in\mathbb{Q},\quad k=1,\dots,p.$$

Будем говорить, что заданная на E весовая функция $\rho(\zeta)\geq 0$ такая, что $\int_E\rho(\zeta)|d\zeta|<+\infty$, удовлетворяет **модифицированному условию Сегё**, если

$$\oint_E\log\rho(\zeta)\frac{\partial g(\zeta)}{\partial n_\zeta}|d\zeta|>-\infty. \tag{2}$$

Определим **класс мер** $\mathcal{S}(E)$ следующим образом:

$$\mu\in\mathcal{S}(E)\quad\Leftrightarrow\quad d\mu(\zeta)=\rho(\zeta)|d\zeta|+\sum_{k=1}^{N}A_k\delta_{z_k^*}(\zeta),$$

где

1) $\rho(\zeta)$ удовлетворяет модифицированному условию Сегё на E;
2) $z_k^*\in\Omega,\ A_k>0,\ k=1,\dots,N$ и δ_z — мера Дирака, сосредоточенная в точке z.

Для меры $\mu\in\mathcal{S}(E)$ с весовой функцией $\rho(z)$ определим локально аналитическую функцию $R_\mu(z)$:

$$R_\mu(z):=\exp\left(h(z)+i\tilde{h}(z)\right),\ \text{где}\ h(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_E\ln\rho(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n_\zeta}|d\zeta|.$$

[1]Здесь и далее $\tilde{h}(z)$ обозначает функцию, гармонически сопряженную с гармонической функцией $h(z)$.

[2]Используя знак $\oint$, мы имеем в виду, что при интегрировании по незамкнутой кривой следует обходить эту кривую дважды (по одному разу вдоль каждой стороны разреза): $\oint_{E_k}F(\zeta)|d\zeta|=\int_{E_k^+}F_+(\zeta)|d\zeta|+\int_{E_k^-}F_-(\zeta)|d\zeta|$

2.3. Класс многозначности. Для многозначной функции f с однозначным модулем, заданной в области Ω, введем вектор $\Gamma(f) := (\gamma_1(f), \dots, \gamma_p(f)) \in \mathbb{T}^p$,

$$\gamma_k(f) := \frac{1}{2\pi}\Delta_k \mathrm{arg} f \ (mod\, 1),$$

где $\Delta_k f$ — приращение функции f при обходе вокруг E_k. Вектор $\Gamma(f)$ будем называть **классом многозначности** функции f.

Можно показать, что $\Gamma(\Phi(z, z_0)) = (\omega_1(z_0), \dots, \omega_p(z_0))$. Введем обозначение:

$$\Gamma_n := \Gamma(\Phi^{-n}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.4. Пространство $H^2(\Omega, \mu, \Gamma)$. Рассмотрим p-мерный вещественный тор $\mathbb{T}^p$. Для вектора $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{T}^p$ и меры $\mu \in \mathcal{S}(E)$ определим многозначное пространство Харди $H^2(\Omega, \mu, \Gamma)$ следующим образом:

$f \in H^2(\Omega, \mu, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда

- f локально аналитична в Ω и имеет там однозначный модуль;
- функция $|f^2 R_\mu|$ является субгармонической;
- $f(z_k^*) = 0$;
- $\dfrac{1}{2\pi}\Delta_k \mathrm{arg} f \equiv \gamma_k \ (mod\, 1)$,

где $\Delta_k f$, как и раньше, обозначает приращение функции f при обходе вокруг E_k. Пространство $H^2(\Omega, \mu, \Gamma)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_\mu = \oint_E f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\mu(\zeta).$$

Введем **векторную характеристику** $\mathcal{J}(\mu) \in \mathbb{T}^p$ **для меры** $\mu \in \mathcal{S}(E)$ с весом $\rho(z)$ и массами $z_j^* \in \Omega$, $j = 1, \dots, N$, следующим образом:

$$\mathcal{J}_k(\mu) = \frac{1}{4\pi}\Delta_k \arg R_\mu(z) + \sum_{j=1}^{N} \omega_k(z_j^*) \ (mod\, 1), \quad k = 1, ..., p. \tag{3}$$

2.5. Тета-функция Римана. (см. также [9].)

Образуем компактную риманову поверхность Ω_{double} рода p топологическим склеиванием двух копий $\Omega \cup E$ (Ω_+, Ω_-) с отождествлением точек из E, комплексная структура продолжается на "второй" лист Ω_- путем замены локальных параметров на комплексно сопряженные. Функции, аналитические на Ω, продолжаются на Ω_{double}:

$$f(z) := \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in \Omega_-.$$

Гомологический базис на Ω_{double} зададим следующим образом:

- b-циклы $b_j := E_j, \quad j = 1, \dots, p$
- a-циклы — кривые $a_j, j = 1, \dots, p$ такие, что $a_j \cap \Omega_+$ соединяет фиксированную точку $P \in E_0$ с E_j, $a_j \cap \Omega_-$ проходит симметрично по второму листу Ω_{double}, причем $\cap_{j=1}^p a_j = \{P\}$.

Поверхность, полученную из Ω_{double} рассечением вдоль гомологического базиса, будем обозначать $\widetilde{\Omega}_{double}$. Дифференциалы $d\Omega_k$ (абелевы дифференциалы первого рода) образуют нормированный базис абелевых дифференциалов поверхности Ω_{double}. Вычислим их периоды вдоль нашего гомологического базиса:

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k(\zeta) = iB_{k,j}, \quad B_{k,j} \in \mathbb{R},$$

где $B_{k,j}$ — элементы некоторой вещественной положительно определенной матрицы B.

Определим **тета-функцию нескольких переменных**:

$$\theta(u_1,u_2,...,u_p)=\sum_{n_1,n_2,...,n_p\in Z}\exp(-\pi\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}B_{\mu,\nu}n_\mu n_\nu+2\pi i\sum_{\nu=1}^{p}n_\nu u_\nu), \quad (4)$$

(положительная определенность матрицы B с элементами $B_{k,j}$ обеспечивает сходимость ряда). Тета-функция обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\theta(u_1,...,u_\mu+1,...,u_p)=\theta(u_1,...,u_\mu,...,u_p);\\&\theta(u_1+iB_{1,\nu},...,u_\mu+iB_{\mu,\nu},...,u_h+iB_{p,\nu})=\\&\qquad=e^{\pi B_{\nu,\nu}-2\pi i u_\nu}\theta(u_1,...,u_\mu,...,u_p).\end{aligned} \quad (5)$$

Для произвольного вектора $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)$ **тета-функцию Римана для римановой поверхности** Ω_{double} с вектором параметров $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)$ определяют следующим образом:

$$\Theta(z)=\theta(\int_P^z d\Omega_1(\zeta)-\beta_1,...,\int_P^z d\Omega_p(\zeta)-\beta_p),$$

(интегрирование в каждом интеграле производится по одному и тому же пути). Тета-функция Римана имеет ровно p нулей на $\widetilde{\Omega}_{double}$ (либо тождественно равна нулю). Ее граничные значения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\Theta_+(\zeta)&=\Theta_-(\zeta),\ \zeta\in\mathbf{a}_j,\ j=1,...,p;\\ \Theta_+(\zeta)&=e^{\pi B_{j,j}-2\pi i(\Omega_{j+}(\zeta)-\beta_j)}\Theta_-(\zeta),\ \zeta\in\mathbf{b}_j,\ j=1,...,p.\end{aligned} \quad (6)$$

Пусть z_k, $k=1,2,\dots,p$ — нули тета-функции Римана. Числа

$$k_\nu\equiv-\sum_{k=1}^{p}\int_{z_0}^{z_k}d\Omega_\nu(\zeta)+b_\nu \quad (7)$$

называются **постоянными Римана,** они не зависят от выбора b_ν.

2.6. Экстремальная задача в пространстве $H^2(\Omega,\mu,\Gamma)$. Линейный функционал, сопоставляющий функции $F\in H^2(\Omega,\mu,\Gamma)$ значение в точке $z_0\in\Omega$ (в частности, в бесконечно удаленной), является непрерывным. Следовательно, в пространстве существует воспроизводящее ядро $K_{\mu,\Gamma}(z,z_0)$:

$$F(z_0)=\oint_E F(\zeta)\overline{K_{\mu,\Gamma}(\zeta,z_0)}d\mu(\zeta).$$

Для меры $\mu\in S(E)$ и класса многозначности $\Gamma\in\mathbb{T}^p$ определим функцию

$$\psi_{\mu,\Gamma}(z)=\frac{K_{\mu,\Gamma}(z,\infty)}{K_{\mu,\Gamma}(\infty,\infty)}.$$

Нетрудно показать, что функция $\psi_{\mu,\Gamma}(z)$ обладает следующим экстремальным свойством:

$$\|\psi_{\mu,\Gamma}\|_\mu^2=\inf\left\{\|F\|_\mu^2,\ F\in H^2(\Omega,\mu,\Gamma),\ |F(\infty)|=1,F(z_k^*)=0,\ k=1,\dots N\right\}.$$

Действительно,

$$1=|F(\infty)|^2=\left|(F(\cdot),K_{\mu,\Gamma}(\cdot,\infty))_\mu\right|^2\le$$

$$\le\|F\|_\mu^2\cdot\|K_{\mu,\Gamma}(\cdot,\infty)\|_\mu^2=\|F\|_\mu^2\cdot K_{\mu,\Gamma}(\infty,\infty),$$

следовательно,

$$\|\psi_{\mu,\Gamma}\|_\mu^2=\frac{\|K_{\mu,\Gamma}(\cdot,\infty)\|_\mu^2}{|K_{\mu,\Gamma}(\infty,\infty)|_\mu^2}=\frac{1}{K_{\mu,\Gamma}(\infty,\infty)}\le\|F\|_\mu^2.$$

Можно показать (см. [7, 10]), что нули этой функции (отличные от $z_1^*, \dots, z_N^*$) принадлежат выпуклой оболочке множества E. Для этой функции известно выражение через тэта-функции Римана [8, 10]:

$$\psi_{\mu,\Gamma}(z) = \frac{K_{\mu,\Gamma}(z,\infty)}{K_{\mu,\Gamma}(\infty,\infty)} = \chi(z)\sqrt{\frac{R_\mu(\infty)}{R_\mu(z)}}\frac{\Theta(\Gamma,\mu,z)}{\Theta(\Gamma,\mu,\infty)}\prod_{k=1}^{N}\frac{\Phi(\infty,z_k^*)}{\Phi(z,z_k^*)},\ n\in\mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

где $\chi(z)$ – некоторая однозначная функция, не обращающаяся в ноль, зависящая только от области Ω и не зависящая ни от Γ, ни от μ (в статье [8] приведена формула для $\chi(z)$, в настоящей работе она не понадобится); $\Theta(\Gamma,\mu,z)$ — тэта-функция Римана с вектором параметров

$$\beta_j(\Gamma,\mu) = d_j + \gamma_j + \mathcal{J}_j(\mu), \quad j = 1,2,\dots,p,$$

где $\mathcal{J}_j(\mu)$ определено выше (3), а константы d_j зависят только от Ω (и не зависят ни от Γ, ни от μ, подробнее см. [8, 10]).

Введем следующие обозначения:

$$\Theta_{n,\mu}(z) := \Theta(\Gamma_n,\mu,z), \quad \psi_{n,\mu}(z) := \psi_{\mu,\Gamma_n}.$$

2.7. Сильная асимптотика ортогональных многочленов. Нам понадобится следующий результат (см. [7, 10]):

Теорема 1. *Пусть $\mu \in \mathcal{S}(E)$ с весом ρ и дискретными массами в точках z_k^*, $k=1,\dots,N$. Пусть многочлены $P_{n,\mu}$ с единичным старшим коэффициентом ортогональны относительно меры μ.*

Тогда

1) $\|P_{n,\mu}\|_\mu^2/C(E)^{2n} \sim \|\psi_{n,\mu}\|_\mu^2,\ \ n\to\infty;$

2) $P_{n,\mu}(z) = C(E)^n\Phi^n(z)[\psi_{n,\mu}(z)+\epsilon_n(z)]$, *где* $\epsilon_n \to 0$ *при* $n\to\infty$,

равномерно на компактных подмножествах $\Omega\setminus\{z_1^*, z_2^*,\dots,z_N^*\}$.

3. Постановка задачи

Каждой мере $\mu\in\mathcal{S}(E)$ соответствует система многочленов $P_{n,\mu}(z) = z^n + \dots$ степени n, ортогональных относительно μ. Будем говорить, что многочлены $P_{n,\mu}$ и $P_{n,\nu}$ имеют одинаковое асимптотическое поведение отношения в бесконечности[1], если равномерно на компактных окрестностях бесконечности выполняется

$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n,\nu}(z)}{P_{n+1,\nu}(z)} \to 0,\ \ n\to\infty. \tag{9}$$

В работе [3] было показано, что условие

$$\mathcal{J}_j(\mu) \equiv \mathcal{J}_j(\nu) (\mathrm{mod}\ 1), \quad j=1,2,\dots,p, \tag{10}$$

является достаточным для выполнения условия (9), а также доказана необходимость этого условия в случае $p<4$. Там же показано, что условия (10) и (9) являются эквивалентными для мер $\mu\in\mathcal{S}(E)$ таких, что $E\subset\mathbb{R}$ (при этом дискретная составляющая не обязана принадлежать $\mathbb{R}$). Из результатов работы [4] следует, что в случае $E\subset\mathbb{R}$ с дискретной частью, состоящей из счетного числа масс на $\mathbb{R}$ (точка сгущения обязана принадлежать E),

[1]Важно заметить, что фразу "ортогональные многочлены имеют одинаковое асимптотическое поведение" следует воспринимать целиком. Она не означает, что отношение многочленов для каждой из мер имеет асимптотику, и эти асимптотики совпадают. Асимптотики отношения многочленов для каждой из мер может не существовать.

удовлетворяющих модифицированному условию Бляшке, условие (10) (при очевидной модификации $\mathcal{J}(\mu)$ для бесконечного числа нагрузок) является необходимым и достаточным для выполнения условия (9) и в случае бесконечного числа дискретных масс (см. [4]).

В настоящей работе мы, следуя Б. Симанеку (см. [5]), вместо условия (9) будем рассматривать более общее условие: для некоторого фиксированного $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)}\right) = 0,$$

равномерно на компактных окрестностях бесконечности. В этом случае будем говорить, что ортогональные многочлены имеют одинаковое асимптотическое поведение отношения со сдвигом.

4. Основные результаты

Для некоторого класса многозначности $\widetilde{\Gamma} \in \mathbb{T}^p$ определим $\widetilde{\Gamma}_{-n} := \widetilde{\Gamma} - \Gamma_n$.

Пусть $K_{\mu,\widetilde{\Gamma}_{-n}}(z, z_0)$ – воспроизводящее ядро в пространстве $H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-n})$:

$$\oint_E f(z)\overline{K_{\mu,\widetilde{\Gamma}_{-n}}(z, z_0)}d\mu(z) = f(z_0), \quad \forall f \in H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-n}).$$

Заметим, что для функции $f \in H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-n})$ выполняется $f(z)\Phi^{-1}(z) \in H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-(n-1)})$. Таким образом, получаем цепочку вложенных пространств

$$\dots \subset \Phi^{-n}(z)H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-n}) \subset \Phi^{-n+1}(z)H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-(n-1)}) \subset \dots$$

$$\dots \subset \Phi^{-1}(z)H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}_{-1}) \subset H^2(\Omega, \mu, \widetilde{\Gamma}).$$

По предположению $\omega_j(\infty) \in \mathbb{Q}$, следовательно, $\Gamma_{q+k} = \Gamma_k \ \ \forall k$, где q – общий знаменатель чисел $\omega_j(\infty) \in \mathbb{Q}$. Таким образом, воспроизводящие ядра тоже удовлетворяют условию периодичности по индексу:

$$K_{\mu,\widetilde{\Gamma}_{-n}}(z, z_0) = K_{\mu,\widetilde{\Gamma}_{-(n+q)}}(z, z_0).$$

Введем обозначение

$$K_{n,\mu}(z,\infty) := K_{\mu,\widetilde{\Gamma}_{-n}}(z,\infty), \quad \phi_{n,\mu}(z) := K_{n,\mu}(z,\infty)\Phi^{-n}(z). \tag{11}$$

Следующая лемма является обобщением леммы 7.6 из работы [6].

Лемма 1. *Система функций $\{\phi_{n,\mu}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma})$.*

Доказательство. a) Пусть $n < m$, тогда $\Phi^{n-m}(\infty) = 0$. Из определения воспроизводящего ядра следует

$$\oint_E \phi_{n,\mu}(\zeta)\overline{\phi_{m,\mu}(\zeta)}d\mu(\zeta) = \oint_E K_{n,\mu}(\zeta,\infty)\Phi^n(\zeta)\overline{K_{m,\mu}(\zeta,\infty)\Phi^m(\zeta)}d\mu(\zeta) =$$

$$= \oint_E K_{n,\mu}(\zeta,\infty)\Phi^{n-m}(\zeta)\overline{K_{m,\mu}(\zeta,\infty)}d\mu(\zeta) = K_{n,\mu}(\infty,\infty)\Phi^{n-m}(\infty) = 0.$$

При $n = m$

$$\oint_E |\phi_n(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) = \oint_E |K_{n,\mu}(\zeta,\infty)\Phi^n(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) =$$

$$= \oint_E |K_{n,\mu}(\zeta,\infty)|^2 d\mu(\zeta) = \|K_n(\cdot,\infty)\|^2 \in (0,\infty).$$

б) Докажем, что система $\{\phi_{n,\mu}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ полна. Пусть существует ненулевой вектор $\phi \in H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma})$ такой, что

$$\oint_E \phi(\zeta)\overline{\phi_{n,\mu}(\zeta)}d\mu(\zeta) = 0 \ \ \forall n = 0, 1, \dots .$$

Из ортогональности векторов ϕ и $\phi_{0,\mu}$ и определения воспроизводящего ядра следует, что

$$0 = \oint_E \phi(\zeta)\overline{\phi_{0,\mu}(\zeta)}d\mu(\zeta) = \oint_E \phi(\zeta)\overline{K_{0,\mu}(\zeta,\infty)}d\mu(\zeta) = \phi(\infty),$$

следовательно, $\phi(z)\Phi(z) \in H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma}_1)$ и $\phi \in \Phi^{-1}H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma}_1)$. Из ортогональности векторов ϕ и $\phi_{1,\mu}$ следует, что

$$0 = \oint_E \phi(\zeta)\overline{\phi_{1,\mu}(\zeta)}d\mu(\zeta) = \oint_E \phi(\zeta)\overline{\Phi^{-1}(\zeta)K_{1,\mu}(\zeta,\infty)}d\mu(\zeta) =$$

$$= \oint_E \phi(\zeta)\Phi(\zeta)\overline{K_{1,\mu}(\zeta,\infty)}d\mu(\zeta) = (\phi\Phi)(\infty),$$

таким образом, функция $\phi\Phi$ тоже имеет ноль в точке ∞, следовательно, $\phi\Phi^2(z) \in H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma}_1)$ и $\phi(z) \in \Phi^{-2}(z)H^2(\Omega, \mu, \tilde{\Gamma}_1)$. Продолжая рассжудения по индукции, получаем, что аналитическая в Ω функция ϕ имеет в бесконечно удаленной точке ноль порядка m для произвольного натурального m. Следовательно, функции ϕ, ортогональной всем функциям ϕ_n, не существует. □

Следующий результат позволяет "избавляться" от дискретной составляющей меры, изменяя подходящим образом весовую функцию, так, что соответствующие ортогональные многочлены будут иметь одинаковое асимптотическое поведение отношения.

Лемма 2. *Для меры $\mu \in \mathcal{S}(E)$ найдется абсолютно непрерывная мера $\nu^0 \in \mathcal{S}(E)$ такая, что*

$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu^0}(z)}{P_{n+l+1,\nu^0}(z)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{12}$$

равномерно на компактных окрестностях бесконечности.

Эта лемма является простым следствием более сильного утверждения, обобщающего следствие 3.2 из [11]).

Теорема 2. *Для двух мер $\mu, \nu \in \mathcal{S}(E)$ и произвольного числа $l \in \mathbb{N}$ найдется абсолютно непрерывная мера $\nu^0 \in \mathcal{S}(E)$ такая, что*

$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu^0}(z)}{P_{n+l+1,\nu^0}(z)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

равномерно на компактных окрестностях бесконечности. Причем ν^0 можно выбрать так, чтобы на каждой компоненте связности множества E меры ν и ν^0 отличались на постоянный множитель:

$$\nu^0\big|_{E_k} = C_k \cdot \nu\big|_{E_k}, \quad k = 0, \dots, p.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(z) := \exp\left(\sum_{k=0}^{p} 2\tau_k\Omega_k(z)\right),$$

где числа τ_k однозначно определяются из следующей системы уравнений (см. [7]):

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{p} \tau_k\Delta_j\tilde{\omega}_k = \mathcal{J}_j(\mu) - \mathcal{J}_j(\nu) - l\cdot\omega_j(\infty); \ \ \sum_{k=0}^{p}\tau_k = 0, \quad j = 0, \dots, p.$$

Нетрудно видеть, что модуль этой функции постоянен на каждой компоненте связности E. Пусть

$$C_k := |V(z)| = e^{\tau_k}, \quad \nu^0\big|_{E_k} = C_k \cdot \nu|_{E_k}, \quad k = 0, \dots, p.$$

Тогда

$$R_{\nu^0} = V \cdot R_\nu,$$

$$\mathcal{J}_j(\nu^0) = \frac{1}{4\pi}\Delta_{E_k} \arg V(z) + \mathcal{J}_j(\nu) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{p} \tau_k \Delta_{E_j} \tilde{\omega}_k + \mathcal{J}_j(\nu) = \mathcal{J}_j(\mu)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{J}_j(\mu) - \mathcal{J}_j(\nu^0) \equiv 0 (mod\, 1), \quad j = 1, \dots, p.$$

Как показано в [3], это условие является достаточным для выполнения (12).

□

Основная трудность, возникающая при доказательстве условий, необходимых для того, чтобы поведение отношений ортогональных многочленов было одинаковым, заключается в возможном сокращении нулей у функций $\Theta_{n,\mu}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [3], [11]). В следующей лемме показано, что такие нули (если они есть) обязаны принадлежать E.

Лемма 3. *Рассмотрим пространство $H^2(\Omega, \mu, \Gamma)$. Функции $\Theta_{n,\mu}$, $n \in \mathbb{N}$, могут иметь общий ноль только на множестве E, т.е. из условия существования общего нуля $z_0 \in \Omega_{double}$: $\Theta_{n,\mu}(z_0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ следует, что $z_0 \in E$.*

Доказательство. Построим по мере μ меру ν^0 из леммы 2. Так как по построению, $\mathcal{J}_j(\mu) - \mathcal{J}_j(\nu^0) = 0(mod\, 1)$, $j = 1, \dots, p$, то

$$\Theta_{n,\mu} = \Theta_{n,\nu^0}.$$

Доказательство разобьем на два пункта: сначала докажем, что $z_0 \notin \Omega_+$, во втором пункте покажем, что $z_0 \notin \Omega_-$.

1) Предположим, что $z_0 \in \Omega_+$.

Так как мера ν^0 является абсолютно непрерывной, то, как показывает формула (8), нули функций K_{ν^0,Γ_n} совпадают с нулями $\Theta_{n,\mu}$. Тогда, по предположению, $K_{\nu^0,\Gamma_n}(z_0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ и из определения (11) следует, что каждая функция системы $\phi_n = \Phi^{-n} K_{\nu^0,\Gamma_n}$ принимает значение ноль в точке $z_0 \in \Omega$. Как показано в лемме 1, функции ϕ_n, $n \geq n_0$ образуют базис в пространстве $H^2(\Omega, \nu^0, \Gamma_{n_0})$ для любого $n_0 \in \mathbb{N}$. Однако, как показано в [7], можно построить функцию $V_{n_0} \in H^2(\Omega, \nu^0, \Gamma_{n_0})$, нигде в Ω не равную нулю: $V_{n_0}(z) := \exp\left(\sum_{k=0}^{p} 2\tau_k \Omega_k(z)\right)$, где числа τ_k однозначно определяются из следующей системы уравнений (подробное построение функций $V_{\Gamma_{n_0}}$ можно найти в [7]): $\sum_{k=0}^{p} \tau_k \Delta_{E_j} \tilde{\omega}_k = \gamma_j; \quad \sum_{k=0}^{p} \tau_k = 0, \quad j = 0, \dots, p$. Полученное противоречие показывает, что $z_0 \notin \Omega_+$.

Этот пункт также следует из теоремы Амброладзе [1].

2) Теперь рассмотрим случай, когда $z_0 \in \Omega_-$.

Напомним, что экстремальная функция ψ_{n,ν^0} имеет те же нули, что и функция Θ_{n,ν^0} (8). В теореме 6.2 [7] для нахождения нулей функции ψ_{n,ν^0} указана однозначно определяющая их система уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{p} \left(\widetilde{\omega}_k(z_j^0) - \widetilde{\omega}_k(z_j^*)\right) = \sum_{l=1}^{p} m_l \Delta_k \widetilde{\omega}_l, \\ &\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} \epsilon_j \omega_k(z_j^0) = \mathcal{J}_k(\nu_0) - \frac{\omega_k(\infty) - 1}{2} - n\omega_k(\infty) \ (mod\, 1) \end{aligned} \tag{13}$$

где z_0^* — конечные нули $G'(z)$; m_l — произвольные натуральные числа. Параметры $\epsilon_j = \pm 1$ и точки z_j^0 однозначно определяются системой, при этом числа ϵ_j служат для указания листа римановой поверхности, на который следует поместить соответствующую точку z_j^0: если $\epsilon_j = 1$, то $z_j^0 \in \Omega_+$, а если $\epsilon_j = -1$, то $z_j^0 \in \Omega_-$.

По нашему предположению, одной из точек z_j^0 является точка z_0, причем соответствующий ей параметр равен -1. Не умаляя общности, будем считать, что $z_1^0 = z_0, \epsilon_1 = 0$. Добавим к правой части второго уравнения системы (13) слагаемое $2\omega_k(z_1^0)$. Очевидно, что этому уравнению будет удовлятворять та же система точек с теми же параметрами $\epsilon_j, j = 2, \ldots, p$ и параметром $\epsilon_1 = 1$.

С другой стороны, ту же систему уравнений можно получить, решая экстремальную задачу для весовой функции $\widetilde{\nu}_0$ такой, что

$$\mathcal{J}_k(\nu_0) = \mathcal{J}_k(\nu) + 2\omega_k(z_0), \ \ \forall k = 0, \ldots, p$$

(построение такой функции полностью повторяет построение из доказательства 2). Таким образом получаем, что экстремальные функции ψ_{n,ν_0}, а, следовательно, и Θ_{n,ν_0} имеют общий ноль в точке, лежащей в области Ω_+. Но, как следует из пункта (1), это невозможно. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $\omega_k(\infty) \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots, p,\ \mu, \nu \in \mathcal{S}(E)$ *и для некоторого фиксированного* $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)} \right) = 0, \tag{14}$$

(сходимость равномерная на компактных окрестностях бесконечности).

Тогда

$$\mathcal{J}_j(\mu) \equiv \mathcal{J}_j(\nu) - l \cdot \omega_j(\infty) (mod\ 1/2), \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим, что равномерно на компактных окрестностях бесконечности

$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Тогда

$$\frac{\psi_{n,\mu}(z)}{\psi_{n+1,\mu}(z)} - \frac{\psi_{n+l,\nu}(z)}{\psi_{n+l+1,\nu}(z)} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Используя представления (8), получаем

$$\frac{\Theta_{n,\mu}(z)\Theta_{n+1,\mu}(\infty)}{\Theta_{n+1,\mu}(z)\Theta_{n,\mu}(\infty)} - \frac{\Theta_{n+l,\nu}(z)\Theta_{n+l+1,\nu}(\infty)}{\Theta_{n+l+1,\nu}(z)\Theta_{n+l,\nu}(\infty)} \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Пусть $q \in \mathbb{N}$ – общий знаменатель чисел $\omega_k(\infty) \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots, p$, тогда $\Gamma_n = \Gamma_{n+q}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\Theta_{n,\mu} = \Theta_{n+q,\mu}$. Тогда из асимптотических формул следует, что

$$\frac{\Theta_{r,\mu}(z)\Theta_{r+1,\mu}(\infty)}{\Theta_{r+1,\mu}(z)\Theta_{r}, \mu(\infty)} = \frac{\Theta_{r+l,\nu}(z)\Theta_{r+l+1,\nu}(\infty)}{\Theta_{r+l,\nu}(z)\Theta_{r+l+1,\nu}(\infty)} \ \ \forall r \in \mathbb{N},\ r \le q-1. \tag{16}$$

Если ни один из p нулей тета-функции $\Theta_{\mu,r}(z)$ не сокращается с нулем функции $\Theta_{\mu,r+1}(z)$, то нули $\Theta_{\mu,r}(z)$ и $\Theta_{\nu,r+l}(z)$ должны совпадать. Если же для некоторого $z_\mu \in \widetilde{\Omega}$ $\Theta_{\mu,r}(z_\mu) = \Theta_{\mu,r+1}(z_\mu)$, то в левой части равенства (16) тоже происходит сокращение. Пусть $\Theta_{\nu,r+l}(z_\nu) = \Theta_{\nu,r+l+1}(z_\nu)$ и $z_\mu \ne z_\nu$. По лемме 3, если $z_\mu \notin E$, то найдется $r_0 : \Theta_{\mu,r_0}(z_\mu) \ne 0$, но тогда из соответствующего равенства отношений тета-функций (16) следует, что $\Theta_{\nu,r_0+l}(z_\nu) \ne 0$ и $z_\mu = z_\nu$.

Запишем выражение для констант Римана поверхности Ω_{double} двумя способами (см. (7)):

$$k_j \equiv -\sum_{k=1}^{p}\int_{z_0}^{z_{k,\mu}} d\Omega_j(\zeta) + d_j - r_0\omega_j(\infty) + \mathcal{J}_j(\mu) \equiv$$

$$\equiv -\sum_{k=1}^{p}\int_{z_0}^{z_{k,\nu}} d\Omega_j(\zeta) + d_j - (r_0+l)\omega_j(\infty) + \mathcal{J}_j(\nu),$$

где $z_{k,\mu}$ и $z_{k,\nu}$ — нули функций $\Theta_{\mu,r}(z)$ и $\Theta_{\nu,r}(z)$, соответственно. А так как все нули функций $\Theta_{\mu,r}(z)$ и $\Theta_{\nu,r}(z)$ совпадают, кроме, быть может, тех, которые принадлежат множеству E , получаем (15). □

Сформулируем более сильное утверждение, являющееся простым следствием приведенного выше рассуждения для случая, когда функции $\Theta_{n,\mu}, \Theta_{n+1,\mu}$ не имеют общего нуля на E для некоторой подпоследовательности. В этом случае, так как совпадающие нули отсутствуют, в условии (15) равенство будет выполняться по модулю 1.

Теорема 4. *Пусть $\omega_k(\infty) \in \mathbb{Q}, k = 1,\dots,p,\ \mu,\nu \in \mathcal{S}(E)$. Если для некоторого бесконечного подмножества натуральных чисел $\Lambda \subset \mathbb{N}$ функции $\Theta_{n,\mu}$ и $\Theta_{n+1,\mu}$ не имеют общих нулей на E для всех $n \in \Lambda$, т.е. $\Theta^2_{n,\mu}(z) + \Theta^2_{n+1,\mu}(z) \neq 0\ \ \forall z \in E,\ \ \forall n \in \Lambda$, то следующие условия равносильны*

- *для некоторого фиксированного $l \in \mathbb{N}$ равномерно на компактных окрестностях бесконечности*
$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)} \to 0,\ \ n\to\infty,\ \ n \in \Lambda;$$
- $\mathcal{J}_j(\mu) \equiv \mathcal{J}_j(\nu) - l\cdot\omega_j(\infty)(mod\ 1),\quad j = 1,2,\dots,p;$
- *для некоторого фиксированного $l \in \mathbb{N}$ равномерно на компактных окрестностях бесконечности*
$$\frac{P_{n,\mu}(z)}{P_{n+1,\mu}(z)} - \frac{P_{n+l,\nu}(z)}{P_{n+l+1,\nu}(z)} \to 0,\ \ n\to\infty.$$

Таким образом, в условиях теоремы 4 сохранение поведения асимптотики отношения ортогональных многочленов со сдвигом равносильно сохранению асимптотического поведения по некоторой подпоследовательности.

Условия на меру в теореме 4 носят несколько неявный характер. В качестве примера мер, к которым это утверждение применимо, приведем следствие 1.

Следствие 1. *Если $\omega_k(\infty) \in \mathbb{Q}, k = 1,\dots,p,\ \mu,\nu \in \mathcal{S}(E)$, причем мера μ инвариантна относительно поворотов на угол $\dfrac{2\pi}{p+1}$, то условия утверждения 4 выполнены.*

Доказательство. Из условия единственности экстремальной функции $\psi_{\mu,k}$ и условия инвариантности меры относительно поворотов следует, что если некоторый ноль z^* экстремальной функции $\psi_{\mu,k}$ принадлежит компоненте связности E_j, то точки, получающиеся поворотом на угол $\dfrac{2\pi}{p+1}$, также будут являться нулями экстремальной функции. Но это невозможно, так как экстремальная функция имеет не более чем p нулей, а число компонент связности множества E равно $p+1$.

□

Благодарность. *Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Ambroladze *On exceptional sets of asymptotic relations for general orthogonal polynomials* // J. Approx. Theory, **82** (1995). P. 257–273.
2. B. Beckermann *Complex Jacobi matrices* // J. Comput. Appl. Math., **127** (2001). P. 17–65.
3. A.A. Kononova *Stability of ratio asymptotics of orthogonal polynomials under some class of measure perturbations*, Acta Sci. Math. (Szeged), **81**:1-2 (2015). P. 133–143.
4. F. Peherstorfer, P. Yuditskii *Asymptotic behavior of polynomials orthonormal on a homogeneous set* // J. d'Analyse Mathematique, **89**:1 (2003). P. 113–154.
5. B. Simanek *Relative asymptotics for general orthogonal polynomials* // Michigan Math. J., **66**:1 (2017). P. 175–193.
6. M. Sodin, P. Yuditskii *Almost periodic Jacobi matrices with homogeneous spectrum, infinite dimensional Jacobi inversion, and Hardy spaces of character-automorphic functions* // J. Geom. Anal., **7** (1997). P. 387–435.
7. H. Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane*, Advances in Math., **3** (1969). P. 127–232.
8. Аптекарев А.И. *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода* // Матем. сб., **125(167)**:2(10) (1984). С. 231–258.
9. Дубровин Б.А. *Тэта-функции и нелинейные уравнения* // УМН, **36**:2(218) (1981). С. 11–80.
10. Калягин В.А., Кононова А.А. *Об асимптотике многочленов, ортогональных на системе дуг, по мере, имеющей дискретную часть* // Алгебра и анализ, **21**:2 (2009). С. 71–91.
11. Кононова А.А. *О компактных возмущениях конечнозонных операторов Якоби* // Зап. научн. сем. ПОМИ, **366** (2009). С. 84–101.

Анна Александровна Кононова,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28,
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `a.kononova@spbu.ru`