УДК 517.938

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧАХ О ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.И. ГУСАРОВА, С.А. МУРТАЗИНА, М.Ф. ФАЗЛЫТДИНОВ, М.Г. ЮМАГУЛОВ

Аннотация. В работе рассматриваются задачи об основных сценариях локальных бифуркаций динамических систем. Изучаются системы, описываемые автономными дифференциальными уравнениями, дискретными уравнениями, а также неавтономными периодическими уравнениями. Предлагаются новые формулы для вычисления ляпуновских величин. Предлагаемые формулы получены на основе общего операторного метода исследования локальных бифуркаций и не требуют перехода к нормальным формам и использования теорем о центральном многообразии. Указанный метод позволил получить новые бифуркационные формулы для исследования основных сценариев локальных бифуркаций. В работе показано как эти бифуркационные формулы приводят к новым формулам для вычисления ляпуновских величин в задачах о бифуркациях положений равновесия, Андронова-Хопфа, удвоения периода, вынужденных колебаний и др. Основное внимание в статье уделено получению первой и второй ляпуновских величин. Предлагаемый подход позволяет получить ляпуновские величины и более высокого порядка. В качестве приложения полученных формул в статье проведен анализ основных сценариев локальных бифуркаций. Рассмотрены задачи о направленности бифуркаций, задачи об устойчивости возникающих решений, задачи о главных асимптотиках решений и др. В качестве иллюстрации приведено вычисление ляпуновских величин в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа в системе Лэнгфорда и в задаче о бифуркации удвоения периода в модели Хенона.

Ключевые слова: динамические системы, бифуркации, ляпуновские величины, точка равновесия, устойчивость

Mathematics Subject Classification: 37G10, 37G15

1. Введение

Ключевую роль в теории бифуркаций динамических систем играют так называемые ляпуновские величины, позволяющие определить такие важнейшие свойства бифуркации, как устойчивость возникающих решений, направленность бифуркаций и др. Вычисление ляпуновских величин важно и с точки зрения приложений, например, при изучении вопроса о поведении динамической системы при значениях параметров, близких к границе области устойчивости (опасные и безопасные границы).

Имеется ряд подходов, позволяющих вычислять ляпуновские величины. Здесь следует выделить следующие подходы. Первый подход является классическим, именно он обычно и используется для формального определения ляпуновских величин. Этот подход связан с применением теоремы о центральном многообразии и метода нормальных форм (см. [1]–[7]). Указанный подход позволяет для задач об основных сценариях локальных

N.I. Gusarova, S.A. Murtazina, M.F. Fazlytdinov, M.G. Yumagulov, Operator methods for calculating Lyapunov quantities in problems on local bifurcations of dynamical systems.

© Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г. 2018.

Поступила 6 марта 2017 г.

бифуркаций преобразовать исходные уравнения к весьма простому (каноническому) виду, коэффициенты нелинейности которого и определяют ляпуновские величины. Получаемые при этом формулы оказываются чрезвычайно эффективными для анализа бифуркации, что продемонстировано в ряде работ; здесь особо следует выделить работы [1], [2] и [7], в которых проведено детальное исследование основных сценариев бифуркаций в зависимости от значений ляпуновских величин. Следует, однако, отметить, что использование этих формул для исследования конкретных уравнений, как правило, требует предварительного преобразования исходных уравнений, что далеко не всегда является тривиальной задачей.

Другой подход направлен на вычисление ляпуновских величин в терминах исходных уравнений. Он часто используется в приложениях. Получению формул и алгоритмов для расчета ляпуновских величин посвящены работы многих авторов (см., например, [1], [2] и имеющуюся библиографию). Хотя получаемые при этом формулы, как правило, достаточно сложны, но основным их преимуществом является именно тот факт, что они позволяют проводить анализ бифуркаций непосредственно в терминах исходных уравнений.

Следует также отметить подходы, основанные на применении современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений. Эти подходы позволили существенно продвинуться в изучении ляпуновских величин, в частности, в задаче вычисления величин третьего и более высоких порядков. В то время как явные выражения для первой и второй ляпуновских величин для многих сценариев бифуркаций были получены еще в 1940–1950-е гг., выражения для следующих ляпуновских величин в виде символьных выражений были получены относительно недавно (см., например, [8], [9] и имеющуюся библиографию).

Вопрос о том, какой из подходов лучше, не имеет однозначного ответа, так как разные классы задач обладают различными свойствами и, следовательно, в одних ситуациях какие-либо методы предпочтительнее других, а в других – наоборот. Следует также помнить, что применяемые различные подходы с необходимостью дают одни и те же окончательные формулы (если, конечно, их правильно сравнивать).

Результаты настоящей работы относятся ко второму подходу. В ней предлагается общая схема, позволяющая получить новые формулы для ляпуновских величин в задачах об основных сценариях локальных бифуркаций динамических систем в терминах исходных уравнений. Предлагаемые формулы позволяют не только эффективно вычислить ляпуновские величины, но и провести в новых условиях исследование свойств бифуркации.

Предложенные в настоящей статье формулы для вычисления ляпуновских величин получены на основе общего операторного метода исследования локальных бифуркаций динамических систем, основные аспекты которого изложены в [10]–[14]. Указанный метод позволил, в частности, получить новые бифуркационные формулы для основных сценариев бифуркаций; эти формулы, в свою очередь, позволяют провести эффективное исследование бифуркаций и получить ответы на важнейшие вопросы о свойствах бифуркации: условия трансверсальности, направленность бифуркации, устойчивость возникающих решений, главные асимптотики решений и т.п. Оказалось, что эти бифуркационные формулы тесно связаны и с формулами для ляпуновских величин, что и показано в настоящей работе.

Схема работы следующая. В § 2–4 рассматриваются динамические системы, описываемые автономными дифференциальными уравнениями (§2), дискретными уравнениями (§3) и неавтономными периодическими уравнениями (§4). В них приводятся новые формулы для ляпуновских величин, обсуждаются некоторые свойства бифуркаций; полученные результаты иллюстрируются примерами. В §5 приводятся доказательства основных утверждений работы.

2. Автономные дифференциальные уравнения

В этом параграфе задача о построении ляпуновских величин будет изучаться применительно к динамическим системам, описываемым автономным дифференциальным уравнением

$$x' = F(x,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в котором μ – скалярный параметр, $F(x,\mu)$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция.

2.1. Бифуркации и центральное многообразие. Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ уравнение (1) имеет точку равновесия $x = 0$, т.е. $F(0,\mu_0) = 0$. Тогда уравнение (1) представимо в виде

$$x' = A(\mu)x + b(x,\mu) + u(\mu)\,, \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где $A(\mu) = F_x'(0,\mu)$ – матрица Якоби, $u(\mu) = F(0,\mu)$, функция $b(x,\mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|b(x,\mu)\| = o(\|x\|)$ при $x \to 0$ равномерно по μ, а функция $u(\mu)$ – условию $u(\mu_0) = 0$.

Ниже будем предполагать, что функция $b(x,\mu)$ имеет вид:

$$b(x,\mu) = b_2(x,\mu) + b_3(x,\mu) + b_4(x,\mu)\,, \tag{3}$$

где $b_2(x,\mu)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $b_3(x,\mu)$ – слагаемые третьей степени, а $b_4(x,\mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|b_4(x,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по μ.

Если матрица Якоби $A_0 = A(\mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений с нулевыми вещественными частями, то μ_0 является *точкой бифуркации* системы (1). В этом случае при переходе параметра μ через μ_0 фазовый портрет системы (1) в окрестности точки $x = 0$, как правило, качественно перестраивается. Исследованию различных сценариев бифуркаций посвящено огромное число работ (см., например, [1], [2], [7]–[10]), в которых предложен ряд эффективных методов таких, как метод нормальных форм, методы, основанные на теории центральных многообразий, метод функционализации параметра и др.

Согласно теореме о центральном многообразии (см., например, [1], [2]) задача о локальных бифуркациях для N-мерной системы (1) может быть сведена к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для системы меньшей размерности. Приведем в этой связи некоторые используемые ниже понятия и факты.

Пусть спектр σ матрицы A_0 состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Обозначим через E_0 и E^0 – корневые подпространства матрицы A_0, отвечающие, соответственно, частям σ_0 и σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 – это размерности подпространств E_0 и E^0; тогда $k_0 + k^0 = N$ и $1 \leqslant k_0, k^0 \leqslant N-1$. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A_0 : R^N \to R^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим, наконец, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Согласно теореме о центральном многообразии, существуют δ_1-окрестность $T(0,\delta_1)$ точки $x = 0$ и δ_2-окрестность числа μ_0 такие, что система (1) при $|\mu - \mu_0| < \delta_2$ имеет в шаре $T(0,\delta_1)$ гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие $W(\mu)$, содержащее точку $x = 0$, касающееся (при $\mu = \mu_0$) в точке $x = 0$ подпространства E_0. Инвариантность многообразия $W(\mu)$ для системы (1) означает, что если некоторое ее движение в некоторый момент времени находится на многообразии $W(\mu)$, то оно будет находиться на $W(\mu)$ и во все последующие моменты времени до тех пор, пока это движение остается в шаре $T(0,\delta_1)$. Многообразие $W(\mu)$ называют *центральным*; оно может быть задано уравнением вида

$v = \psi(u, \mu)$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, а функция $\psi(u, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет равенствам: $\psi(0, \mu_0) = 0$, $\psi'_u(0, \mu_0) = 0$.

Уравнение (1) в окрестности точки $x = 0$ (путем проектирования на подпространства E_0 и E^0 соответственно) может быть представлено в виде равносильной системы

$$\begin{cases} u' = f(u, v, \mu)\,, \\ v' = g(u, v, \mu)\,, \end{cases} \tag{4}$$

где $u = P_0 x$, $v = P^0 x$, а f и g – гладкие функции, принимающие значения в E_0 и E^0 соответственно и представимые в виде

$$f(u, v, \mu) = A_0 u + \xi(u, v, \mu)\,, \quad g(u, v, \mu) = A_0 v + \eta(u, v, \mu)\,, \tag{5}$$

в которых функции $\xi(u, v, \mu)$ и $\eta(u, v, \mu)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \xi(0, 0, \mu_0) = 0\,, \ \ \eta(0, 0, \mu_0) = 0\,, \ \ \xi'_u(0, 0, \mu_0) = 0\,, \\ \xi'_v(0, 0, \mu_0) = 0\,, \ \ \eta'_u(0, 0, \mu_0) = 0\,, \ \ \eta'_v(0, 0, \mu_0) = 0\,. \end{cases}$$

Таким образом, задача о локальных бифуркациях в N-мерном уравнении (1) может быть сведена к исследованию k_0-мерного уравнения:

$$u' = G(u, \mu)\,, \quad u \in E_0\,, \tag{6}$$

где $G(u, \mu) = f(u, \psi(u, \mu), \mu)$. Оно содержит все основные особенности, присущие тому или иному сценарию бифуркации в исходном уравнении (1). В частности, анализ уравнения (6) (обычно с использованием метода нормальных форм) и приводит к понятию ляпуновских величин. Более детально этот вопрос обсуждается ниже при рассмотрении основных сценариев бифуркаций.

В настоящей статье задача о ляпуновских величинах будет изучаться в следующих основных случаях:

S1. матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

S2. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений вида $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют ненулевые вещественные части.

Отметим, что при изучении локальных бифуркаций в случае S2, а также в некоторых подслучаях случая S1 обычно предполагают, что в уравнении (2) функция $u(\mu)$ является нулевой, т.е. это уравнение имеет вид:

$$x' = A(\mu)x + b(x, \mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{7}$$

в котором $b(x, \mu)$ определяется равенством (3).

2.2. Случай S1: бифуркация положений равновесия. Рассмотрим сначала случай S1. В этом случае качественная перестройка поведения системы (1) в окрестности точки $x = 0$ при переходе параметра μ через μ_0, как правило, состоит в возникновении у нее ненулевых точек равновесия. Такую перестройку поведения системы будем называть *бифуркацией положений равновесия* системы (1).

Уравнение (6) в случае S1 является одномерным, при этом в силу предположения (3) функция $G(u, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ представима в виде (см., например, [1]):

$$G(u, \mu_0) = l_1 u^2 + l_2 u^3 + o(u^3)\,. \tag{8}$$

Другими словами, уравнение (6) при $\mu = \mu_0$ здесь имеет вид:

$$u' = l_1 u^2 + l_2 u^3 + o(u^3)\,.$$

Числа l_1 и l_2 называют соответственно *первой* и *второй ляпуновской величиной* в задаче о бифуркации положений равновесия системы (1).

Замечание 1. *Вообще говоря, первая и вторая ляпуновские величины l_1 и l_2 определяются не единственным способом. Это связано с тем, что базис в подпространствах E_0 и E^0 (см. предыдущий пункт) может выбираться разными способами и, соответственно, функция $G(u, \mu_0)$ может быть различной (но в любом случае вида (8)). Можно, однако, показать, что, во-первых, если в каком-то из вариантов выбора базиса число l_1 (или l_2) является ненулевым, то оно остается ненулевым и в любом другом варианте. При этом знак числа l_1 может измениться, а знак числа l_2 не изменяется.*

Приведем утверждение, позволяющее вычислить ляпуновские величины l_1 и l_2 непосредственно в терминах исходного уравнения (1). Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами

$$\|e\| = 1 \,, \quad (e, g) = 1 \,. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, а остальные ее собственные значения не лежат на мнимой оси. Тогда первая ляпуновская величина системы (1) в задаче о бифуркации положений равновесия равна $l_1 = (b_2(e, \mu_0), g)$. Если $b_2(x, \mu) \equiv 0$, то $l_1 = 0$ и $l_2 = (b_3(e, \mu_0), g)$.*

Доказательство этого и других основных утверждений приводятся ниже в п. 5.

Замечание 2. *В теореме 1 говорится о вычислении только первой и второй ляпуновских величин l_1 и l_2. Это связано с предположением (3), согласно которому у нелинейности $b(x, \mu)$ задаются только слагаемые второй $b_2(x, \mu)$ и третьей $b_3(x, \mu)$ степеней. Если предполагать известными слагаемые более высоких степеней, то аналогичные утверждения можно получить и для последующих ляпуновских величин и, в частности, рассматривать ситуации, когда несколько первых ляпуновских величин одновременно обращаются в нуль.*

Замечание 3. *Очевидно, имеется лишь два варианта выбора нормировки векторов e и g в соответствии с равенствами (9): эти варианты отличаются лишь знаками. Поэтому в теореме 1 по сути предлагаются два варианта формул для ляпуновских величин l_1 и l_2. Это, наряду с приведенным в теореме вариантом, следующие формулы: $l_1 = (b_2(-e, \mu_0), -g) = -(b_2(e, \mu_0), g)$ и $l_2 = (b_3(-e, \mu_0), -g) = (b_3(e, \mu_0), g)$. Другими словами, в указанных двух вариантах числа l_1 отличаются лишь знаками, а числа l_2 совпадают.*

Бифуркация положений равновесия системы (1) может реализовываться по различным сценариям, основными из которых являются седло-узловая бифуркация, транскритическая бифуркация и бифуркация типа вилки. Приведем некоторые свойства указанных сценариев бифуркаций, доказательство которых использует теорему 1.

2.2.1. Седло-узловая бифуркация. Модельный пример седло-узловой бифуркации дает скалярное уравнение $x' = \mu - x^2$. При $\mu < 0$ состояний равновесия это уравнение не имеет, при $\mu = 0$ имеет только нулевое состояние равновесия $x = 0$, а при $\mu > 0$ имеет два ненулевых состояния равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$. Таким образом, при переходе μ через значение $\mu = 0$ у рассматриваемого уравнения в окрестности точки $x = 0$ возникает сначала (при $\mu = 0$) одна нулевая точка равновесия $x = 0$, которая затем (при $\mu > 0$) «расщепляется» на две ненулевые точки равновесия $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$, первая из которых устойчива, а вторая неустойчива. Первую ляпуновскую величину здесь можно считать равной $l_1 = -1$.

Аналогичным является сценарий седло-узловой бифуркации в уравнении (1) при произвольном $N \geqslant 1$ в случае, когда первая ляпуновская величина l_1 является ненулевой.

Он связан со слиянием (а затем и исчезновением) двух точек равновесия, одна из которых имеет тип «узел», а другая – тип «седло». Приведем соответствующее утверждение, вытекающее из результатов работы [10].

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 выполнены соотношения:*

$$l_1 = (b_2(e,\mu_0), g) \neq 0\,, \quad u_1 = (u'(\mu_0), g) \neq 0\,.$$

Пусть $\mu_1 \equiv -l_1/u_1 > 0$. *Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что:*

1. *Уравнение (1) при* $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$ *не имеет состояний равновесия в* δ*-окрестности точки* $x = 0$, *а при каждом* $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ *имеет два ненулевых состояния равновесия* $x = x_1(\mu)$ *и* $x = x_2(\mu)$.
2. *Определенные при* $\mu \in [\mu_0, \mu_0 + \delta)$ *функции* $x = x_1(\mu)$ *и* $x = x_2(\mu)$ $(x_1(\mu_0) = x_2(\mu_0) = 0)$ *являются непрерывно дифференцируемыми, при этом их графики при* $\mu = \mu_0$ *касаются собственного вектора e матрицы* A_0, *отвечающего собственному значению 0.*
3. *Пусть ненулевые собственные значения матрицы* A_0 *имеют отрицательные вещественные части, тогда один из графиков функций* $x = x_1(\mu)$ *и* $x = x_2(\mu)$ *содержит асимптотически устойчивые состояния равновесия, а другой – неустойчивые.*

Аналогичное утверждение можно привести и для случая $\mu_1 < 0$. В этом случае изменится только направленность бифуркации, т.е. ненулевые состояния равновесия $x = x_1(\mu)$ и $x = x_2(\mu)$ будут возникать при $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$.

Таким образом, если первая ляпуновская величина l_1 является ненулевой, то в системе (1), как правило, реализуется обычный сценарий седло-узловой бифуркации, при котором вблизи точки $x = 0$ не существует положений равновесия системы (1) при $\mu < \mu_0$ (или при $\mu > \mu_0$) и существует два положения равновесия для каждого $\mu > \mu_0$ (или при $\mu < \mu_0$).

Отметим, что если $l_1 = 0$ и $l_2 \neq 0$, то в системе (1), как правило, реализуется сценарий седло-узловой бифуркации, при котором вблизи точки $x = 0$ существует одно ненулевое положение равновесия системы (1) как при каждом $\mu < \mu_0$, так и при каждом $\mu > \mu_0$.

2.2.2. Транскритическая бифуркация и бифуркация типа вилки. Оставаясь в рамках случая S1, будем считать, что в уравнении (2) имеем $u(\mu) \equiv 0$. Другими словами, будем рассматривать уравнение (7). Это уравнение при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. Тогда основными сценариями бифуркации системы (7) в окрестности точки $x = 0$ являются транскритическая бифуркация и бифуркация типа вилки.

Модельный пример транскритической бифуркации дает скалярное уравнение $x' = \mu x - x^2$. Оно при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. При переходе μ через значение $\mu = 0$ у рассматриваемого уравнения в окрестности точки $x = 0$ возникает ненулевая точка равновесия $x = \mu$, которая устойчива при $\mu > 0$ и неустойчива при $\mu < 0$. Первая ляпуновская величина здесь равна $l_1 = -1$.

Модельный пример бифуркации типа вилки дает скалярное уравнение $x' = \mu x - x^3$. Оно также при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. При $\mu < 0$ других точек равновесия система не имеет, а при переходе μ через значение $\mu = 0$ у рассматриваемого уравнения в окрестности точки $x = 0$ возникают две ненулевые точки равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$, являющиеся устойчивыми. Здесь ляпуновские величины равны: $l_1 = 0$ и $l_2 = -1$.

Аналогичными являются сценарии транскритической бифуркации и бифуркации типа вилки и в уравнении (1) при произвольном $N \geqslant 1$. При этом если $l_1 \neq 0$, то имеет место транскритическая бифуркация, если же $l_1 = 0$ и $l_2 \neq 0$ – то бифуркация типа вилки.

Приведем некоторые свойства транскритической бифуркации, вытекающие из результатов работы [10].

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 выполнены соотношения:*

$$l_1 = (b_2(e,\mu_0), g) \neq 0\,, \quad \gamma_1 = (A'(\mu_0)e, g) \neq 0\,. \tag{10}$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что:

1. *Уравнение (7) в δ-окрестности точки $x = 0$ при каждом $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ и $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$ имеет в точности одну ненулевую точку равновесия $x = x(\mu)$.*
2. *Определенная при $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$ функция $x = x(\mu)$ $(x(\mu_0) = 0)$ является непрерывно дифференцируемой, при этом она при $\mu = \mu_0$ касается собственного вектора e матрицы A_0, отвечающего собственному значению 0.*
3. *Пусть $\gamma_1 < 0$ $(\gamma_1 > 0)$ и пусть ненулевые собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части; тогда функция $x = x(\mu)$ при $\mu > \mu_0$ содержит неустойчивые (асимптотически устойчивые) состояния равновесия, а при $\mu < \mu_0$ – асимптотически устойчивые (неустойчивые).*

Из этой теоремы, в частности, следует, что качественные свойства транскритической бифуркации не зависят от знака первой ляпуновской величины l_1 (что естественно с учетом замечаний 1 и 3).

Приведем некоторые свойства бифуркации типа вилки, вытекающие из результатов работы [10].

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 1 выполнены соотношения:*

$$l_1 = (b_2(e,\mu_0), g) = 0\,, \quad l_2 = (b_3(e,\mu_0), g) \neq 0\,, \quad \gamma_1 = (A'(\mu_0)e, g) \neq 0\,.$$

Пусть $\mu_2 \equiv -l_2/\gamma_1 > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что:

1. *Уравнение (7) в δ-окрестности точки $x = 0$ при каждом $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ имеет в точности две ненулевые точки равновесия $x = x_1(\mu)$, $x = x_2(\mu)$, а при каждом $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$ это уравнение не имеет ненулевых точек равновесия.*
2. *Определенные при $\mu \in [\mu_0, \mu_0 + \delta)$ функции $x = x_1(\mu)$ и $x = x_2(\mu)$ $(x_1(\mu_0) = x_2(\mu_0) = 0)$ являются непрерывно дифференцируемыми, при этом они при $\mu = \mu_0$ касаются собственного вектора e матрицы A_0, отвечающего собственному значению 0.*
3. *Пусть $l_2 < 0$ $(l_2 > 0)$ и пусть ненулевые собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части; тогда при каждом $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ точки равновесия $x = x_1(\mu)$ и $x = x_2(\mu)$ уравнения (7) асимптотически устойчивы (неустойчивы).*

Аналогичное утверждение можно привести и для случая $\mu_2 < 0$. В этом случае изменится только направленность бифуркации, но не свойства устойчивости, т.е. ненулевые состояния равновесия $x = x_1(\mu)$ и $x = x_2(\mu)$ будут возникать при $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$, при этом если $l_2 < 0$ $(l_2 > 0)$, то эти решения будут асимптотически устойчивы (неустойчивы).

2.3. Случай S2: бифуркация Андронова-Хопфа. Продолжим рассмотрение уравнения (7). Пусть теперь имеет место случай S2, т.е. матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$ $(\omega_0 > 0)$ и не имеет других собственных значений на мнимой оси. В этом случае основным сценарием бифуркации является бифуркация Андронова-Хопфа, означающая возникновение у уравнения (7) при переходе параметра μ через μ_0 в окрестности точки $x = 0$ нестационарных периодических решений $x(t,\mu)$ малой амплитуды. Бифуркация Андронова-Хопфа возможна лишь при $N \geqslant 2$.

Бифуркационные решения $x(t,\mu)$ уравнения (7) при малых $|\mu - \mu_0|$ возникают, как правило, в одном из трех случаев: $(S1)$ $\mu > \mu_0$; $(S2)$ $\mu < \mu_0$; $(S3)$ $\mu = \mu_0$. Последний случай называют вырожденным; он типичен для линейных и консервативных систем. Первые два случая имеют место при выполнении некоторого условия невырожденности относительно нелинейного слагаемого (3) в правой части уравнения (7) (один из вариантов такого условия будет указан ниже). При выполнении этого условия в случаях $(S1)$ и $(S2)$ каждому

μ отвечает в точности один ненулевой цикл $x(t,\mu)$ малой амплитуды, при этом функция $x(t,\mu)$ гладко зависит от μ и имеет место соотношение: $\max\limits_t \|x(t,\mu)\| \to 0$ при $\mu \to \mu_0$. Наконец, период $T(\mu)$ решений $x(t,\mu)$ также гладко зависит от μ и имеет место соотношение: $T(\mu) \to T_0$ при $\mu \to \mu_0$; здесь $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

В задаче о бифуркации Андронова-Хопфа уравнение (6) является двумерным. Это уравнение при $\mu = \mu_0$ может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} u_1' = -\omega_0 u_2 + f_1(u_1, u_2)\,, \\ u_2' = \omega_0 u_1 + f_2(u_1, u_2)\,, \end{cases} \tag{11}$$

где функции f_1 и f_2 обращаются в нуль в точке $u = 0$ вместе со своими первыми производными, при этом для этих функций верны аналогичные (3) представления.

В соответствии с теорией нормальных форм (см., например, [1], [2], [6]) существует полиномиальная замена переменных (близкая к тождественной в окрестности точки $u = 0$), которая преобразует систему (11) к виду:

$$\begin{cases} x_1' = -\omega_0 x_2 + (L_1 x_1 - \Omega_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3)\,, \\ x_2' = \omega_0 x_1 + (\Omega_1 x_1 + L_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3)\,, \end{cases} \tag{12}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Число L_1 называют *первой ляпуновской величиной* системы (7) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа. Ниже для простоты оба числа L_1 и Ω_1 будем называть *ляпуновскими величинами* системы (7).

В ряде работ (см., например, [1], [2], [15], [16]) предложены различные подходы и алгоритмы, позволяющие вычислить ляпуновские величины L_1 и Ω_1 непосредственно в терминах исходного уравнения. Приведем новую схему, позволяющую вычислить ляпуновские величины L_1 и Ω_1 в терминах исходного уравнения (7).

2.3.1. Вспомогательные построения. Так как матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*); \tag{13}$$

здесь A_0^* – транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1\,, \ \ (e, e^*) = (g, g^*) = 1, \ \ (e, g^*) = (g, e^*) = 0\,. \tag{14}$$

Ниже будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с равенствами (14). Положим

$$e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t\,, \tag{15}$$

$$f_3(t) = b_3(e(t), \mu_0) + F_2(t)\int\limits_0^t e^{-\tau T_0 A_0} b_2(e(\tau), \mu_0)\, d\tau\,, \tag{16}$$

где

$$F_2(t) = T_0 b_{2x}'(e(t), \mu_0) e^{T_0 A_0 t}\,; \tag{17}$$

здесь $b_{2x}'(x,\mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $b_2(x,\mu)$.

Наконец, определим вектор:

$$\rho_3 = \int\limits_0^1 e^{(1-t)T_0 A_0} f_3(t)\, dt\,. \tag{18}$$

Ниже понадобится также следующее вспомогательное утверждение. Пусть $y(t)$ – непрерывная периодическая (периода 1) N-мерная вектор-функция. Через y_c и y_s обозначим отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье этой функции. Определим вектор

$$u = \int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} y(t)\, dt\,. \tag{19}$$

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$(u, e^*) = \frac{1}{2}[(y_c, e^*) - (y_s, g^*)]\,, \quad (u, g^*) = \frac{1}{2}[(y_c, g^*) + (y_s, e^*)]\,. \tag{20}$$

Доказательство этой леммы проводится простым подсчетом с использованием равенств (13).

2.3.2. Ляпуновские величины для двумерных систем. Приведем сначала схему получения ляпуновских величин L_1 и Ω_1 для случая, когда уравнение (7) является двумерным, т.е. для уравнения

$$x' = A(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^2\,. \tag{21}$$

Теорема 5. *Ляпуновские величины L_1 и Ω_1 двумерной системы (21) определяются равенствами:*

$$L_1 = (\rho_3, e^*)\,, \quad \Omega_1 = -(\rho_3, g^*)\,. \tag{22}$$

При этом числа (22) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (14).

Из леммы 1 и равенства (18) получим

Следствие 1. *Для вычисления чисел (22) можно воспользоваться равенствами (20), в которых следует положить $u = \rho_3$ и $y(t) = f_3(t)$, где $f_3(t)$ – функция (16).*

2.3.3. Ляпуновские величины для случая $N \geqslant 3$. Вернемся к системе (7). Пусть $N \geqslant 3$. Пусть E_0 – это собственное подпространство оператора A_0, отвечающее простым собственным значениям $\pm i\omega_0$. Пространство E_0 является двумерным; в качестве его базиса могут использоваться векторы e и g. Пространство R^N может быть представлено в виде $R^N = E_0 \oplus E^0$, где E^0 – дополнительное инвариантное для A_0 подпространство размерности $N-2$.

Равенство $R^N = E_0 \oplus E^0$ определяет операторы проектирования $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ так, что $P^0 = I - P_0$, а оператор P_0 может быть представлен в виде

$$P_0 x = (x, e^*)e + (x, g^*)g\,; \tag{23}$$

последнее следует из того, что по предположению векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с равенствами (14). Положим $B_0 = e^{T_0A_0}$. Несложно устанавливается, что оператор $I - B_0 + P_0 : R^N \to R^N$ обратим.

Определим далее вектор и матрицу:

$$\rho_2 = \int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} b_2(e(t), \mu_0)\, dt\ , \quad B_2 = \int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} F_2(t)\, dt\,, \tag{24}$$

где $e(t)$ – функция (15), а $F_2(t)$ – матрица (17). Отметим, что по построению верно включение $\rho_2 \in E^0$. Наконец, положим

$$\varphi = B_2(I - B_0 + P_0)^{-1}\rho_2\,. \tag{25}$$

Теорема 6. *Ляпуновские величины L_1 и Ω_1 системы (7) определяются равенствами:*

$$L_1 = (\varphi + \rho_3, e^*), \quad \Omega_1 = -(\varphi + \rho_3, g^*)\,. \tag{26}$$

При этом числа (26) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (14).

Имеет место аналог следствия 1.

Следствие 2. *Для вычисления чисел (26) можно воспользоваться равенствами (20), в которых следует положить $u = \varphi + \rho_3$ и $y(t) = g(t) + f_3(t)$, где $f_3(t)$ – функция (16),*

$$g(t) = F_2(t)(I - B_0 + P_0)^{-1}\rho_2\,. \tag{27}$$

В важном частном случае, когда в нелинейности (3) отсутствует квадратичное слагаемое, т.е. $b_2(x, \mu) \equiv 0$, формулы (26) существенно упрощаются:

$$L_1 = (b_0, e^*), \quad \Omega_1 = -(b_0, g^*)\,, \tag{28}$$

где $b_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} b_3(e(t), \mu_0)\,dt$. При этом для вычисления чисел (28) можно воспользоваться равенствами (20), в которых следует положить $u = b_0$ и $y(t) = b_3(e(t), \mu_0)$.

2.3.4. Некоторые свойства бифуркации Андронова-Хопфа. Положим

$$\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)\,, \quad \gamma_2 = (A'e, g^*) - (A'g, e^*)\,; \tag{29}$$

здесь $A' = A'(\mu_0)$. Можно показать, что числа (29) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (14).

Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Положим

$$\mu_2 = -\frac{2}{\gamma_1} L_1\,. \tag{30}$$

Из результатов работы [10] следует, что верны следующие утверждения.

Теорема 7. *Пусть $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$). Тогда бифуркационные решения $x(t, \mu)$ системы (21) возникают при $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$).*

Теорема 8. *Пусть все отличные от $\pm\omega_0 i$ собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Тогда при всех малых $|\mu - \mu_0|$ существующие в условиях теоремы 7 бифуркационные решения $x(t, \mu)$ системы (21) асимптотически орбитально устойчивы, если $L_1 < 0$; они неустойчивы, если $L_1 > 0$.*

2.3.5. Пример: модель Лэнгфорда. В качестве иллюстрации рассмотрим модель Лэнгфорда (см., например, [15]):

$$\begin{cases} x_1' = (2\mu - 1)x_1 - x_2 + x_1x_3\,, \\ x_2' = x_1 + (2\mu - 1)x_2 + x_2x_3\,, \\ x_3' = -\mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,. \end{cases} \tag{31}$$

Эта система имеет вид (7) при $N = 3$ и

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 2\mu - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2\mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad b(x, \mu) \equiv b_2(x) = \begin{bmatrix} x_1x_3 \\ x_2x_3 \\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \end{bmatrix}.$$

При $\mu = \mu_0 = 1/2$ матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$ и $\lambda_3 = -1/2$. Поэтому значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (31), при этом имеем: $\omega_0 = 1$ и $T_0 = 2\pi$. Вычислим ляпуновские величины L_1 и Ω_1 этой системы в соответствии с равенствами (26).

В качестве собственных векторов e, g, e^*, g^*, удовлетворяющих равенствам (14), выберем векторы

$$e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b'_{2x}(x) = \begin{bmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 \end{bmatrix},$$

то, во-первых, числа (29) здесь равны: $\gamma_1 = 4$ и $\gamma_2 = 0$, во-вторых, имеем:

$$e^{T_0 A_0 t} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}, \quad e(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2(e(t)) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b'_{2x}(e(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 2\pi t \\ 0 & 0 & \sin 2\pi t \\ -2\cos 2\pi t & -2\sin 2\pi t & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, имеем:

$$(I - B_0 + P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - e^{-\pi})^{-1} \end{bmatrix},$$

где $B_0 = e^{T_0 A_0}$ и P – матрица оператора проектирования (23).

Все готово для вычисления функций (16) и (27). В результате получим:

$$f_3(t) = -2 \begin{bmatrix} (1 - e^{-\pi t}) \cos 2\pi t \\ (1 - e^{-\pi t}) \sin 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(t) = -2 \begin{bmatrix} e^{-\pi t} \cos 2\pi t \\ e^{-\pi t} \sin 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, положив $y(t) = f_3(t) + g(t)$ и обозначив через y_c и y_s отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье этой функции, получим:

$$y(t) = -2 \begin{bmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_c = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из следствия 2 получим $(\varphi + \rho_3, e^*) = -2$ и $(\varphi + \rho_3, g^*) = 0$. Таким образом, из (26) окончательно получим $L_1 = -2$ и $\Omega_1 = 0$.

Отметим, что число (30) здесь равно $\mu_2 = 1$. Поэтому из теорем 7 и 8 следует, что бифуркационные решения системы (31) возникают при $\mu > 1/2$ и они являются асимптотически орбитально устойчивыми.

3. Дискретные динамические системы

В этом параграфе задача о построении ляпуновских величин будет изучаться применительно к дискретным динамическим системам, описываемых уравнением

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n, \mu) + u(\mu), \quad x_n \in R^N, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{32}$$

где матрица $A(\mu)$ и функция $a(x, \mu)$ непрерывно дифференцируемы по x и μ. Предполагается, что функция $a(x, \mu)$ представима в виде:

$$a(x, \mu) = a_2(x, \mu) + a_3(x, \mu) + \tilde{a}_4(x, \mu), \tag{33}$$

где $a_2(x, \mu)$ и $a_3(x, \mu)$ являются, соответственно, квадратичными и кубическими по x слагаемыми, а $\tilde{a}_4(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по μ. Функция $u(\mu)$ также предполагается гладкой, при этом для некоторого значения $\mu = \mu_0$ выполнено равенство $u(\mu_0) = 0$. Система (32) при $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x = 0$.

3.1. Бифуркации и центральное многообразие. Если матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений, равных по модулю единице, то μ_0 является *точкой бифуркации* системы (32). В этом случае при переходе параметра μ через μ_0 фазовый портрет системы (32) в окрестности точки $x = 0$, как правило, качественно перестраивается.

Так же, как и в случае непрерывных динамических систем, согласно теореме о центральном многообразии задача о локальных бифуркациях для N-мерной системы (32) может быть сведена к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для системы меньшей размерности. Приведем в этой связи некоторые используемые ниже понятия и факты.

Пусть спектр σ матрицы A_0 состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, равные по модулю единице, а σ^0 – остальные собственные значения. Обозначим через E_0 и E^0 – корневые подпространства матрицы A_0, отвечающие, соответственно, частям σ_0 и σ^0 ее спектра. Пусть k_0 и k^0 – это размерности подпространств E_0 и E^0; тогда $k_0+k^0 = N$ и $1 \leqslant k_0, k^0 \leqslant N-1$. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A_0 : R^N \to R^N$ подпространств E_0 и E^0. Обозначим, наконец, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Согласно теореме о центральном многообразии, существуют δ_1-окрестность $T(0, \delta_1)$ точки $x = 0$ и δ_2-окрестность числа μ_0 такие, что система (32) при $|\mu - \mu_0| < \delta_2$ имеет в шаре $T(0, \delta_1)$ гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие $W(\mu)$, содержащее точку $x = 0$ и касающееся (при $\mu = \mu_0$) в точке $x = 0$ подпространства E_0. Инвариантность многообразия $W(\mu)$ для системы (32) означает, что если некоторая ее траектория в некоторый момент времени находится на многообразии $W(\mu)$, то она будет находиться на $W(\mu)$ и во все последующие моменты времени до тех пор, пока эта траектория остается в шаре $T(0, \delta_1)$. Многообразие $W(\mu)$ называют *центральным*; оно может быть задано уравнением вида $v = \psi(u, \mu)$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, а функция $\psi(u, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет равенствам: $\psi(0, \mu_0) = 0$, $\psi'_u(0, \mu_0) = 0$.

Уравнение (32) в окрестности точки $x = 0$ (путем проектирования на подпространства E_0 и E^0 соответственно) может быть представлено в виде системы

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n, v_n, \mu)\,, \\ v_{n+1} = g(u_n, v_n, \mu)\,, \end{cases} \tag{34}$$

где $u_n = P_0 x_n$, $v_n = P^0 x_n$, а f и g – гладкие функции, принимающие значения в E_0 и E^0 соответственно, при этом выполняются те же равенства (5), что и для непрерывных динамических систем.

Таким образом, задача о локальных бифуркациях в N-мерном уравнении (32) может быть сведена к исследованию k_0-мерного уравнения:

$$u_{n+1} = G(u_n, \mu)\,, \quad u_n \in E_0\,, \tag{35}$$

где $G(u, \mu) = f(u, \psi(u, \mu), \mu)$. Оно содержит все основные особенности, присущие тому или иному сценарию бифуркации в исходном уравнении (32). В частности, анализ уравнения (35) (обычно с использованием метода нормальных форм) и приводит к понятию ляпуновских величин.

Здесь будут рассматриваться следующие основные случаи:

P1. матрица A_0 имеет простое собственное значение 1;

P2. матрица A_0 имеет простое собственное значение -1;

P3. матрица A_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррационально или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geqslant 5$.

Во всех этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют модуль, не равный единице.

Отметим, что случай, когда матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta}$, где $\theta = p/q$ – несократимая дробь и $1 \leqslant q \leqslant 4$, обычно называют *сильным резонансом* (см., например, [1]); этот случай в данной статье не рассматривается. Отметим также, что случай P3, когда $\theta_0 = p/q$ и $q \geqslant 5$, называют *слабым резонансом.*

Отметим, наконец, что при изучении локальных бифуркаций в случаях P2 и P3, а также в некоторых подслучаях случая P1 обычно предполагают, что в уравнении (32) функция $u(\mu)$ является нулевой, т.е. это уравнение имеет вид:

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n, \mu), \ \ x_n \in R^N, \ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{36}$$

3.2. Случай P1: бифуркация положений равновесия. Рассмотрим сначала случай P1. В этом случае (как и в аналогичном случае S1 для автономного уравнения (1)) качественная перестройка поведения системы (32) в окрестности точки $x = 0$ при переходе параметра μ через μ_0 состоит в возникновении у нее ненулевых точек равновесия. Такую перестройку поведения системы также (как и для уравнения (1)) будем называть *бифуркацией положений равновесия* системы (32).

Уравнение (35) в случае P1 является одномерным, при этом в силу предположения (33) функция $G(u, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ представима в виде:

$$G(u, \mu_0) = u + l_1u^2 + l_2u^3 + o(u^3)\,.$$

Другими словами, уравнение (35) при $\mu = \mu_0$ здесь имеет вид

$$u_{n+1} = u_n + l_1u_n^2 + l_2u_n^3 + o(u_n^3)\,.$$

Числа l_1 и l_2 называют соответственно *первой* и *второй ляпуновской величиной* в задаче о бифуркации положений равновесия системы (32). Отметим, что замечание 1 здесь также имеет место (естественно с соответствующей модификацией).

Бифуркация положений равновесия для дискретной системы (32) аналогична бифуркации положений равновесия для непрерывной системы (2). Это связано с тем, что указанные бифуркации связаны с возникновением в окрестности точки $x = 0$ ненулевых точек равновесия, а задача о таких точках приводит по сути к одинаковым уравнениям:

$$A(\mu)x + b(x, \mu) + u(\mu) = 0 \quad \text{(для системы (2))}\,,$$

$$x = A(\mu)x + a(x, \mu) + u(\mu) \quad \text{(для системы (32))}\,.$$

Поэтому все факты и утверждения из п. 2.2 остаются верными и для дискретной системы (32) (при соответствующей их модификации).

Ограничимся для иллюстрации приведением аналога теоремы 1. Другими словами, приведем утверждение, позволяющее вычислить ляпуновские величины l_1 и l_2 дискретной системы (32) для указанных сценариев бифуркаций непосредственно в терминах исходного уравнения (32).

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 1. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами (9).

Теорема 9. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 1, а остальные ее собственные значения имеют модуль, не равный единице. Тогда первая ляпуновская величина дискретной системы (32) в задаче о бифуркации положений равновесия равна $l_1 = (a_2(e, \mu_0), g)$. Если $a_2(x, \mu) \equiv 0$, то $l_1 = 0$ и $l_2 = (a_3(e, \mu_0), g)$.*

Отметим, что здесь также справедливы замечания 2 и 3 (с соответствующей модификацией).

Как и в случае непрерывной системы (2), бифуркация положений равновесия системы (32) может, как правило, реализовываться либо как седло-узловая бифуркация, либо как транскритическая бифуркация или бифуркация типа вилки. Отметим также, что два последних сценария бифуркаций требуют, чтобы в уравнении (32) функция $u(\mu)$ была нулевой, т.е. чтобы это уравнение имело вид (36). Отметим, наконец, что теоремы 2-4 (при соответствующей их модификации) остаются справедливыми и для дискретной системы (32).

В завершение этого пункта приведем для иллюстрации модельные примеры указанных сценариев бифуркаций.

Модельный пример седло-узловой бифуркации дает скалярное уравнение $x_{n+1} = x_n + \mu - x_n^2$. При $\mu < 0$ состояний равновесия это уравнение не имеет, при $\mu = 0$ имеет только нулевое состояние равновесия $x = 0$, а при $\mu > 0$ имеет два ненулевых состояния равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$. Таким образом, при переходе μ через значение $\mu = 0$ у рассматриваемого уравнения в окрестности точки $x = 0$ возникает сначала (при $\mu = 0$) одна нулевая точка равновесия $x = 0$, которая затем (при $\mu > 0$) "расщепляется" на две ненулевые точки равновесия $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$, первая из которых устойчива, а вторая неустойчива. Здесь первая ляпуновская величина равна $l_1 = -1$.

Модельный пример транскритической бифуркации дает скалярное уравнение $x_{n+1} = \mu x_n - x_n^2$. Оно при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. При переходе μ через значение $\mu = 1$ у рассматриваемого уравнения в окрестности точки $x = 0$ возникает ненулевая точка равновесия $x = \mu - 1$, которая устойчива при $\mu > 1$ и неустойчива при $\mu < 1$. Здесь также $l_1 = -1$.

Модельный пример бифуркации типа вилки дает скалярное уравнение $x_{n+1} = \mu x_n - x_n^3$. Оно также при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. При $\mu < 1$ других точек равновесия уравнение не имеет, а при переходе μ через значение $\mu = 1$ в окрестности точки $x = 0$ возникают две ненулевые точки равновесия $x = \pm\sqrt{\mu - 1}$, являющиеся устойчивыми. Здесь имеем $l_1 = 0$ и $l_2 = -1$.

3.3. Бифуркация удвоения периода.

Рассмотрим уравнение (36), в котором $a(x, \mu)$ определяется равенством (33). Пусть имеет место случай P2. Тогда основным сценарием бифуркации в окрестности точки $x = 0$ является бифуркация удвоения периода.

Модельный пример бифуркации удвоения периода дает скалярное уравнение $x_{n+1} = \mu x_n + x_n^3$. Оно при всех μ имеет точку равновесия $x = 0$. При $|\mu| < 1$ эта точка устойчива, а при $\mu < -1$ и $\mu > 1$ она неустойчива. При переходе μ через значение $\mu = -1$ в окрестности точки $x = 0$ возникает устойчивый цикл периода 2: $x_1 = \sqrt{-1-\mu}$, $x_2 = -\sqrt{-1-\mu}$. Сценарий такого типа и называют *бифуркацией удвоения периода*. Отметим также, что в этом примере значение $\mu = 1$ является точкой бифуркации типа вилки.

При $N \geqslant 2$ бифуркация удвоения периода развивается по аналогичному сценарию.

Так как матрица A_0 имеет простое собственное значение -1 и не имеет других собственных значений по модулю равных одному, то уравнение (35) является одномерным, причем в силу предположения (33) функция $G(u, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ представима в виде (см., например, [1]):

$$G(u, \mu_0) = -u - l_1 u^3 + o(u^3)\,.$$

Число l_1 называют *первой ляпуновской величиной* в задаче о бифуркации удвоения периода системы (36).

Приведем утверждение, позволяющее вычислить ляпуновскую величину l_1 непосредственно в терминах исходного уравнения (36). С этой целью обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению -1. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами (9). Подпространство E_0 здесь является одномерным; оно содержит вектор e. Наконец, операторы проектирования $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ могут быть определены равенствами: $P_0 x = (x, g)e$ и $P^0 = I - P_0$. Несложно устанавливается, что оператор $I - A_0^2 + P_0 : R^N \to R^N$ обратим.

Для простоты обозначений положим $a_2 = a_2(e, \mu_0)$, $a_3 = a_3(e, \mu_0)$ и $a_2' = a_{2x}'(e, \mu_0)$.

Теорема 10. *Пусть матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет простое собственное значение -1, а остальные ее собственные значения имеют модуль, не равный единице. Тогда первая ляпуновская величина l_1 системы (36) для бифуркации удвоения периода равна*

$$l_1 = -\frac{(2a_3 + a_2'[a_2 + (I + A_0)e_1], g)}{2}\,, \tag{37}$$

где $e_1 = (I - A_0^2 + P_0)^{-1}(I + A_0)a_2$.

Замечание 4. *Число (37) не зависит от варианта выбора нормировки векторов e и g в соответствии с равенствами (9). Действительно, как отмечалось выше (см. замечание 3), эти варианты отличаются лишь знаками. Несложно видеть, что в формуле (37) оба варианта приводят к одному и тому же числу.*

Рассмотрим важный частный случай, когда система (36) является скалярной, а именно, рассмотрим уравнение

$$x_{n+1} = \beta_1(\mu)x_n + \beta_2(\mu)x_n^2 + \beta_3(\mu)x_n^3 + O(x_n^4), \quad x_n \in R^1\,, \tag{38}$$

в котором функции $\beta_j(\mu)$ являются гладкими, причем $\beta_1(\mu_0) = -1$. В этом случае формула (37) упрощается:

$$l_1 = -(\beta_2^2 + \beta_3)\,, \tag{39}$$

где $\beta_2 = \beta_2(\mu_0)$ и $\beta_3 = \beta_3(\mu_0)$.

3.3.1. Свойства бифуркации удвоения периода. Приведем некоторые свойства бифуркации удвоения периода уравнения (36), вытекающие из результатов работы [10].

Теорема 11. *Пусть в условиях теоремы 10 выполнены соотношения:*

$$l_1 \neq 0\,, \quad \gamma_1 = (A'(\mu_0)e, g) \neq 0\,. \tag{40}$$

Пусть $\mu_2 \equiv l_1/\gamma_1 > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что:

1. *Уравнение (36) при $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0]$ в δ-окрестности точки $x = 0$ имеет единственную точку равновесия $x = 0$ и не имеет циклов, а при каждом $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ имеет (наряду с точкой равновесия $x = 0$) один ненулевой цикл периода 2: $x_1 = x_1(\mu)$, $x_2 = x_2(\mu)$.*
2. *Определенные при $\mu \in [\mu_0, \mu_0 + \delta)$ функции $x_1(\mu)$ и $x_2(\mu)$ ($x_1(\mu_0) = x_2(\mu_0) = 0$) являются непрерывно дифференцируемыми, при $\mu = \mu_0$ они касаются собственного вектора e матрицы A_0, отвечающего собственному значению -1.*
3. *Пусть $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) и пусть при этом не равные -1 собственные значения матрицы $A_0 = A(\mu_0)$ имеют модуль, меньше единицы; тогда цикл $x_1 = x_1(\mu)$, $x_2 = x_2(\mu)$ при $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta)$ является асимптотически устойчивым (неустойчивым).*

Аналогичное утверждение можно привести и для случая $\mu_2 < 0$. В этом случае изменится только направленность бифуркации, т.е. бифуркационные решения будут возникать при $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0)$.

Отметим также, что для скалярного уравнения (38) определенное вторым из равенств (40) число γ_1 равно: $\gamma_1 = \beta_1'(\mu_0)$.

3.3.2. Пример: модель Хенона. В качестве примера рассмотрим модель Хенона (см., например, [1]):

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n\,, \\ v_{n+1} = a - \mu u_n - v_n^2\,, \end{cases} \tag{41}$$

в котором $0 < a < 3$ и $-1 < \mu < 1$. Ниже значение a будем считать фиксированным, а μ будет рассматриваться как бифуркационный параметр.

Система (41) имеет точку равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$, где

$$u^*(\mu) = v^*(\mu) = \frac{-(1+\mu) + \sqrt{(1+\mu)^2 + 4a}}{2}\,.$$

Произведя в (41) замену $u = x + u^*(\mu)$ и $v = y + v^*(\mu)$, перейдем к системе:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n\,, \\ y_{n+1} = -\mu x_n - 2u^*(\mu) y_n - y_n^2\,, \end{cases}$$

т.е. к системе вида (36) при $N = 2$ и:

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2u^*(\mu) \end{bmatrix}, \quad a(w,\mu) = a_2(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y^2 \end{bmatrix};$$

здесь $w = (x, y)$. Матрица $A(\mu)$ при $\mu = \mu_0 = 2\sqrt{a/3} - 1$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -\mu_0$. Поэтому следует ожидать, что при переходе параметра μ через значение $\mu = \mu_0$ в окрестности точки равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$ системы (41) возникают циклы периода 2. Изучим этот вопрос.

Найдем собственные векторы e и g матрицы $A_0 = A(\mu_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu_0 & -(1+\mu_0) \end{bmatrix}$ и транспонированной матрицы A_0^*, отвечающие собственному значению -1 и удовлетворяющие равенствам: $\|e\| = 1$ и $(e, g) = 1$. Имеем: $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $g = \dfrac{\sqrt{2}}{\mu_0 - 1} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Вычислим теперь входящие в формулу (37) выражения. Имеем: $a_3 = 0$,

$$a_2 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad P_0 = \frac{1}{\mu_0 - 1}\begin{bmatrix} \mu_0 & 1 \\ -\mu_0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(I - A_0^2 + P_0)^{-1} = -\frac{1}{(1-\mu_0)^2(1+\mu_0)}\begin{bmatrix} -\mu_0^3 + \mu_0 - 1 & -\mu_0^2 \\ \mu_0^3 & \mu_0^2 + \mu_0 - 1 \end{bmatrix},$$

$$e_1 = \frac{1}{2(\mu_0^2 - 1)}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mu_0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (37), получим $l_1 = \dfrac{1}{2(\mu_0^2 - 1)}$, т.е. в рассматриваемой задаче первая ляпуновская величина отрицательна.

Далее, так как $A'(\mu_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, то определенное вторым из равенств (40) число γ_1 здесь равно: $\gamma_1 = \dfrac{3}{2(1-\mu_0)}$. Тогда $\mu_2 \equiv l_1/\gamma_1 = -\dfrac{1}{3(\mu_0+1)} < 0$. Отсюда и из теоремы 11 получим, что циклы периода 2 в окрестности точки равновесия $(u^*(\mu), v^*(\mu))$ системы (41) возникают при $\mu < \mu_0$, и они являются асимптотически устойчивыми.

3.4. Бифуркация Андронова-Хопфа. Продолжим рассмотрение уравнения (36). Пусть теперь имеет место случай Р3, т.е. пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррационально или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geqslant 5$. Для простоты будем считать, что $N = 2$, т.е. уравнение (36) является двумерным. А именно, будем считать, что оно имеет вид:

$$x_{n+1} = A(\mu)x_n + a(x_n, \mu), \;\; x_n \in R^2, \;\; n = 0, 1, 2, ..., \tag{42}$$

при этом будем считать, что матрица $A(\mu)$ имеет вид

$$A(\mu) = (1 + \varphi(\mu)) \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) & -\sin 2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) \\ \sin 2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) & \cos 2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) \end{bmatrix},$$

где функции $\varphi(\mu)$ и $\psi(\mu)$ являются гладкими и удовлетворяют равенствам: $\varphi(\mu_0) = 0$ и $\psi(\mu_0) = 0$, при этом $\varphi'(\mu_0) \neq 0$ и $\psi'(\mu_0) \neq 0$.

В рассматриваемом случае основным сценарием локальных бифуркаций в окрестности точки равновесия $x = 0$ уравнения (42) при переходе параметра μ через μ_0 является возникновение в окрестности точки $x = 0$ инвариантной кривой $\gamma(\mu)$, ограничивающей бассейн притяжения или отталкивания этой точки. Такой сценарий часто (по аналогии с рассмотренным в п. 2.3 непрерывным случаем) называют *бифуркацией Андронова-Хопфа* (см., например, [1]). Динамика системы (42) на указанной инвариантной кривой может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических орбит.

Инвариантная кривая $\gamma(\mu)$ уравнения (42) при малых $|\mu - \mu_0|$ возникает, как правило, в одном из трех случаев: $(S1)\ \mu > \mu_0$; $(S2)\ \mu < \mu_0$; $(S3)\ \mu = \mu_0$. Последний случай называют вырожденным; он типичен для линейных и консервативных систем. Первые два случая имеют место при выполнении некоторого условия невырожденности относительно нелинейного слагаемого (33) в правой части уравнения (42) (один из вариантов такого условия будет указан ниже). При выполнении этого условия в случаях $(S1)$ и $(S2)$ каждому μ отвечает в точности одна инвариантная кривая $\gamma(\mu)$, при этом функция $\gamma(\mu)$ гладко зависит от μ и она стягивается к точке $x = 0$ при $\mu \to \mu_0$.

В рассматриваемой задаче уравнение (35) является двумерным. Это уравнение (в силу равенства (33)) при $\mu = \mu_0$ методами теории нормальных форм (см., например, [1]) может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos 2\pi\theta_0 - y_n \sin 2\pi\theta_0 + (\alpha x_n - \beta y_n)(x_n^2 + y_n^2) + o(r_n^3)\,, \\ y_{n+1} = x_n \sin 2\pi\theta_0 + y_n \cos 2\pi\theta_0 + (\beta x_n + \alpha y_n)(x_n^2 + y_n^2) + o(r_n^3)\,, \end{cases}$$

где $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Положим

$$L_1 = \alpha \cos 2\pi\theta_0 + \beta \sin 2\pi\theta_0\,, \quad \Omega_1 = \beta \cos 2\pi\theta_0 - \alpha \sin 2\pi\theta_0\,.$$

Число L_1 называют *первой ляпуновской величиной* системы (42) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа. Ниже для простоты оба числа L_1 и Ω_1 будем называть *ляпуновскими величинами* системы (42).

Приведем новую схему, позволяющую вычислить ляпуновские величины L_1 и Ω_1 в терминах исходного уравнения (42) в случае, когда нелинейность (33) начинается с кубического слагаемого, т.е. имеет вид:

$$a(x, \mu) = a_3(x, \mu) + \tilde{a}_4(x, \mu)\,. \tag{43}$$

Положим

$$\chi(\varphi) = (a_3(e(\varphi), \mu_0), h(\varphi))\,, \quad \psi(\varphi) = (a_3(g(\varphi), \mu_0), h(\varphi))\,,$$

где

$$e(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad g(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}, \quad h(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + 2\pi\theta_0) \\ \sin(\varphi + 2\pi\theta_0) \end{bmatrix}.$$

Теорема 12. *Ляпуновские величины L_1 и Ω_1 системы (36) для задачи о бифуркации Андронова-Хопфа равны:*

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi(\varphi)\,d\varphi\,, \quad \Omega_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{44}$$

4. Неавтономные периодические уравнения

В этом параграфе задача о построении ляпуновских величин будет изучаться применительно к динамическим системам, описываемым неавтономным дифференциальным уравнением с T-периодической по t правой частью:

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu) + g(t,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{45}$$

в котором матрица $A(t,\mu)$ и функции $a(x,t,\mu)$ и $g(t,\mu)$ непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по x и μ. Предполагается, что функция $a(x,t,\mu)$ представима в виде

$$a(x,t,\mu) = a_2(x,t,\mu) + a_3(x,t,\mu) + \tilde{a}_4(x,t,\mu),$$

где $a_2(x,t,\mu)$ и $a_3(x,t,\mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{a}_4(x,t,\mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по t и μ. Функция $g(t,\mu)$ для некоторого значения $\mu = \mu_0$ является нулевой: $g(t,\mu_0) \equiv 0$. Система (45) при $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x = 0$.

Если линейная T-периодическая система

$$x' = A(t,\mu)x\,, \quad x \in R^N\,. \tag{46}$$

при некотором $\mu = \mu_0$ имеет один или несколько мультипликаторов, равных по модулю единице, то μ_0 является *точкой бифуркации* системы (45). В этом случае при переходе параметра μ через μ_0 поведение системы (45) в окрестности точки $x = 0$, как правило, качественно изменяется.

Здесь будут рассматриваться следующие основные случаи:

S1. система (46) имеет простой мультипликатор 1;

S2. система (46) имеет пару простых мультипликаторов вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррациональное число или θ_0 рациональное число вида $\theta_0 = p/q$, где p/q – несократимая дробь, причем $q \geqslant 5$.

При этом предполагается, что остальные мультипликаторы системы (46) имеют модуль меньше или больше единицы.

Отметим, что система (46) не может иметь простой мультипликатор -1. Как и для дискретной системы (32), случай, когда система (46) имеет пару простых мультипликаторов вида $e^{\pm i2\pi\theta}$, где $\theta = p/q$ – несократимая дробь и $1 \leqslant q \leqslant 4$, называют сильным резонансом; этот случай в данной статье не рассматривается. Случай S2, когда $\theta_0 = p/q$ и $q \geqslant 5$, обычно называют слабым резонансом.

4.1. Переход к дискретному уравнению. Задача о локальных бифуркациях системы (45) в естественном смысле равносильна задаче о локальных бифуркациях дискретной динамической системы

$$x_{n+1} = U(x_n,\mu), \quad n = 0,1,2,..., \tag{47}$$

где $x_n \in R^N$, $U(*,\mu) :\ R^N \to R^N$ – *оператор сдвига* (см., например, [17]) по траекториям системы (45) за время от 0 до T. Оператор $U(*,\mu)$ (называемый также *отображением Пуанкаре*) представим в виде

$$U(x,\mu) = V(\mu)x + v(x,\mu) + u(\mu)\,, \tag{48}$$

где $V(\mu)$ – матрица монодромии линейной системы (46); функция $u(\mu)$ удовлетворяет условию $u(\mu_0) = 0$; $v(x, \mu)$ – нелинейный оператор, представимый в виде

$$v(x, \mu) = v_2(x, \mu) + v_3(x, \mu) + \tilde{v}_4(x, \mu),$$

где $v_2(x, \mu)$ и $v_3(x, \mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{v}_4(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{v}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по μ.

Отметим, что точки равновесия уравнения (47) определяют начальные значения T-периодических решений системы (45), а каждая точка q-цикла уравнения (47) определяет начальные значения qT-периодических решений этой системы.

Явный вид входящих в (48) функций может быть определен, если, например, известна фундаментальная матрица $X(t, \mu)$ решений линейной системы (46), удовлетворяющая начальному условию $X(0, \mu) = I$. Тогда $V(\mu) = X(T, \mu)$ и, например,

$$v_2(x, \mu) = V(\mu) \int_0^T X^{-1}(\tau, \mu) a_2(X(\tau, \mu)x, \tau, \mu)\, d\tau\,,$$

$$u(\mu) = V(\mu) \int_0^T X^{-1}(\tau, \mu) g(\tau, \mu)\, d\tau\,.$$

В частности, если $A(t, \mu)$ является постоянной по t матрицей, т.е. $A(t, \mu) \equiv A_0(\mu)$, то $X(t, \mu) = e^{TA_0(\mu)}$.

Собственные значения матрицы $V(\mu)$ – это мультипликаторы линейной системы (46). Поэтому рассматриваемые здесь случаи S1 и S2 для дифференциального уравнения (45) соответствуют случаям P1 и P3 для дискретной системы (47). Таким образом, задача о ляпуновских величинах для дифференциального уравнения (45) может быть сведена к аналогичной задаче для дискретной системы (47), для изучения которой, в свою очередь, можно воспользоваться схемой, изложенной в предыдущем параграфе. При этом ляпуновские величины дифференциального уравнения (45) будем определять как ляпуновские величины дискретной системы (47).

4.2. Основные сценарии бифуркаций. Рассмотрим сначала случай S1. Этот случай соответствует случаю P1 для дискретной системы (47). Как было отмечено выше, в этом случае качественная перестройка поведения системы (47) при переходе параметра μ через μ_0 состоит в возникновении у нее в окрестности точки $x = 0$ ненулевых точек равновесия. Но точки равновесия уравнения (47) определяют начальные значения T-периодических решений системы (45). Поэтому в случае S1 основным сценарием перестройки поведения системы системы (45) является возникновение в окрестности точки $x = 0$ ненулевых T-периодических решений малой амплитуды. Такой сценарий обычно называют *бифуркацией вынужденных колебаний* системы (45). В свою очередь, эта бифуркация может реализовываться либо как седло-узловая бифуркация, либо как транскритическая бифуркация или бифуркация типа вилки.

Пусть теперь имеет место случай S2 и пусть для простоты $N = 2$. Этот случай соответствует случаю P3 для дискретной системы (47). Как было отмечено выше, в этом случае качественная перестройка поведения системы (47) при переходе параметра μ через μ_0 состоит в возникновении у нее в окрестности точки $x = 0$ инвариантной кривой $\gamma(\mu)$. Это соответствует тому, что в пространстве $R^2 \times R^1$ (где $x \in R^2$ и $t \in R^1$) возникает двумерная гладкая поверхность $\Upsilon(\mu)$, охватывающая ось t и являющаяся инвариантной для дифференциального уравнения (45). Динамика системы (45) на поверхности $\Upsilon(\mu)$ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических решений.

4.3. Ляпуновские величины. Для каждого из указанных сценариев бифуркации системы (45) задачи о вычислении ляпуновских величин и свойствах самой бифуркации могут быть решены по схеме, изложенной в предыдущем параграфе. Ограничимся для иллюстрации приведением аналога теоремы 9. А именно, приведем утверждение, позволяющее вычислить первую ляпуновскую величину дифференциального уравнения (45) для случая S1.

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы $V_0 = V(\mu_0)$ и транспонированной матрицы V_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 1. Эти векторы можно выбрать в соответствии с равенствами (9).

Теорема 13. *Пусть имеет место случай S1. Тогда первая ляпуновская величина системы (45) в задаче о бифуркации вынужденных колебаний равна*

$$l_1 = \int_0^T (X^{-1}(\tau,\mu_0)a_2(X(\tau,\mu_0)e,\tau,\mu_0), g)\, d\tau \ . \tag{49}$$

В важном частном случае, когда матрица $A(t,\mu_0)$ является постоянной, т.е. $A(t,\mu_0) \equiv A_0$, формула (49) становится совсем простой:

$$l_1 = \int_0^T (a_2(e,\tau,\mu_0), g)\, d\tau \ . \tag{50}$$

В этой формуле e и g – это собственные векторы матриц A_0 и A_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам (9).

4.3.1. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим скалярное уравнение

$$x' = \mu(1+\cos t)x + x^2 \, . \tag{51}$$

Это уравнение имеет вид (45) при $A(t,\mu) = \mu(1+\cos t)$, $a(x,t,\mu) \equiv a_2(x) = x^2$ и $g(t,\mu) \equiv 0$. Значение $\mu = 0$ является точкой бифуркации этого уравнения, при этом имеет место случай S1, т.е. при переходе параметра μ через значение $\mu = 0$ в окрестности точки $x = 0$ для уравнения (51) имеет место бифуркация вынужденных колебаний. Так как в рассматриваемом примере $g(t,\mu) \equiv 0$, а нелинейность $a(x,t,\mu)$ содержит только квадратичные слагаемые, то бифуркация реализуется как транскритическая.

Вычислим первую ляпуновскую величину l_1 уравнения (51). Здесь можно воспользоваться формулой (50). В ней в качестве e и g можно взять числа $e = 1$ и $g = 1$. Так как $T = 2\pi$, то получим

$$l_1 = \int_0^{2\pi} (a_2(e)\,, g)\, d\tau = 2\pi \, .$$

Для исследования свойств бифуркации в уравнении (51) перейдем к дискретной модели вида (47). Здесь оператор $V(\mu)$ – это функция

$$V(\mu) = \exp\left(\mu\int_0^{2\pi}(1+\cos\tau)d\tau\right) = e^{2\pi\mu} \, .$$

Далее воспользуемся теоремой 3 (точнее, ее аналогом применительно к дискретным системам). Второе из чисел (10) здесь, очевидно, равно $\gamma_1 = (V'(0)e, g) = 2\pi > 0$. Поэтому из указанной теоремы следует, что возникающие 2π-периодические решения уравнения (51) при $\mu > 0$ асимптотически устойчивы, а при $\mu < 0$ – неустойчивы.

5. Доказательства основных утверждений

5.1. Доказательство теоремы 1. В условиях этой теоремы подпространство E_0 является одномерным, а оператор проектирования $P_0 : R^N \to E_0$ может быть определен равенством $P_0 x = (x, g)e$. Поэтому уравнение (6) здесь является также одномерным, а именно, при $\mu = \mu_0$ оно имеет вид

$$u' = P_0 b_2(u + \psi(u, \mu_0), \mu_0) + P_0 b_3(u + \psi(u, \mu_0), \mu_0) + P_0 b_4(u + \psi(u, \mu_0), \mu_0).$$

Отсюда и из равенств $\psi(0, \mu_0) = \psi'_u(0, \mu_0) = 0$ получим утверждение теоремы.

5.2. Доказательство теорем 5 и 6. Ограничимся здесь доказательством теоремы 5. Теорема 6 доказывается по той же схеме, но требует более громоздких построений.

Без ограничения общности, можно считать, что уравнение (21) при $\mu = \mu_0$ имеет вид:

$$x' = Ax + a_2(x) + a_3(x) + \ldots, \quad x \in R^2, \tag{52}$$

в котором $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

$$a_2(x) = \begin{bmatrix} a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$a_3(x) = \begin{bmatrix} a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \\ b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Собственные векторы $e + ig$ и $e^* + ig^*$ матриц A и A^*, выбранные в соответствии с равенствами (14), здесь определяются из равенств: $e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Далее, функции (15) и (16) здесь принимают вид:

$$e(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t \\ -\sin 2\pi t \end{bmatrix}, \quad f_3(t) = a_3(e(t)) + F_2(t) \int_0^t e^{-T_0 A\tau} a_2(e(\tau))\, d\tau,$$

где $T_0 = 2\pi$, $F_2(t) = T_0 a'_{2x}(e(t)) e^{T_0 A t}$; здесь $a'_{2x}(x)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x)$.

Для доказательства теоремы 5 требуется показать, что определенные равенствами (22) числа

$$\Delta_0 = (\rho_3, e^*), \quad \Delta_1 = -(\rho_3, g^*), \tag{55}$$

где ρ_3 – вектор (18), совпадают с ляпуновскими величинами L_1 и Ω_1. Ограничимся проверкой равенства $\Delta_0 = L_1$.

В силу следствия 1 получим, что для нахождения числа Δ_0 следует в формулах (19) и (20) положить $y(t) = f_3(t)$. Вычисление коэффициентов Фурье y_c и y_s функции $y(t) = f_3(t)$, участвующих в (20), разобьем на два этапа.

5.2.1. Первый этап. На первом этапе положим $a_2(x) \equiv 0$. Тогда $f_3(t) = a_3(e(t))$. Из (54) имеем:

$$a_3(e(t)) = \frac{1}{4}\cos 2\pi t \begin{bmatrix} 3a_{30} + a_{12} \\ 3b_{30} + b_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\sin 2\pi t \begin{bmatrix} a_{21} + 3a_{03} \\ b_{21} + 3b_{03} \end{bmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos 6\pi t \begin{bmatrix} a_{30} - a_{12} \\ b_{30} - b_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\sin 6\pi t \begin{bmatrix} a_{21} - a_{03} \\ b_{21} - b_{03} \end{bmatrix}.$$

Выделим отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье этой функции:

$$y_c = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3a_{30} + a_{12} \\ 3b_{30} + b_{12} \end{bmatrix}, \quad y_s = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} a_{21} + 3a_{03} \\ b_{21} + 3b_{03} \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно (20), первое из чисел (55) принимает вид:

$$\Delta_0 = \frac{1}{8}\left[3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}\right] = \frac{1}{8}\left[3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})\right]. \tag{56}$$

5.2.2. Второй этап. На втором этапе положим $a_3(x) \equiv 0$. Тогда

$$f_3(t) = T_0 a'_{2x}(e(t))\; e^{T_0 A t} \int\limits_0^t e^{-T_0 A \tau} a_2(e(\tau))\, d\tau\,. \tag{57}$$

Здесь имеем:

$$e^{T_0 A t} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{bmatrix},$$

$$a_2(e(\tau)) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{20} + a_{02} \\ b_{20} + b_{02} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cos 4\pi t \begin{bmatrix} a_{20} - a_{02} \\ b_{20} - b_{02} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\sin 4\pi t \begin{bmatrix} a_{11} \\ b_{11} \end{bmatrix},$$

$$a'_{2x}(e(t)) = \cos 2\pi t \begin{bmatrix} 2a_{20} & a_{11} \\ 2b_{20} & b_{11} \end{bmatrix} - \sin 2\pi t \begin{bmatrix} a_{11} & +2a_{02} \\ b_{11} & +2b_{02} \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (57) и проведя соответствующие вычисления, выделим отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье этой функции:

$$y_c = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 10a_{20}b_{20} + 14a_{20}b_{02} - 3a_{11}a_{20} - 3a_{11}a_{02} + a_{11}b_{11} - 4a_{02}b_{20} + 4a_{02}b_{02} \\ 10b_{20}^2 + 10b_{20}b_{02} - 7b_{11}a_{20} - 5b_{11}a_{02} + 4b_{20}a_{11} + b_{11}^2 + 2b_{02}a_{11} + 4b_{02}^2 \end{bmatrix},$$

$$y_s = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5b_{20}a_{11} - 7b_{02}a_{11} + 10a_{02}a_{20} + 10a_{02}^2 + 4a_{20}^2 + 2b_{11}a_{20} + a_{11}^2 + 4b_{11}a_{02} \\ -3b_{11}b_{20} - 3b_{11}b_{02} + 14a_{20}b_{02} + 10a_{02}b_{02} + 4a_{20}b_{20} - 4a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно (20), первое из чисел (55) примет вид

$$\Delta_0 = \frac{1}{24}\{6a_{20}b_{20} + 3b_{11}b_{20} + 3b_{11}b_{02} - 3a_{11}a_{20} - 3a_{11}a_{02} - 6a_{02}b_{02}\} = \tag{58}$$

$$= -\frac{1}{8}\{[(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - (2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) - (b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})]\,.$$

В общем случае, когда в правой части системы (52) присутствуют обе вектор-функции $a_2(x)$ и $a_3(x)$, число Δ_0 представляет собой сумму чисел (56) и (58)

5.2.3. Сравнение Δ_0 с ляпуновской величиной L_1. Рассмотрим уравнение (52), в котором матрица A имеет вид $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, где $\omega^2 = -a^2 - bc > 0$. В [1] (стр. 99) для этого уравнения приведена первая ляпуновская величина в виде:

$$L_1 = -\frac{1}{8b\omega^2}\{[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) +$$

$$+ c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) -$$

$$- b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] -$$

$$-(a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})]\}\,.$$

(*замечание:* в действительности, в указанной работе в формулу для L_1 вкралась опечатка: ее надо поделить на число $2\pi/\omega$). При подстановке $a = 0$, $b = -c = 1$ получим

$$L_1 = -\frac{1}{8}\{[(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - (2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) - (b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] +$$

$$+ [3(-b_{03} - a_{30}) + (-a_{12} - b_{21})]\}\,.$$

Сравнивая числа Δ_0 и L_1, для системы (52) получаем, что эти числа совпадают.

Для завершения доказательства теоремы 5 остается показать, что числа (22) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (14). Пусть имеется какой-либо соответствующий набор векторов e, g, e^*, g^*. Можно показать, что тогда любой другой набор векторов описывается в виде

$$e_1 = e\cos\varphi + g\sin\varphi\,, \quad g_1 = g\cos\varphi - e\sin\varphi\,,$$

$$e_1^* = e^*\cos\varphi + g^*\sin\varphi\,, \quad g_1^* = g^*\cos\varphi - e^*\sin\varphi$$

при некотором φ. Подставляя эти векторы в (22), несложно убедиться, что числа (22) принимают одни и те же значения при любом φ.

Теорема 5 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 10. Нам понадобится вспомогательное утверждение, в справедливости которого можно убедиться прямым подсчетом, и которое представляет самостоятельный интерес.

Положим

$$B_1 = I - A_0\,, \quad B_2 = I + A_0 + P_0\,.$$

По построению операторы $B_1 : R^N \to R^N$ и $B_2 : R^N \to R^N$ обратимы, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для них.

Лемма 2. *Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение -1, а остальные ее собственные значения имеют модуль меньше или больше единицы. Тогда центральное многообразие W_c системы (36) может быть описано равенством*

$$W_c = \{x : \, x = \varepsilon e + \psi(\varepsilon)\}\,, \tag{59}$$

в котором

$$\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2\psi_2 + \varepsilon^3\psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)\,; \tag{60}$$

здесь коэффициенты ψ_2 и ψ_3 определяются равенствами:

$$\psi_2 = B_1^{-1}P^0 a_2\,, \quad \psi_3 = B_2^{-1}P^0[-2(a_2, g)(A_0\psi_2 + a_2) - a_2'\psi_2 - a_3]\,, \tag{61}$$

а функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Для простоты ограничимся рассмотрением ситуации, когда система (36) двумерна, т.е. $N = 2$. Будем также для простоты считать, что при $\mu = \mu_0$ матрица $A(\mu)$ имеет вид

$$A_0 = A(\mu_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

где $b \neq \pm 1$. Наконец, пусть в нелинейности (33) квадратичная и кубическая нелинейности при $\mu = \mu_0$ имеют, соответственно, вид:

$$a_2(x) = \begin{bmatrix} a_{20}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ b_{20}x_1^2 + 2b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \end{bmatrix}, \tag{62}$$

$$a_3(x) = \begin{bmatrix} a_{30}x_1^3 + 3a_{21}x_1^2x_2 + 3a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \\ b_{30}x_1^3 + 3b_{21}x_1^2x_2 + 3b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Далее, имеем:

$$e = g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{20} \\ b_{20} \end{bmatrix}, \quad a_2' = 2\begin{bmatrix} a_{20} & a_{11} \\ b_{20} & b_{11} \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} a_{30} \\ b_{30} \end{bmatrix}.$$

Определим вид уравнения (35) при $\mu = \mu_0$ в рассматриваемом случае. С этой целью сначала отметим, что система (34) для системы (36) имеет вид:

$$\begin{cases} u_{n+1} = P_0[A(\mu)(u_n + v_n) + a(u_n + v_n, \mu)]\,, \\ v_{n+1} = P^0[A(\mu)(u_n + v_n) + a(u_n + v_n, \mu)]\,, \end{cases}$$

где $u_n = P_0 x_n$ и $v_n = P^0 x_n$; оба уравнения этой системы являются скалярными. Полагая $u_n = \varepsilon_n e$, получим, что уравнение (35) при $\mu = \mu_0$ равносильно скалярному уравнению:

$$\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n + (a(\varepsilon_n e + \psi(\varepsilon_n), \mu_0), g)\,.$$

Таким образом, правая часть уравнения (35) при $\mu = \mu_0$ здесь имеет вид:

$$G(\varepsilon, \mu_0) = -\varepsilon + (a(\varepsilon e + \psi(\varepsilon), \mu_0), g)\,.$$

В силу равенств (33) и (60) несложно показать, что тогда при малых ε имеем:

$$G(\varepsilon, \mu_0) = -\varepsilon + \varepsilon^2 (a_2, g) + \varepsilon^3 [(a_2' \psi_2, g) + (a_3, g)] + O(\varepsilon^4)\,.$$

В [1] (стр. 114) отмечено, что если в рассматриваемой здесь постановке правая часть уравнения (35) при $\mu = \mu_0$ имеет вид

$$G(\varepsilon, \mu_0) = -\varepsilon + \gamma_2 \varepsilon^2 + \gamma_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\,,$$

то первая ляпуновская величина определится формулой:

$$l_1 = -(\gamma_2^2 + \gamma_3)\,, \tag{64}$$

совпадающей с формулой (39) (*замечание:* в действительности, в указанной работе в формулу для l_1 вкралась опечатка: она должна иметь противоположный знак).

Остается убедиться в том, что числа (37) и (64) (в котором $\gamma_2 = (a_2, g)$ и $\gamma_3 = [(a_2' \psi_2, g) + (a_3, g)]$) совпадают. Учитывая формулы (61), непосредственным вычислением получаем, что (37) и (64) равны одному и тому же числу:

$$l_1 = -(a_{20}^2 + a_{30} + \frac{2}{1-b}\, a_{11} b_{20})\,.$$

Теорема доказана.

5.4. Доказательство теоремы 12. Ограничимся доказательством первой из формул (44). Пусть в нелинейности (43) функция $a_3(x, \mu)$ при $\mu = \mu_0$ определяется равенством (63). Для этого случая в [2] (стр. 209) приведена следующая формула для ляпуновской величины L_1:

$$L_1 = \frac{3}{8}[(a_{30} + a_{12} + b_{21} + b_{03}) \cos 2\pi\theta_0 + (b_{30} + b_{12} - a_{21} - a_{03}) \sin 2\pi\theta_0]\,. \tag{65}$$

Доказательство первой из формул (44) поэтому можно свести к подстановке (63) в (44) и вычислению соответствующего интеграла, в результате чего получим число, совпадающее с (65).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2002. 560 с.
3. Плисс В.А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1977. 304 с.
4. A. Kelley *The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds* // J. Diff. Eq. № 3. 1967. P. 546–570.

5. Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений* // Труды ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262; Труды ММО. 1972. Т. 26. С. 199–239.
6. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости.* М.: МЦНМО, 2005. 416 с.
7. Yu.A. Kuznetsov *Elements of Applied Bifurcation Theory.* N.Y.: Springer, 1998. 593 p.
8. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. *Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем* // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 119–126.
9. S. Lynch *Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert's sixteenth problem* // Differential equations with symbolic computations. Basel: BirkhЁauser. 2005. P. 1–26.
10. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал. Том 2. № 4. 2010. С. 3–26.
11. Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. *Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем* // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 3. С. 59–81.
12. Юмагулов М.Г. *Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем* // Уфимский математический журнал. Т. 5. № 2. 2013. С. 109–131.
13. Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах* // Доклады АН. 2009. Т. 424, № 2. С. 177–180.
14. Красносельский М.А., Юмагулов М.Г. *Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений* // ДАН России. Том 365. № 2. 1999. С. 162–164.
15. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* М.: Мир. 1980. 368 с.
16. Баутин Н.Н. *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости* // Серия «Современные проблемы механики». Л.-М.: ОГИЗ Гостехиздат. 1949.
17. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1966. 332 с.

Надежда Ивановна Гусарова,
Рыбинский государственный авиационный технический университет
имени П.А. Соловьева,
ул. Пушкина, д. 53,
152934, г. Рыбинск Ярославской обл., Россия
E-mail: gusarova-73@mail.ru

Сария Аширафовна Муртазина,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453833, г. Сибай, Россия
E-mail: sariamurtaz@mail.ru

Марат Флюрович Фазлытдинов,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: fazlitdin_marat@mail.ru

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru