ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 111-116.

УДК 517.957

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВКАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.Я. СТАРЦЕВ

Аннотация. Для наиболее известных дифференциальных подстановок, связывающих между собой скалярные эволюционные уравнения, множества допускающих их уравнений состоят не из конечного числа уравнений, а образуют семейства, параметризованные произвольной функцией. Аналогичным свойством обладают и некоторые подстановки для эволюционных систем. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия того, что дифференциальная подстановка первого порядка допускается семейством эволюционных систем, зависящих от произвольной функции. Также предъявлены явные формулы для нахождения соответствующего семейства эволюционных систем в случае выполнения указанных условий.

В качестве иллюстрации построено семейство систем, допускающих многокомпонентную подстановку Коула-Хопфа. Показано, что любая линейная система с производными не ниже первого порядка в ее правой части принадлежит этому семейству. В результате получено множество С-интегрируемых систем, включающее в себя системы сколь угодно высокого порядка. Другим рассмотренным в статье примером является многокомпонентный аналог подстановки $v = u_x + \exp(u)$. Показано, что эта многокомпонентная подстановка также допускается семейством эволюционных систем, зависящих от произвольной функции.

Ключевые слова: дифференциальные подстановки, эволюционные системы, С-интегрируемость.

Mathematics Subject Classification: 37K35, 35G50, 37K35

1. Введение

При изучении дифференциальных уравнений в частных производных важную роль играют дифференциальные подстановки. В частности, они позволяют как связывать между собой уже известные интегрируемые уравнения, так и находить новые. Наиболее известные подстановки вида

$$v = P(x, u, u_x), \tag{1}$$

переводящие решения эволюционного уравнения

$$u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_k), \qquad u_i := \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \tag{2}$$

в решения уравнения такого же вида, обладают следующим свойством: для них найдутся ненулевые операторы

$$S = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i(x, u, u_1, \ldots, u_\ell) D_x^i, \qquad H = \sum_{i=0}^{m+1} \zeta_i(x, v, v_1, \ldots, v_r) D_x^i, \tag{3}$$

S.Ya. Startsev, On differential substitutions for evolution systems.

Работа поддержана РНФ (грант 15-11-20007).
Поступила 14 сентября 2017 г.

такие что уравнение $u_t = S(\eta(x, P, D_x(P), \ldots, D_x^{\kappa}(P))$ переводится подстановкой (1) в уравнение $v_t = H(\eta(x, v, v_1, \ldots v_\kappa))$ для любой функции η, зависящей от конечного числа аргументов. Здесь $v_j := \partial^j v / \partial x^j$, а через D_x обозначен оператор полной производной по x.

Наиболее известным примером дифференциальной подстановки является преобразование Миуры $v = u_x - u^2$. Для него (см., например, [1, 2])

$$S = D_x^2 + 2uD_x + 2u_x, \qquad H = D_x^3 + 4vD_x + 2v_x.$$

Поэтому в дальнейшем для краткости мы будем называть подстановки, обладающие вышеупомянутым свойством, *подстановками типа Миуры.*

В работе [3] было показано, что уравнение (2) допускает дифференциальную подстановку $v = P(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда (2) является симметрией гиперболического уравнения $u_{xy} = -u_y P_u / P_{u_x}$. Если же (1) является подстановкой типа Миуры, то, согласно [4], соответствующее гиперболическое уравнение интегрируемо по Дарбу. Последний факт позволяет использовать каскадный метод интегрирования Лапласа (см., например, [5] или вводную часть работы [6]) как для проверки того, является ли (1) подстановкой типа Миуры, так и для построения операторов S и H для нее.

В случае систем (то есть когда u, f, v и P являются n-мерными векторами) дифференциальные подстановки также представляют интерес и рассматривались, например, в [3], [7]–[11]. Однако, как показано в [12], каскадный метод интегрирования Лапласа, вообще говоря, неприменим в случае систем. Поэтому для систем требуется какой-то другой способ проверки того, является ли (1) подстановкой типа Миуры, и построения для нее соответствующих операторов S и H. Такой способ предложен в настоящей работе и его работоспособность продемонстрирована на примерах.

2. Необходимые и достаточные условия для подстановок типа Миуры

Отсюда и далее мы будем считать (2) системой, а (1) – многокомпонентной подстановкой соответствующей размерности. Другими словами, u и f в (2), а также v и P в (1) будем считать n-мерными векторами. В связи с этим напомним следующие стандартные обозначения. Через $g_z = \partial g / \partial z$, где g – скалярная функция, z – вектор $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^\top$, мы будем обозначать строку $(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n)$. Если же g является вектор-функцией $(g^1, g^2, \ldots, g^n)^\top$, то через g_z обозначается матрица со строками $g_z^1, \ldots, g_z^n$. В дальнейшем будем предполагать, что матрица P_{u_x} невырождена. Стоит заметить, что не все подстановки (1) для систем эволюционных уравнений удовлетворяют этому условию, но в настоящей статье рассматриваются только такие.

Определение 1. *Будем говорить, что система* (2) *допускает дифференциальную подстановку* (1) *в систему $v_t = \hat{f}(x, v, v_1, \ldots, v_k)$, если $P_{u_x} \neq 0$ и выполняется соотношение*[1]

$$P_{u_x} D_x(f) + P_u f = \hat{f}(x, P, D_x(P), \ldots, D_x^k(P)). \tag{4}$$

Будем называть (1) *подстановкой типа Миуры, если найдутся дифференциальные операторы вида* (3), *такие что α_i, ζ_i являются n-мерными векторами, $\alpha_m \neq 0$ и для любой зависящей от конечного числа аргументов скалярной функции η система $u_t = S(\eta(x, P, D_x(P), \ldots))$ допускает подстановку* (1) *в систему $v_t = H(\eta(x, v, v_1, \ldots))$. В этом случае будем называть операторы S и H исходным и целевым оператором подстановки соответственно.*

---

[1]Данное соотношение означает, что $v = P(x, u, u_x)$ является решением системы $v_t = \hat{f}$ для любого решения системы (2).

Для дальнейших рассуждений удобно разрешить соотношение (1) относительно u_x, получив в результате выражение $u_x = a(x, u, v)$. Пользуясь последним равенством, мы можем выразить любую функцию от x, u и производных u по x в переменных x, u, v, v_i. Для любой скалярной функции g от этих переменных оператор D_x задается формулой

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} a + \frac{\partial g}{\partial v} v_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial v_i} v_{i+1}.$$

На вектора и матрицы оператор D_x действует покомпонентно. Для более компактной записи формул в дальнейшем мы будем считать нулевую степень оператора D_x (равно как и нулевую степень любого другого оператора) равной тождественному отображению. Символом $\circ$ будем обозначать композицию операторов.

Теорема 1. *Если матрица P_{u_x} невырождена, то* (1) *является подстановкой типа Миуры с исходным оператором порядка m тогда и только тогда, когда найдутся n-мерные векторы $\beta_i(x, v, v_1, \ldots, v_p)$, $i = \overline{0, m+1}$, такие что $\beta_{m+1} \neq 0$ и выполнено соотношение*

$$\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i (D_x - a_u)^i (a_v) \beta_i = 0, \tag{5}$$

где $P(x, u, a(x, u, v)) \equiv v$.

Если выполнено (5)*, то операторы*

$$S = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (D_x - a_u)^i (a_v) \sum_{j=0}^{m-i} D_x^j \circ \beta_{i+j+1}, \quad H = \sum_{i=0}^{m+1} D_x \circ \beta_i \tag{6}$$

являются соответственно исходным оператором (записанным в переменных x, u, v, v_i) и целевым оператором подстановки (1).

Доказательство. Дифференцируя соотношение $P(x, u, a(x, u, v)) \equiv v$ по v и u, получим $P_{u_x} = (a_v)^{-1}$ и $P_u = -(a_v)^{-1} a_u$. Поэтому, после исключения производных u по x с помощью выражения $u_x = a(x, u, v)$ и его дифференциальных следствий, определяющее соотношение (4) принимает вид

$$(D_x - a_u)\left(f(x, u, a, D_x(a), \ldots, D_x^{k-1}(a))\right) = a_v \hat{f}(x, v, v_1, \ldots, v_k).$$

В случае подстановки типа Миуры последнее равенство эквивалентно соотношению $(D_x - a_u) \circ S = a_v H$ между исходным и целевым операторами (3). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях D_x в правой и левой частях этого соотношения, получим цепочку равенств

$$\begin{gathered} \alpha_m = a_v \zeta_{m+1}, \\ (D_x - a_u)(\alpha_i) + \alpha_{i-1} = a_v \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ (D_x - a_u)(\alpha_0) = a_v \zeta_0. \end{gathered}$$

Последовательно выражая α_i через ζ_j, $j > i$, с помощью первых двух уравнений этой цепочки, а затем подставляя полученное таким образом выражение для α_0 в третье уравнение, мы приходим к соотношению

$$\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i (D_x - a_u)^i (a_v \zeta_i) = 0. \tag{7}$$

Равенство вида (5) легко получить из (7) многократно воспользовавшись формулой $(D_x - a_u)(a_v \zeta) = (D_x - a_u)(a_v)\zeta + a_v D_x(\zeta)$.

Обратно, если выполнено (5), то непосредственной проверкой убеждаемся в том, что равенство $(D_x - a_u) \circ S = a_v H$ выполняется для операторов (6). $\square$

Стоит отметить, что условие (5) вместе с его следствиями, получаемыми дифференцированием по u, представляет из себя чисто алгебраическую линейную систему уравнений для нахождения β_i (вообще говоря, переопределенную). Поэтому анализировать это условие сравнительно просто. Проиллюстрируем это на примерах.

3. Примеры многокомпонентных подстановок типа Миуры

Для дальнейших рассуждений удобно ввести следующие обозначения. Для любого вектора $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)^\top$ через $\langle z\rangle$ обозначим сумму его координат, а через $[z]$ – диагональную матрицу с диагональю из координат вектора z:

$$\langle z\rangle := \sum_{i=0}^{n} z^i, \qquad [z] := \mathrm{diag}\{z^1, z^2, \dots, z^n\}.$$

3.1. Подстановка Коула-Хопфа. Многокомпонентная подстановка Коула-Хопфа $v = \langle u\rangle^{-1} u_x$ рассматривалась, например, в работах [3, 7]. Проверим, является ли она подстановкой типа Миуры.

Для этого выпишем для нее соотношение (5) при $m = 0$. В данном случае $a = \langle u\rangle v$, $a_v = \langle u\rangle E$, $a_u = [v]C$, где E – единичная матрица, а все элементы матрицы C равны 1. Также легко видеть, что $D_x(\langle u\rangle) = \langle u\rangle\langle v\rangle$. С учетом этого, соотношение (5) в случае подстановки Коула-Хопфа имеет вид

$$\langle u\rangle\beta_0 = (\langle u\rangle\langle v\rangle E - \langle u\rangle[v]C)\beta_1. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что для любого вектора $\beta \in \ker C$ (что равносильно условию $\langle\beta\rangle = 0$) векторы $\beta_1 = \beta$ и $\beta_0 = \langle v\rangle\beta$ удовлетворяют этому уравнению. Еще одним решением (8) является $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = v$.

Таким образом, подстановка Коула-Хопфа является подстановкой типа Миуры и имеет n различных исходных и целевых операторов (6). Их можно рассматривать как два оператора с матричными коэффициентами $\mathbb{S} = \langle u\rangle B$ и $\mathbb{H} = D_x \circ B + \langle v\rangle\tilde{B}$, где первым столбцом матриц B и $\tilde{B}$ соответственно являются вектор v и нулевой вектор, а остальные столбцы у обоих матриц совпадают и образуют базис $\ker C$. Для определенности в качестве базиса $\ker C$ выберем векторы e_i, у которых первая координата равна -1, i-тая координата равна 1, а остальные компоненты равны нулю. При таком выборе

$$B = \begin{pmatrix} v^1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ v^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v^3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любой n-компонентной вектор-функции $\vec{\eta}$ система

$$u_t = \mathbb{S}(\vec{\eta}(x, \langle u\rangle^{-1}u_x, D_x(\langle u\rangle^{-1}u_x), \dots)) \tag{9}$$

переводится подстановкой $v = \langle u\rangle^{-1}u_x$ в систему $v_t = \mathbb{H}(\vec{\eta}(x, v, v_1, \dots))$.

В работе [7] было показано, что любая система $u_t = \Lambda u_{xx}$, где Λ – постоянная матрица, допускает подстановку $v = \langle u\rangle^{-1}u_x$. Обобщим это наблюдение, продемонстрировав, что любая линейная система (2) с $f_u = 0$ может быть представлена в виде (9).

Индукцией по i нетрудно проверить, что $\langle u\rangle^{-1}u_i = (D_x + \langle P\rangle)^{i-1}(P)$, где $i > 0$ и $P = \langle u\rangle^{-1}u_x$. Действительно, для $i = 1$ это равенство совпадает с формулой $P = \langle u\rangle^{-1}u_x$, а из выполнения его для какого-нибудь i вытекает

$$\frac{u_{i+1}}{\langle u\rangle} = D_x\left(\frac{u_i}{\langle u\rangle}\right) - D_x\left(\frac{1}{\langle u\rangle}\right)u_i = \left(D_x + \frac{\langle u_x\rangle}{\langle u\rangle}\right)\left(\frac{u_i}{\langle u\rangle}\right) = (D_x + \langle P\rangle)^i(P).$$

С учетом этого равенства имеем

$$Au_i = \langle u\rangle BB^{-1}A(D_x + \langle P\rangle)^{i-1}(P) = \mathbb{S}(B^{-1}A(D_x + \langle P\rangle)^{i-1}(P))$$

для любого $i > 0$ и любой матрицы A. Если эту матрицу можно выразить в терминах x, P и полных производных P по x, то система $u_t = Au_i$ представляется в виде (9) с $\vec{\eta} = B^{-1}A(D_x + \langle P\rangle)^{i-1}(P)$ и, следовательно, переводится подстановкой Коула-Хопфа в систему

$$v_t = \mathbb{H}(\vec{\eta}) = D_x\left(A(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v)\right) + \langle v\rangle\tilde{B}B^{-1}A(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v). \tag{10}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться к том, что

$$B^{-1} = \frac{1}{\langle v\rangle}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -v^2 & \langle v\rangle - v^2 & -v^2 & \dots & -v^2 \\ -v^3 & -v^3 & \langle v\rangle - v^3 & \dots & -v^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v^n & -v^n & -v^n & \dots & \langle v\rangle - v^n \end{pmatrix}.$$

Из $(\tilde{B} + B - \tilde{B})B^{-1} = E$ следует $\tilde{B}B^{-1} = E + (\tilde{B} - B)B^{-1}$. Первый столбец матрицы $\tilde{B} - B$ равен $-v$, а все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Поэтому $\tilde{B}B^{-1} = E - \langle v\rangle^{-1}[v]C$. Подставляя последнее выражение в (10), получим

$$v_t = (D_x + \langle v\rangle)\left(A(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v)\right) - \langle A(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v)\rangle v.$$

Из этого, в частности, следует, что любая система вида

$$v_t = \sum_{i=1}^{k}\left((D_x + \langle v\rangle)\left(A_i(t,x)(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v)\right) - \langle A_i(t,x)(D_x + \langle v\rangle)^{i-1}(v)\rangle v\right),$$

где A_i – матрицы размера $n \times n$, является С-интегрируемой поскольку получается из линейной системы $u_t = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,x)u_i$ подстановкой Коула-Хопфа. Здесь мы добавили зависимость от t в $\vec{\eta}$, поскольку ничего не мешает нам рассматривать подстановки (1) для систем (2) с явной зависимостью от t в правой части: единственное изменение, которое добавление t вызывает в определении 1, состоит в том, что $\hat{f}$ в (4) также может зависеть от t; на определяющее соотношение $(P_{u_x}D_x - P_u)\circ\mathbb{S} = \mathbb{H}$ для исходного и целевого операторов добавление зависимости от t в $\vec{\eta}$ не влияет никак.

3.2. Экспоненциальная подстановка. Одной из скалярных подстановок типа Миуры является подстановка $v = u_x + \exp(u)$ (см., например, [1, 4]). Попробуем построить ее многокомпонентный аналог. Для этого обозначим через $\mathbf{e^u}$ вектор $(\exp(u^1), \exp(u^2), \dots, \exp(u^n))^\top$ и посмотрим, не является ли $v = u_x - A\mathbf{e^u}$, где A – постоянная матрица размера $n \times n$, подстановкой типа Миуры.

При $m = 0$ условие (5) для этой подстановки имеет вид $\beta_0 + A[\mathbf{e^u}]\beta_1 = 0$. Дифференцируя это равенство по u^i, получим что произведение i-той координаты вектора β_1 на i-тый столбец матрицы A равно нулю. Поэтому подстановка $v = u_x - A\mathbf{e^u}$ с невырожденной матрицей A (то есть в ситуации общего положения) не допускает исходного оператора нулевого порядка.

В случае $m = 1$ равенство (5) записывается как

$$\beta_0 + A[\mathbf{e^u}]\beta_1 = A[\mathbf{e^u}]([v + A\mathbf{e^u}] - A[\mathbf{e^u}])\beta_2. \tag{11}$$

Обозначим через $\sharp_j^i$ вектор, у которого координаты с i-той по j-тую равны единице, а остальные координаты равны нулю. Нетрудно видеть, что $\beta_2 = \sharp_n^1$, $\beta_1 = v$ и $\beta_0 = 0$ является решением (11). Соответствующими этому решению исходным и целевым операторами являются $S = \sharp_n^1 D_x + u_x$, $H = \sharp_n^1 D_x^2 + vD_x + v_x$. Таким образом, $v = u_x - A\mathbf{e^u}$ является подстановкой типа Миуры для любой постоянной матрицы A. В случае матрицы A специального вида эта подстановка может допускать дополнительные исходные и целевые операторы. Помимо указанного в предыдущем абзаце случая матрицы A с одним или более нулевым столбцом, дополнительные исходные и целевые операторы могут иметься и при условии $\det(A) \neq 0$.

Например, если матрица A является блочно-диагональной с i-тым блоком, расположенным в строках и столбцах с p_i-го по q_i-тый, то $\beta_2 = \sharp_{q_i}^{p_i}$, $\beta_1 = [v]\sharp_{q_i}^{p_i}$ и $\beta_0 = 0$ также являются решениями (11). В частности, если матрица A является диагональной (то есть размер всех блоков равен 1), то соответствующий этим решениям набор исходных и целевых операторов можно записать как $\mathbb{S} = ED_x + [u_x]$, $\mathbb{H} = ED_x^2 + [v]D_x + [v_x]$. Также нельзя исключать, что дополнительные исходные и целевые операторы могут обнаружиться при анализе соотношения (5) с $m > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабиров С.В. *Преобразования Беклунда эволюционных уравнений.* Препринт Башк. филиала АН СССР. Уфа. 1984. 34 с.
2. S.Yu. Sakovich *On the polinonial Miura transformation* // Phys. Lett. A. 1990. V. 146. № 1,2. P. 32–34.
3. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений* // УМН. Т. 43. № 5(263). 1988. С. 133–163.
4. Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры* // ТМФ. Т. 116. № 3. 1998. С. 336–348.
5. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* М.: ИЛ. 1957.
6. Старцев С.Я. *Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений* // Матем. заметки. Т. 83. № 1. 2008. С. 107–118.
7. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Факторизация эволюционных уравнений* // УМН. Т. 47. № 3(285). 1992. С. 115–146.
8. Демской Д.К. *Об одном классе систем лиувиллевского типа* // ТМФ. Т. 141. № 2. 2004. С. 208–227.
9. Киселев А.В.*Алгебраические свойства деформаций по Гарднеру интегрируемых систем* // ТМФ. Т. 152. № 1. 2007. С. 101–117.
10. Балахнев М.Ю. *Дифференциальные подстановки первого порядка для уравнений интегрируемых в* $\mathbb{S}^n$ // Матем. заметки. Т. 89. № 2. 2011. С. 178–189.
11. Балахнев М.Ю. *О дифференциальных подстановках для векторных обобщений мКдФ* // Матем. заметки. Т. 98. № 2. 2015. С. 173–179.
12. Жибер А.В., Старцев С.Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Матем. заметки. Т. 74. № 6. 2003. С. 848–857.

Сергей Яковлевич Старцев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: startsev@anrb.ru