ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 55-59.

УДК 517.17+517.51

О НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

В.А. КЛЯЧИН

Аннотация. В статье рассматриваются функции являющиеся максимальными значениями непрерывных функций на семействах компактных подмножеств. Такие функции используются, например, при исследовании геометрического строения различных равновесных поверхностей – минимальных поверхностей, поверхностей постоянной средней кривизны и т.п. Обычно подобные функции строятся как геометрические характеристики исследуемых поверхностей – расстояние от точки поверхности до фиксированной прямой, радиус описанной сферы и т.п. Одним из ключевых моментов этого подхода является обоснование их непрерывности и дифференцируемости. Это позволяет выводить дифференциальные соотношения для рассматриваемых функций. В настоящей работе вопросы непрерывности и дифференцируемости рассматриваются в более общей постановке – для топологических и метрических пространств. В частности, найдены условия на отображение топологических пространств $F : X \to T$, при которых функция вида $\rho(t) = \max_{x \in F^{-1}(t)} g(x)$ является непрерывной. Кроме этого, для такого рода функций получены условия липшицевости и δ-выпуклости в $\mathbb{R}^m$.

Ключевые слова: метрическое пространство, липшицевы функции, непрерывность, дифференцируемость, δ-выпуклость.

Mathematics Subjects Classifications: 26B05, 26B35

1. Введение

Один из методов исследования минимальных поверхностей и поверхностей с предписанной средней кривизной основан на использовании так называемой функции обхвата $\rho(t)$, которая представляет собой максимальное значение расстояния от точки некоторой прямой до точек поверхности лежащих в плоскости ортогональной этой прямой. Для функции обхвата выводятся различные дифференциальные неравенства, из которых, путем интегрирования извлекается определенная информация о строении поверхности в целом. Данный подход был использован в работах В.М. Миклюкова, А.Д. Веденяпина, М.В. Привалова, Н.В. Лосевой, В.Г. Ткачева, В.А. Клячина [1]–[7].

В работе [1] доказано, что для минимальных гиперповерхностей трубчатого типа эта функция является выпуклой вниз и удовлетворяет почти всюду дифференциальному неравенству

$$\rho''(t)\rho(t) \geq (n-1)(1+\rho'^2(t)).$$

В работах [2]–[7] аналогичные неравенства были получены для минимальных поверхностей произвольной коразмерности, p-минимальных гиперповерхностей, поверхностей предписанной средней кривизны. Во всех этих случаях доказательство основано на принципе сравнения эллиптических операторов типа средней кривизны, а существование почти всюду вторых производных получается с использованием принципа максимума для специальным образом построенных субгармонических функций в метрике соответствующей поверхности. Так же следует упомянуть классическую теорему Адамара о трех кругах.

V.A. Klyachin, On continuity and differentiability of the maximum values of functions.

Поступила 17 мая 2016 г.

В этой теореме утверждается, что для голоморфной функции $f(z)$, заданной в кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ для всякого $r_1 < r_2 < r_3$ имеет место неравенство

$$\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\log M(r_2) \leqslant \log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\log M(r_1) + \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\log M(r_3),$$

где $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$. Это неравенство эквивалентно тому, что функция $\varphi(t) = \log M(e^t)$ выпукла вниз для $t \in (\log r_1, \log r_3)$. Некоторые обобщения этой теоремы можно найти в [8]. Доказательство неравенства Адамара также основано на применении принципа максимума. В настоящей статье мы предлагаем доказательства непрерывности, дифференцируемости и δ-выпуклости функций, представляющих собой максимальные значения непрерывных и гладких функций не используя факта справедливости принципа максимума или его аналога.

2. Непрерывность

Пусть X и T топологические пространства и $F : X \to T$ – некоторое непрерывное отображение такое, что для каждого предкомпактного множества $K \subset T$ прообраз $F^{-1}(K)$ предкомпактен в X. В частности, тогда множества $\Sigma(t) = F^{-1}(t),\ t \in T$ компактны. Пусть $g : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция для которой определим

$$\rho(t) = \max_{x\in\Sigma(t)} g(x).$$

Теорема 1. *Предположим, что любое открытое покрытие компакта $\Sigma(t)$ является открытым покрытием $\Sigma(t')$ для всех t' из некоторой окрестности точки t. Тогда, если отображение F открыто, то функция $\rho(t)$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in T$ – некоторая точка и $x_0 \in \Sigma(t_0)$ такая, что $g(x_0) = \rho(t_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку функция g непрерывна, то для каждой точки $x \in \Sigma(t_0)$ можно определить окрестность $U(x)$ такую, что

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(x).$$

Совокупность таких окрестностей образует открытое покрытие компактного множества $\Sigma(t_0)$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $U(x_k), k = 1, ..., m$. Тогда, в силу открытости отображения F множество $\cup_{k=1}^m F(U(x_k)) = V(t_0)$ открыто. Пусть $V'(t_0)$ такая окрестность точки t_0, для которой объединение $\cup_{k=1}^m U(x_k)$ является покрытием $\Sigma(t')$ для всякого $t' \in V'(t_0)$. Ясно, что для $t' \in V'(t_0)$ пересечение $\Sigma(t') \cap U(x_k) \neq \emptyset$ для некоторого k. Рассмотрим $x' \in \Sigma(t'),\ g(x') = \rho(t')$ и $x' \in U(x_k)$. Тогда

$$\rho(t_0) = g(x_0) \geq g(x_k) > g(x') - \varepsilon = \rho(t') - \varepsilon.$$

Поскольку $\Sigma(t') \cap U(x_k) \neq \emptyset$, то найдется $y' \in \Sigma(t') \cap U(x_k)$. Тогда

$$\rho(t') = g(x') \geq g(y') > g(x_0) - \varepsilon = \rho(t_0) - \varepsilon.$$

Так, что для $t' \in V'(t_0)$ выполнено

$$|\rho(t') - \rho(t_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно функция $\rho(t)$ непрерывна. Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть в круге $B = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 1\}$ задана функция

$$F(x) = e^{-r}\cos 3\pi r, \quad r = |x|.$$

Тогда

$$\Sigma(t) = \{x \in B : F(x) = t\}.$$

Положим $g(x) = x_1$. Тогда, как не сложно видеть, функция $\rho(t) = \max_{\Sigma(t)} g(x)$ имеет разрыв в точке $t = e^{-r_0}\cos 3\pi r_0,\ r_0 = 2/3 - (1/(3\pi))\arctan(1/(3\pi))$. При этом заметим, что отображение, заданное функцией $F(x)$ не является открытым в окрестности окружности $r = r_0$.

Пусть теперь $X = (X, d_X)$ – метрическое пространство. Через $K(X)$ мы обозначим метрическое пространство компактных подмножеств $K \in X$, снабженное стандартной метрикой Хаусдорфа

$$d_K(K_1, K_2) = \max\{\max_{y\in K_2}\min_{x\in K_1} d_X(x,y), \max_{y\in K_1}\min_{x\in K_2} d_X(x,y)\}.$$

Пусть $F : T \to K(X)$ некоторое непрерывное отображение, и $g : X \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Положим $\Sigma(t) = F(t),\ t \in T$.

Теорема 2. *Если функция $g(x)$ равномерно непрерывна, то функция*

$$\rho(t) = \max_{\Sigma(t)} g(x)$$

непрерывна.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $g(x)$ найдется $\delta > 0$, такое, что если $d_X(x', x'') < \delta$, то $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$. Пусть $t_0 \in T$. Поскольку отображение F непрерывно в точке t_0, то для $\delta > 0$ найдется такая окрестность $V(t_0)$ точки t_0 что для всякой точки $t \in V(t_0)$ будет выполнено

$$d_K(\Sigma(t), \Sigma(t_0)) < \delta.$$

В силу компактности множеств $\Sigma(t_0)$ и $\Sigma(t)$ найдутся точки $x_0 \in \Sigma(t_0)$ и $x' \in \Sigma(t)$ такие, что

$$g(x_0) = \rho(t_0), \quad g(x') = \rho(t).$$

А также найдутся точки $y_0 \in \Sigma(t_0)$ и $y' \in \Sigma(t)$ такие, что

$$d_X(x_0, y') = \min_{y\in\Sigma(t)} d_X(x_0, y)$$

$$d_X(x', y_0) = \min_{y\in\Sigma(t_0)} d_X(x', y).$$

По определению расстояния Хаусдорфа получаем

$$d_X(x_0, y') < \delta, \quad d_X(x', y_0) < \delta. \tag{1}$$

Тогда, будем иметь

$$\rho(t) - \rho(t_0) = g(x') - g(x_0) \leqslant g(x') - g(y_0) < \varepsilon,$$
$$\rho(t) - \rho(t_0) = g(x') - g(x_0) \geq g(y') - g(x_0) > -\varepsilon,$$

в силу неравенств (1). Таким образом, для всякого $t \in V(t_0)$ будет выполнено $|\rho(t) - \rho(t_0)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

3. Липшицевость и δ-выпуклость

Предположим, что пространство T является метрическим с метрикой d_T.

Теорема 3. *Пусть отображение $F : T \to K(X)$ и функция $g : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Липшица:*

$$d_K(F(t_1), F(t_2)) \leqslant L_0 d_T(t_1, t_2),$$

и

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant L_1 d_X(x_1, x_2).$$

Тогда функция

$$\rho(t) = \max_{x\in F(t)} g(x)$$

удовлетворяет условию Липшица:

$$|\rho(t_1) - \rho(t_2)| \leqslant L_0 L_1 d_T(t_1, t_2).$$

Доказательство. Рассмотрим некоторые $t_1, t_2 \in T$ и $x_1 \in \Sigma(t_1), \rho(t_1) = g(x_1)$, $x_2 \in \Sigma(t_2), \rho(t_2) = g(x_2)$. Выберем $y_1 \in \Sigma(t_1)$, $y_2 \in \Sigma(t_2)$ такие, что $d_X(x_1, y_2) = \min_{z\in\Sigma(t_2)} d_X(x_1, z)$, $d_X(x_2, y_1) = \min_{z\in\Sigma(t_1)} d_X(x_2, z)$. Поскольку отображение F липшицево, имеем

$$d_K(\Sigma(t_1), \Sigma(t_2)) \leqslant L_0 d_T(t_1, t_2).$$

Следовательно

$$d_X(x_1, y_2) \leqslant L_0 d_T(t_1, t_2)$$

и

$$d_X(x_2, y_1) \leqslant L_0 d_T(t_1, t_2).$$

Таким образом, получаем

$$\rho(t_1) = g(x_1) \geq g(y_1) \geq g(x_2) - L_1 d_X(y_1, x_2) \geq \rho(t_2) - L_0 L_1 d_T(t_1, t_2),$$

и

$$\rho(t_2) = g(x_2) \geq g(y_2) \geq g(x_1) - L_1 d_X(y_2, x_1) \geq \rho(t_1) - L_0 L_1 d_T(t_2, t_1).$$

Следовательно

$$|\rho(t_1) - \rho(t_2)| \leqslant L_0 L_1 d(t_1, t_2).$$

Теорема доказана.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – область в $\mathbb{R}^m$ и $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $p < m$ C^1-гладкое отображение с $\mathrm{rank} dF = p$. Мы предположим, что для всех $t \in \mathbb{R}^p$ множество $F^{-1}(t) = \Sigma(t)$ компактно в Ω. Рассмотрим C^2-гладкую функцию $g : \Omega \to \mathbb{R}$ и положим

$$\rho(t) = \max_{x\in\Sigma(t)} g(x).$$

Теорема 4. *Функция $\rho(F(x))$ является локально δ-выпуклой, т.е. для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ найдется окрестность $U(x_0)$ и выпуклая функция $v(x)$ такие, что функция $\rho(F(x)) + v(x)$ выпукла в $U(x_0)$.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $h(x), x \in \mathbb{R}^m$ непрерывная функция такая, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ и для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ существует квадратичная функция вида $r(x) = -\alpha|x - x_0|^2 + \langle x - x_0, \beta\rangle + h(x_0)$ такая, что $h(x) \geq r(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда функция $h(x) + \alpha|x|^2$ выпукла вниз.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered} h(x) + \alpha|x|^2 = h(x) + \alpha|x - x_0|^2 - 2\alpha\langle x_0, x - x_0\rangle + \\ +\alpha|x_0|^2 \geq -\alpha|x - x_0|^2 + \langle \beta, x - x_0\rangle + h(x_0) + \\ +\alpha|x - x_0|^2 - 2\alpha\langle x_0, x - x_0\rangle + \alpha|x_0|^2 = \\ = h(x_0) + \alpha|x_0|^2 + \langle -2\alpha x_0 + \beta, x - x_0\rangle. \end{gathered}$$

Это неравенство показывает, что график функции $h(x) + \alpha|x|^2$ лежит выше гиперплоскости, заданной уравнением $x_{m+1} = h(x_0) + \alpha|x_0|^2 + \langle -2\alpha x_0 + \beta, x - x_0\rangle$, а это в свою очередь означает, что функция $h(x)$ выпукла вниз.

Доказательство теоремы 4. Зафиксируем точку $t_0 \in \mathbb{R}^p$. Найдется точка $x_0 \in \Omega$, такая, что $\rho(t_0) = g(x_0)$. Поскольку $\mathrm{rank} dF = p$, то отображение F открыто, а следовательно функция $\rho(t)$ непрерывна согласно теореме 1. Пусть $U(x_0)$ некоторая окрестность точки x_0 и $V(t_0) = F(U(x_0))$. Рассмотрим функцию $h(x) = \rho(F(x))$. Ясно, что $g(x) \leqslant h(x)$, $x \in U(x_0)$ и $g(x_0) = h(x_0)$. Поскольку функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для каждой точки x_0 и подходящего вектора $\beta \in \mathbb{R}^m$ будет выполнено $h(x) \geq g(x) \geq -\alpha|x-x_0|^2+\langle\beta, x-x_0\rangle+h(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0. Согласно лемме функция $h(x) + \alpha|x|^2$ является выпуклой, а значит $\rho(F(x))$ – δ-выпукла.

В общем случае в условиях теоремы 4 невозможно доказать дифференцируемость функции $\rho(F(x))$ в каждой точке. Рассмотрим пример. Пусть в прямоугольнике $[0,\pi]\times[-\pi,\pi]$ задана функция $g(x)=\cos x_1 \sin x_2$. Положим $F(x)=x_1$. Тогда

$$\rho(t)=\max_{x_1=t} g(x)=|\cos t|, t\in[0,\pi].$$

Таким образом $\rho(F(x))=|\cos x_1|$ и эта функция не дифференцируема в точках отрезка $x_1=\pi/2$.

Теорема 5. *Пусть C^2-гладкое отображение $F(x)$ таково, что отображение*

$$H(x)=(y,\tilde{x}), y=F(x),\ \tilde{x}=(x_{p+1},...,x_m)$$

является диффеоморфизмом области Ω на область $\Omega'=H(\Omega)$. Тогда функция

$$\rho(t)=\max_{x\in\Sigma(t)} g(x)$$

является локально δ-выпуклой.

Доказательство. Пусть $x=G(y,\tilde{x})$ отображение, обратное к $H(x)$. Тогда функция $h(y,\tilde{x})=g(G(y,\tilde{x}))$ является C^2-гладкой в области Ω'. При этом

$$\max_{y=z} h(y,\tilde{x})=\rho(z).$$

Тогда, применяя теорему 4 для функции $h(y,\tilde{x})$ и отображения $F'(y,\tilde{x})=y$, получаем, что функция $\rho(y)$ является локально δ-выпуклой в $\mathbb{R}^m$. То есть в окрестности U каждой точки найдется выпуклая функция $v(y,\tilde{x})$, такая, что функция $\rho(y)+v(y,\tilde{x})$ выпуклая. Тогда функция

$$\max_{(y,\tilde{x})\in U, y=z}\{\rho(y)+v(y,\tilde{x})\}=\rho(z)+\max_{(y,\tilde{x})\in U, y=z} v(y,\tilde{x})$$

также является выпуклой в $\mathbb{R}^p$. Отсюда получаем требуемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веденяпин А.Д.,Миклюков В.М. *Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей* // Мат. сб. 1986. Т. 131. С. 240–250.
2. Привалов М.В. *Некоторые свойства функции обхвата трубчатой гиперповерхности постоянной средней кривизны* // Тез. докл. VI научн. конф. ВолГУ. Волгоград, 1989. С. 64.
3. Ткачев В.Г. *Теорема о радиусе просвета минимальной поверхности* // Мат. заметки. Т. 59. 1996. № 6. С. 657–660.
4. V.G. Tkachev *External geometry of p-minimal surfaces* // Geometry from Pacific Rim, Eds.: Berrick/Loo/Wang. Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York. 1997. P. 363–375.
5. Лосева Н.В. *О некоторых свойствах седловых гиперповерхностей трубчатого типа* // Докл. РАН 1994. Т. 336. № 4. С. 444–445.
6. Клячин В.А., Миклюков В.М. *Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1991. Т. 55, № 1. С. 206–217.
7. Клячин В.А. *Оценка протяженности трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности* // Сиб. мат. ж. 1992. Т. 33, № 5. С. 201–206.
8. Миклюков В.М. *Геометрический анализ.* Волгоград, Изд-во ВолГУ, 2007. 532 с.

Владимир Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
пр-т Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `klchnv@mail.ru`