ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 4 (2017). С. 117-128.

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Ф.Г. ХУШТОВА

Аннотация. В работе исследуется первая краевая задача в полуполосе для дробно-дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля. Сформулированы теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Представление решения найдено в терминах интегрального преобразования с функцией Райта в ядре. Доказательство теоремы существования проводится на основе свойств указанного интегрального преобразования и модифицированной функции Бесселя первого рода. Единственность решения доказана в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия Тихонова. В случае когда рассматриваемое уравнение переходит в уравнение диффузии дробного порядка, показано, что полученное решение совпадает с известным решением первой краевой задачи для соответствующего уравнения. Также рассмотрен случай, когда начальная функция является степенной функцией пространственной координаты. Решение задачи в этом случае выписывается в терминах H-функции Фокса.

Ключевые слова: оператор Бесселя, частная производная Римана–Лиувилля, диффузия дробного порядка, функция Райта, интегральное преобразование с функцией Райта в ядре, модифицированная функция Бесселя первого рода, H-функция Фокса, условие Тихонова.

Mathematics Subject Classification: 35A22, 35R11, 35C15

1. Введение

Пусть D^{γ}_{ay} – оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля дробного порядка γ с началом в точке a и с концом в точке y, который определяется следующим образом [11, с. 9], [12, с. 28], [15, с. 14]:

$$D^{\gamma}_{ay}\, g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_a^y \frac{g(t)}{|y-t|^{\gamma+1}} dt, \quad \gamma < 0;$$

$$D^{\gamma}_{ay}\, g(y) = g(y), \quad \gamma = 0;$$

$$D^{\gamma}_{ay}\, g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a)\, \frac{d^n}{dy^n}\, D^{\gamma-n}_{ay}\, g(y), \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Здесь $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}\, u(x,y) \equiv B_x\, u(x,y) - D^{\alpha}_{0y}\, u(x,y) = 0, \tag{1}$$

F.G. Khushtova, Dirichlet boundary value problem in half-strip for fractional differential equation with Bessel operator and Riemann-Liouville partial derivative.

Поступила 16 сентября 2016 г.

где $B_x = x^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^b\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор Бесселя, $b = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$.

Уравнение вида (1), а именно уравнение

$$D_{0t}^{2/d_w}P(r,t) = \frac{1}{r^{d_s-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d_s-1}\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right),$$

где d_w и d_s характеризуют фрактальную размерность среды, $P(r,t)$ – плотность пространственного распределения частиц в момент времени t, было предложено в работе R. Metzler, W. G. Glöckle, T. F. Nonnenmacher [28] для описания процессов переноса в средах, имеющих фрактальную размерность.

При $\alpha = 1$ уравнение (1) обращается в уравнение

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x}u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0,$$

которое было названо И.А. Киприяновым B-параболическим уравнением [5]. При $b > -1$ последнее уравнение было объектом исследования работы [23], при $|b| < 1$, $x > 0$ оно рассматривалось в работе [17].

Исследованию уравнения (1) при $b = 0$, $0 < \alpha < 2$, а также его обобщениям, посвящено много работ. Приведем некоторые их них.

В работе [4] методом интегральных преобразований исследована задача Коши для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \lambda^2\Delta_x u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t > 0, \tag{2}$$

где $\Delta_x = \sum_{j=1}^m \partial^2/\partial x_j^2$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. При $0 < \alpha \leqslant 1$ и $1 < \alpha < 2$ решения выписаны в терминах H-функции Фокса. Решение задачи Коши для уравнения (2) при $\lambda = 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$ в терминах функции Райта выписано в работе [1]. Задача Коши для уравнения (2) в случае, когда вместо оператора Римана–Лиувилля стоит оператор Капуто, была исследована в работе [3].

Для уравнения (2) при $m = 1$ в работе [2] исследована первая краевая задача в первом квадранте.

В работе [16] построено фундаментальное решение и исследована задача Коши для многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна-Нерсесяна.

Исследованию задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка с производной Капуто и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных, посвящены работы [6], [7], [26].

Интерес к изучению уравнения (1) также вызван его приложениями при решении задач физики, астрономии и других прикладных наук [18], [29], [30].

2. Постановка задачи

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, u_x, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Задача 1 при $\varphi(x) \equiv 0$, $u(0,y) = \tau(y)$, $y^{1-\alpha}\tau(y) \in C[0,T]$, была исследована в работе [20]. Представление решения выписано в терминах H-функции Фокса [14, с. 528].

3. Вспомогательные сведения

Приведем здесь некоторые сведения из теории интегральных преобразований и теории специальных функций, которые понадобятся для дальнейшего изложения работы.

В работе А.В. Псху [15, с. 72] введено интегральное преобразование для функции $v(y)$, заданной на положительной полуоси

$$A^{\alpha,\mu} v(y) = y^{\mu-1} \int\limits_0^\infty v(t)\, \phi\left(-\alpha, \mu; -t\, y^{-\alpha}\right) dt, \quad 0<\alpha<1, \tag{5}$$

где $\phi\,(\rho, \mu; z)$ – функция Райта, определяемая рядом [24]

$$\phi\,(\rho, \mu; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(\,\rho\, n + \mu\,)}, \quad \rho > -1.$$

В случае когда $\mu = 0$, обозначается $A^{\alpha,0}\, v(x,y) = A^{\alpha}\, v(x,y)$. Если преобразование $A^{\alpha,\mu}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, то в случае необходимости с помощью нижнего индекса обозначается переменная, по которой проводится преобразование. Например, $A_y^{\alpha,\mu} v(x,y)$.

Интеграл (5) будет сходиться, если функция $v(y)$ интегрируема на любом конечном отрезке положительной полуоси и справедливы оценки

$$|v(y)| < c\, y^{\lambda}, \ y \to 0,$$

где $\lambda > -1$, если $\mu \neq 0$ и $\lambda > -2$, если $\mu = 0$, и

$$|v(y)| < c \exp\left(k\, y^{\varepsilon}\right), \ y \to \infty,$$

где $\varepsilon < 1/(1-\alpha)$, c и k – положительные постоянные.

Приведем некоторые свойства преобразования $A^{\alpha,\mu}$ [15, с. 78, с. 80, с. 83].

1°. *Пусть $v(y)$ непрерывна в точке $y=0$ и дифференцируема при $y>0$. Тогда*

$$D_{0y}^{\alpha}\, A^{\alpha,\mu}\, v(y) = A^{\alpha,\mu}\, v'(y) + \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\, v(0).$$

В частности, справедлива формула

$$D_{0y}^{\alpha}\, A^{\alpha}\, v(y) = A^{\alpha}\, v'(y). \tag{6}$$

2°. *Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$ и $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{-\mu/\alpha}\, v(y) = v_0 < \infty$. Тогда*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\, A^{\alpha,\mu}\, v(y) = v_0. \tag{7}$$

3°. *Если $u(y) \leqslant v(y)$ и $\mu \geqslant 0$, то*

$$A^{\alpha,\mu}\, u(y) \leqslant A^{\alpha,\mu}\, v(y). \tag{8}$$

Преобразование (5) для степенной функции и функции Райта вычисляются по формулам [15, с. 74, с. 84]

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1} = y^{\alpha\delta+\mu-1}\, \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha\delta+\mu)}, \quad \delta>0,\ \mu\neq 0; \quad \delta>-1,\ \delta\neq 0,\ \mu=0, \tag{9}$$

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1} \phi\,(\rho, \delta; -c\, y^{\rho}) = y^{\alpha\delta+\mu-1}\, \phi\,(\alpha\rho, \alpha\delta+\mu; -c\, y^{\alpha\rho}), \quad \delta > \rho. \tag{10}$$

В работе [22] доказана формула

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1}\, e^{-\frac{c^2}{4y}} = y^{\alpha\,\delta+\mu-1}\, H_{1,2}^{2,0}\left[\, \frac{c^2}{4\,y^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha\,\delta+\mu, \alpha) \\ (0,1), (\delta, 1) \end{matrix} \,\right], \tag{11}$$

где c – постоянная, $\delta \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$, $H^{m,n}_{p,q}(z)$ – H-функция Фокса [14, с. 528], [25, с. 1], [27, с. 2].

Для H-функции из (11) приведем здесь еще асимптотическую оценку при $z \to \infty$ [25, с. 18], [27, с. 20]

$$H^{2,0}_{1,2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\mu + \alpha\,\delta, \alpha) \\ (0, 1), (\delta, 1) \end{matrix} \right] = O\left(z^{\frac{\delta(1-\alpha)-\mu}{2-\alpha}} \exp\left[-(2-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\, z^{\frac{1}{2-\alpha}} \right] \right). \tag{12}$$

4. Основные результаты

Обозначим через

$$G(x,\xi,y) = A^{\alpha}_{y}\, g(x,\xi,y), \tag{13}$$

где

$$g(x,\xi,y) = \frac{x^{\beta}\xi^{\beta}}{2y}\, e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}\, I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right), \quad \beta = \frac{1-b}{2}, \tag{14}$$

$I_{\nu}(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν, определяемая рядом [8, с. 121], [9, с. 139]

$$I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

Оценим функцию $G(x,\xi,y)$. С помощью формул для функции $I_{\nu}(z)$ [8, с. 125], [9, с. 141]

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} I_{\nu}(z)\right] = z^{\nu} I_{\nu-1}(z), \tag{15}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} I_{\nu}(z)\right] = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \tag{16}$$

$$z\, I'_{\nu}(z) + \nu\, I_{\nu}(z) = z\, I_{\nu-1}(z), \tag{17}$$

а также её асимптотического поведения при малых положительных значениях z [9, с. 173]

$$I_{\nu}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu},$$

из (14) при $x\xi \leqslant 2y$ получим оценки

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n}\, g(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot x^{2\beta-n}\, \xi^{2\beta}\, y^{-\beta-1}, \ \beta \neq 1/2,$$

$$\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\, g(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot x\, \xi\, y^{-n-3/2}, \ \beta = 1/2,$$

$$\left| \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\, g(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \xi\, y^{-n-3/2}, \ \beta = 1/2,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y}\, g(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot x^{2\beta}\, \xi^{2\beta}\, y^{-\beta-2},$$

где $n = 0, 1, 2, ...$

Применяя к последним оценкам преобразование A^{α} по переменной y с помощью формулы (9), в силу свойств (6) и (8), приходим к оценкам:

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n}\, G(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot x^{2\beta-n}\, \xi^{2\beta}\, y^{-\alpha\beta-1}, \ \beta \neq 1/2, \tag{18}$$

$$\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\, G(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot x\, \xi\, y^{-\alpha(2n+1)/2-1}, \ \beta = 1/2,$$

$$\left| \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\, G(x,\xi,y) \right| \leqslant \mathrm{const} \cdot \xi\, y^{-\alpha(2n+1)/2-1}, \ \beta = 1/2,$$

$$\left|D_{0y}^{\alpha}G(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot x^{2\beta}\,\xi^{2\beta}\,y^{-\alpha\beta-\alpha-1}.$$

Далее, используя формулы (15)–(17), а также асимптотическую формулу [8, с. 147]

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[\,1 + O\left(z^{-1}\right)\right],\quad |\arg z| < \frac{\pi}{2},$$

которая справедлива при больших значениях z, из (14) при $x\xi > 2y$ получим оценки

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,g(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta+n-\frac{1}{2}}\,\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\,y^{-n-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right], \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\,g(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta+\frac{3}{2}}\,\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{5}{2}}\,\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right],$$

где $n = 0, 1, 2, ...$ Применяя теперь к последним оценкам преобразование A^{α} по переменной y с помощью формулы (11), затем воспользовавшись формулой (12), в силу свойств (6) и (8), находим оценки:

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,G(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot P_n(x,\xi,y)\,\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right], \tag{20}$$

$$\left|D_{0y}^{\alpha}G(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot P_2(x,\xi,y)\,\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right],$$

где $\alpha_0 = (2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$,

$$P_n(x,\xi,y) = x^{\beta+\frac{2n-1}{2}}\,\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\,|x-\xi|^{-\frac{(2n-1)(1-\alpha)}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha(2n-1)}{2(2-\alpha)}-1},\quad n = 0, 1, 2, ...$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $|b| < 1$, $\varphi(x) \in C[0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$ *и выполнено условие*

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\,\exp\left(-\,\rho\,x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0,\quad \rho < (2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,(\alpha/T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{21}$$

является решением задачи 1.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи 1 в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{x\to\infty}y^{1-\alpha}\,u(x,y)\,\exp\left(-\,k\,x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \tag{22}$$

при некотором положительном k, *причем сходимость в* (22) *является равномерной на множестве* $\{y \in (0;T)\}$.

5. Доказательство теоремы 1

Из оценок (18) и (20) при $n = 0$ следует существование интеграла в (21). Докажем, что функция $u(x,y)$, определяемая равенством (21), удовлетворяет уравнению (1). Возможность перестановок знаков производных и интегралов при дифференцировании по x и взятии дробной производной по y порядка α следует из полученных выше оценок для функции $G(x,\xi,y)$.

Продифференцируем равенство (21) по x, используя формулу (15) при $\nu = \beta$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,y) = \int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{23}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x}\,G(x,\xi,y)=A_y^{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x}\,g(x,\xi,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,g(x,\xi,y)=\left\{\frac{x^{\beta}\xi^{\beta+1}}{(2y)^2}I_{\beta-1}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\frac{x^{\beta+1}\xi^{\beta}}{(2y)^2}I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Умножим обе части (23) на $x^{1-2\beta}$ и продифференцируем полученное равенство по x, используя формулу (16) при $\nu=\beta-1$. Воспользуемся затем формулой (17) при $\nu=\beta$ и умножим полученное равенство на $x^{2\beta-1}$. В итоге получим

$$B_x\,u(x,y)=\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,B_x\,G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{24}$$

где

$$B_x\,G(x,\xi,y)=A_y^{\alpha}\,B_x\,g(x,\xi,y), \tag{25}$$

$$B_x\,g(x,\xi,y)=\left\{\frac{x^{\beta+2}\xi^{\beta}}{(2y)^3}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)+\frac{x^{\beta}\xi^{\beta+2}}{(2y)^3}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2\,x^{\beta}\xi^{\beta}}{(2y)^2}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\frac{2\,x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3}\,I_{\beta}'\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}\,e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Далее, из формулы (6) следует

$$D_{0y}^{\alpha}\,u(x,y)=\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,D_{0y}^{\alpha}\,G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{26}$$

где

$$D_{0y}^{\alpha}\,G(x,\xi,y)=A_y^{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial y}\,g(x,\xi,y), \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,g(x,\xi,y)=\left\{\frac{x^{\beta+2}\xi^{\beta}}{(2y)^3}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)+\frac{x^{\beta}\xi^{\beta+2}}{(2y)^3}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2\,x^{\beta}\xi^{\beta}}{(2y)^2}\,I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\frac{2\,x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3}\,I_{\beta}'\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}\,e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Подставляя (24) и (26) в уравнение (1), видим, что оно обращается в тождество.

Проверим теперь выполнимость условия (3). Из формулы (7) следует

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}\,u(x,y)=\lim_{y\to0}\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi+\varphi(x)\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,d\xi\right]=$$
$$=\lim_{y\to0}\left[\,J_1(x,y)+J_2(x,y)\,\right].$$

Разбивая промежуток интегрирования на части, представим $J_1(x,y)$ в виде суммы трех слагаемых

$$J_1(x,y)=\int\limits_0^{x-\varepsilon}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,[\,\varphi(\xi)-\varphi(x)\,]\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,[\,\varphi(\xi)-\varphi(x)\,]\,d\xi+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,g(x,\xi,y)\,[\,\varphi(\xi)-\varphi(x)\,]\,d\xi=$$

$$= J_{11}(x,y) + J_{12}(x,y) + J_{13}(x,y),$$

где ε – произвольное малое положительное число.

Согласно (19), из (14) при $y \to 0$ следует оценка

$$|\, g(x,\xi,y)\,| \leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta-1/2}\,\xi^{\beta-1/2}\,y^{-1/2}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}. \tag{28}$$

Отсюда получим, что $\lim\limits_{y\to 0} J_{11}(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} J_{13}(x,y) = 0$.

Обозначим через $\omega(\varepsilon) = \sup|\varphi(x) - \varphi(\xi)|$, где $\xi \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Функция $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда в силу (28) мы можем записать

$$|J_{12}(x,y)| \leqslant \omega(\varepsilon)\,\frac{x^{\beta-1/2}}{\sqrt{y}}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \xi^{\,1/2-\beta}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}\,d\xi.$$

Сделав в последнем интеграле замену $\xi = x + 2\sqrt{y}\,t$, получим

$$|J_{12}(x,y)| \leqslant \omega(\varepsilon)\,x^{\beta-1/2}\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}} (x + 2\sqrt{y}\,t)^{1/2-\beta}\,e^{-t^2}\,dt. \tag{29}$$

Применяя к интегралу в правой части (29) обобщенную теорему о среднем значении [19, с. 114] и используя затем оценку

$$\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}} e^{-t^2}\,dt < \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

находим $\lim\limits_{y\to 0} J_{12}(x,y) = \mathrm{const}\cdot\omega(\varepsilon)$. Отсюда, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ и произвольности выбора ε, получаем $\lim\limits_{y\to 0} J_{12}(x,y) = 0$.

Вычислим интеграл $J_2(x,y)$. Для этого воспользуемся формулой [13, с. 306]

$$\int\limits_0^\infty \xi^{\,\delta-1} e^{-p\,\xi^2} I_\beta\,(c\,\xi)\;d\xi = \frac{c^\beta p^{-\frac{\delta+\beta}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\delta+\beta}{2}\right)}{2^{1+\beta}\,\Gamma(\,1+\beta)}\;{}_1F_1\left(\frac{\delta+\beta}{2}; 1+\beta; \frac{c^2}{4p}\right), \tag{30}$$

где $\mathrm{Re}\,p$, $\mathrm{Re}\,(\delta+\beta) > 0$, $|\arg c| < \pi$, ${}_1F_1\,(a;b;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Придавая параметрам в этой формуле значения $\delta = 2-\beta$, $p = 1/(4y)$, $c = x/(2y)$, получим

$$J_2(x,y) = \frac{x^{2\beta}\,y^{-\beta}\,e^{-\frac{x^2}{4y}}\,\varphi(x)}{2^{2\beta}\,\Gamma(1+\beta)}\;{}_1F_1\left(1; 1+\beta; \frac{x^2}{4y}\right).$$

Тогда из асимптотической формулы при $z \to \infty$ [9, с. 322]

$${}_1F_1\,(a;b;z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\,e^z\,z^{-(b-a)}\left[1 + O(|z|^{-1})\right],\; a,b \neq 0,-1,-2,...,\; |\arg z| < \frac{\pi}{2},$$

следует $\lim\limits_{y\to 0} J_2(x,y) = \varphi(x)$. Таким образом, $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\,u(x,y) = \varphi(x)$.

Выполнимость однородного условия (4) следует из оценки (18) при $n = 0$ и условия $\beta > 0$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что решение задачи для неоднородного уравнения

$$\mathbf{L}\,u(x,y) = f(x,y)$$

с условиями

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = 0,\;\; 0 < x < \infty,$$

$$u(0,y)=\tau(y),\ \ 0<y<T,$$

в терминах функции (13) может быть записано в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^y \xi^{1-2\beta}\,G_\xi(x,\xi,y-\eta)\big|_{\xi=0}\tau(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y\int\limits_0^\infty \xi^{1-2\beta}\,G(x,\xi,y-\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где функции $\tau(y)$ и $f(x,y)$ такие, что $y^{1-\alpha}\tau(y)\in C[0,T]$, $y^{1-\alpha}f(x,y)\in(\bar\Omega)$, $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x и выполняются условия

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}\,\tau(y)=0,\ \ \lim_{x\to\infty}y^{1-\alpha}f(x,y)\,\exp\left(-\rho\,x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0,$$

$\rho<(2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,(\,\alpha\,/\,T\,)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$.

6. Представления решения в частных случаях

Получим из (21) представление решения задачи 1 для уравнения диффузии с оператором Римана–Лиувилля. Из (13) и (14) при $\beta=1/2$ ($b=0$) в силу известного представления [9, с. 143]

$$I_{\frac12}(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}}$$

имеем

$$G(x,\xi,y)=A_y^\alpha\,g(x,\xi,y),\quad g(x,\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4y}}\right].$$

Тогда, учитывая другое известное равенство [15, с. 88]

$$\sqrt{\pi}\,\phi\left(-\frac12,\frac12;-z\right)=e^{-\frac{z^2}{4}},$$

функцию $g(x,\xi,y)$ можно записать в виде

$$g(x,\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\phi\left(-\frac12,\frac12;-\frac{|x-\xi|}{\sqrt{y}}\right)-\phi\left(-\frac12,\frac12;-\frac{x+\xi}{\sqrt{y}}\right)\right].$$

Применяя к последнему равенству преобразование A^α по переменной y с помощью формулы (10), получим

$$u(x,y)=\int\limits_0^\infty G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{31}$$

где

$$G(x,\xi,y)=\frac{y^{\sigma-1}}{2}\left[\phi\left(-\sigma,\sigma;-\frac{|x-\xi|}{y^\sigma}\right)-\phi\left(-\sigma,\sigma;-\frac{x+\xi}{y^\sigma}\right)\right],\quad \sigma=\frac{\alpha}{2}.$$

Функция (31) совпадает с решением краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка, приведенным в [2].

В случае когда $\varphi(x)$ является степенной функцией координаты x, то есть $\varphi(x)=x^\nu$, где $\nu>0$, из (21) имеем

$$u(x,y)=\int\limits_0^\infty \xi^{1+\nu-2\beta}G(x,\xi,y)\,d\xi.$$

Подставляя в последний интеграл функцию $G(x,\xi,y)$ из (13), меняя затем порядок интегрирования, получим

$$u(x,y)=A_y^\alpha\,J_3(x,y),$$

где

$$J_3(x,y) = \frac{x^\beta}{2y}\, e^{-\frac{x^2}{4y}} \int\limits_0^\infty \xi^{1+\nu-\beta} e^{-\frac{\xi^2}{4y}} I_\beta\left(\frac{x\xi}{2y}\right) d\xi.$$

Интеграл в последнем равенстве вычислим по формуле (30). При $\delta = 2+\nu-\beta$, $p = 1/(4y)$ и $c = x/(2y)$ из нее находим

$$J_3(x,y) = \frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(1+\beta)}\, x^{2\beta}\,(4y)^{\nu/2-\beta}\, e^{-\frac{x^2}{4y}}\, {}_1F_1\left(1+\nu/2; 1+\beta; \frac{x^2}{4y}\right).$$

Найденное значение $J_3(x,y)$ подставим в интеграл (5) при $\mu = 0$, затем сделаем в нем замену $t = y^\alpha \tau$. В результате будем иметь

$$u(x,y) = \frac{2^\nu\,\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(1+\beta)}\, y^{\alpha\nu/2+\alpha-1} \int\limits_0^\infty \mathcal{K}_1\left(\frac{a}{\tau}\right) \mathcal{K}_2(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}, \quad a = \frac{x^2}{4y^\alpha}, \tag{32}$$

где

$$\mathcal{K}_1(\tau) = \tau^{\beta} e^{-\tau}\, {}_1F_1(1+\nu/2; 1+\beta; \tau), \quad \mathcal{K}_2(\tau) = \tau^{1+\nu/2}\,\phi(-\alpha, 0; -\tau).$$

Интеграл в (32) вычислим с помощью метода, изложенного в [10, с. 9]. Из строки 12.2(1) § 10 [10, с. 263] базовой таблицы найдем преобразование Меллина функции $e^{-\tau}\,{}_1F_1(1+\nu/2; 1+\beta; \tau)$:

$$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\nu/2)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\beta-\nu/2-s)}{\Gamma(1+\beta-s)}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < \beta-\nu/2, \quad \nu < 2\beta.$$

Тогда, в силу свойства 1.4 § 10 [10, с. 130], образом функции $\mathcal{K}_1(\tau)$ будет:

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\nu/2)} \frac{\Gamma(\beta+s)\Gamma(-\nu/2-s)}{\Gamma(1-s)}, \quad -\beta < \operatorname{Re} s < -\nu/2, \quad \nu < 2\beta.$$

Преобразование Меллина функции $\phi(-\alpha, 0; -\tau)$ можно найти из формулы (9), приведенной выше в настоящей работе. Положив в ней $\mu = 0$, $\delta = s$ и используя определение (5), в котором произведем замену $t = y^\alpha \tau$, получим

$$\int\limits_0^\infty \tau^{s-1}\,\phi(-\alpha, 0; -\tau)\,d\tau = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Тогда, в силу свойства 1.4 § 10 [10, с. 130], образ второй функции $\mathcal{K}_2(\tau)$ найдем, если в правой части заменим s на $1+\nu/2+s$, то есть

$$\mathcal{K}_2^*(s) = \frac{\Gamma(1+\nu/2+s)}{\Gamma(\alpha+\alpha\nu/2+\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > -1-\nu/2.$$

Перемножив образы $\mathcal{K}_i^*(s)$, $i = 1, 2$, имеем

$$\mathcal{K}^*(s) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\nu/2)} \frac{\Gamma(1+\nu/2+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-\nu/2-s)}{\Gamma(\alpha+\alpha\nu/2+\alpha s)\Gamma(1-s)},$$

где $-\min\{\beta, 1+\nu/2\} < \operatorname{Re} s < -\nu/2$, $\nu < 2\beta$.

Вычисляя теперь прообраз функции $\mathcal{K}^*(s)$, получим значение искомого интеграла в (32)

$$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\nu/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{i\infty}} \frac{\Gamma(1+\nu/2+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-\nu/2-s)}{\Gamma(\alpha+\alpha\nu/2+\alpha s)\Gamma(1-s)} \left(\frac{x^2}{4\,y^\alpha}\right)^{-s} ds =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\nu/2)} H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{x^2}{4y^\alpha}\,\middle|\, \begin{matrix} (1+\nu/2, 1), (\alpha+\alpha\nu/2, \alpha) \\ (1+\nu/2, 1), (\beta, 1), (0, 1) \end{matrix}\right],$$

где $L_{i\infty} = (\omega - i\infty, \omega + i\infty)$, $-\min\{\beta, 1+\nu/2\} < \omega < -\nu/2$, $\nu < 2\beta$.

Преобразуем правую часть последнего равенства с помощью формулы [14, с. 529], [25, с. 32]

$$z^h H^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{bmatrix}a_p, A_p\\ b_q, B_q\end{bmatrix}\right] = H^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{bmatrix}a_p + hA_p, A_p\\ b_q + hB_q, B_q\end{bmatrix}\right],$$

положив в ней $h = -\nu/2$, затем подставим полученное выражение в (32). В результате, обозначив через $\lambda = \Gamma(1+\nu/2)/\Gamma(\beta-\nu/2)$, приходим к функции

$$u(x,y) = \lambda\, x^\nu y^{\alpha-1} H^{2,1}_{2,3}\left[\frac{x^2}{4y^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1),(\alpha,\alpha)\\ (1,1),(\beta-\nu/2,1),(-\nu/2,1)\end{matrix}\right], \tag{33}$$

которая является решением задачи 1 в случае, когда $\varphi(x) = x^\nu$, $0<\nu<2\beta$.

При $\alpha = 1$ представление (33) с помощью формулы [25, с. 31], [27, с. 11]

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,A_1),...,(a_{p-1},A_{p-1}),(b_1,B_1)\\ (b_1,B_1),...,(b_q,B_q)\end{matrix}\right] =$$

$$= H^{m-1,n}_{p-1,q-1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,A_1),...,(a_{p-1},A_{p-1})\\ (b_2,B_2),...,(b_q,B_q)\end{matrix}\right],$$

можно записать в виде

$$u(x,y) = \lambda\, x^\nu H^{1,1}_{1,2}\left[\frac{x^2}{4y^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1)\\ (\beta-\nu/2,1),(-\nu/2,1)\end{matrix}\right].$$

7. Доказательство теоремы 2

Пусть $h_r(\xi)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

$$h_r(\xi) = \begin{cases}1, & 0\leqslant\xi\leqslant r,\\ 0, & \xi\geqslant r+1,\end{cases} \tag{34}$$

$0\leqslant h_r(\xi)\leqslant 1$, $|h'_r(\xi)| + |h''_r(\xi)| \leqslant H$, где H – постоянная, не зависящая от r.

Из (25) и (27) следует, что функция $G(x,\xi,y)$, как функция переменных x и y, удовлетворяет уравнению $\mathbf{L}\,G(x,\xi,y) = 0$, а функция $G(x,\xi,y-\eta)$, как функция переменных ξ и η, $0<\eta<y$, – сопряженному уравнению

$$\mathbf{L}^* G(x,\xi,y-\eta) \equiv B_\xi\, G(x,\xi,y-\eta) - D^\alpha_{y\eta}\, G(x,\xi,y-\eta) = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,\xi,y-\eta) = h_r(\xi)\, G(x,\xi,y-\eta).$$

Учитывая (35), получим

$$\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta) = 2\,h'_r(\xi)\, G_\xi(x,\xi,y-\eta) +$$

$$+\frac{b}{\xi}\,h'_r(\xi)\,G(x,\xi,y-\eta) + h''_r(\xi)\,G(x,\xi,y-\eta). \tag{36}$$

Докажем сначала, что, если $\varphi(x)\equiv 0$, то $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$ для достаточно малого δ. Согласно теореме об общем представлении решения уравнения (1) [21], регулярное в области $\Omega_r = \{(x,y) : 0<x<r,\ 0<y<\delta\}$ решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, представимо в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^{r+1}\int\limits_0^{y} \xi^{1-2\beta}\, u(\xi,\eta)\, \mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\, d\eta\, d\xi.$$

Из (34) и (36) следует, что $\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)=0$, если $0\leqslant\xi\leqslant r$, откуда

$$u(x,y)=\int\limits_r^{r+1}\int\limits_0^y \xi^{\,1-2\beta}\,u(\xi,\eta)\,\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Далее, в силу свойств функции $h_r(\xi)$ и оценок (20), из (36) получим

$$|\,\mathbf{L}^* v(x,\xi,y-\eta)\,|\leqslant \mathrm{const}\cdot P_1(x,\xi,y-\eta)\exp\Big[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\,\frac{2}{2-\alpha}}\,(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\Big].$$

Учитывая эту оценку, а также условие (22), находим

$$|u(x,y)|\leqslant \mathrm{const}\int\limits_r^{r+1}\int\limits_0^y P(x,\xi,y,\eta)\exp\Big[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}+k\,\xi^{\frac{2}{2-\alpha}}\Big]d\eta\,d\xi,$$

где $P(x,\xi,y,\eta)=\xi^{\,1-2\beta}\,\eta^{\alpha-1}\,P_1(x,\xi,y-\eta)$. При $\delta<(\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$ и $r\to\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что функция $u(x,y)\equiv 0$ в области $\Omega_1=\{(x,y):0<x<\infty,\ 0<y<\delta\}$.

Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ для любого $y>0$. Пусть $t=y-\delta$, $\delta\leqslant y<2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x,t)=u(x,\delta+t)$. Так как $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$, то

$$D^{\alpha}_{0y}\,u(x,y)=D^{\alpha}_{\delta y}\,u(x,y)=D^{\alpha}_{0t}\,w(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$B_x\,w(x,t)-D^{\alpha}_{0t}\,w(x,t)=0,\ \ 0<x<\infty,\ 0<t<\delta,$$

условиям (22) и

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0t} w(x,t)=0,\ \ 0<x<\infty,$$
$$w(0,t)=0,\ \ 0<t<\delta.$$

Тогда, согласно выше доказанному, $w(x,t)\equiv 0$ в области $\Omega_2=\{(x,t):0<x<\infty,\ 0<t<\delta\}$, то есть $u(x,y)\equiv 0$ в $\Omega_2=\{(x,y):0<x<\infty,\ \delta<y<2\delta\}$. Точно так же доказывается, что $u(x,y)\equiv 0$ в полосах $(n-1)\,\delta\leqslant y<n\,\delta$, $n=3,4,\ldots$ Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геккиева С.Х. *Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. **5**:1. 2000. С. 16–19.
2. Геккиева С.Х. *Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. **1**:8. 2002. С. 6–8.
3. Ворошилов А.А., Килбас А.А. *Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто* // Дифференц. уравнения. **42**:5. 2006. С. 599–609.
4. Ворошилов А.А., Килбас А.А. *Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля* // Доклады Академии наук. **406**:1. 2006. С. 12–16.
5. Киприянов И.А., Катрахов В.В., Ляпин В.М. *О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений* // Докл. АН СССР. **230**:6. 1976. С. 1271–1274.
6. Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференц. уравнения. **26**:4. 1990. С. 660–670.
7. Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д. *Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка* // Доклады Академии наук. **394**:2. 2004. С. 159–161.
8. Кузнецов Д.С. *Специальные функции.* Высшая школа, 1965. 424 с.
9. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит. 1963. 358 с.
10. Маричев О.И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул).* Наука и техника, Мн., 1978. 312 с.
11. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003. 272 с.

12. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* Т. 2, М.: Наука. 1983. 752 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* Т. 3. М.: Наука. 1986. 800 с.
15. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука. 2005. 199 с.
16. Псху А.В. *Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения* // Известия РАН. Сер. матем. **73**:2. 2009.С. 41–182.
17. Терсенов С.А. *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени.* М.: Наука, Сибирское отделение. 1985. 105 с.
18. Учайкин В.В. *Анизотропия космических лучей в дробно-дифференциальных моделях аномальной диффузии* // ЖЭТФ. **143**:6. 2013. С. 1039–1047.
19. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Том II, М.: Наука. 1969. 800 с.
20. Хуштова Ф.Г. *Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля* // Матем. заметки. **99**:6. 2016. С. 921–928.
21. Хуштова Ф.Г. *Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **19**:4. 2015. С. 722–735.
22. Хуштова Ф.Г. *Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля* // Известия вузов. Математика. 7. 2017. С. 84–93.
23. O. Arena *On a Singular Parabolic Equation Related to Axiallly Symmetric Heat Potentials* // Annali di Mat. Pura Appl. Ser. IV, 105. 1975. P. 347–393.
24. R. Gorenflo, Y. Luchko, F. Mainardi *Analytical properties and applications of the Wright function* // Fract. Calc. Appl. Anal. **2**:4. 1999. P. 383–414.
25. A.A. Kilbas, M. Saigo *H-Transform. Theory and Applications.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington, D.C., 2004. 389 pp.
26. A.N. Kochubei *Cauchy Problem for Fractional Diffusion-Wave Equations with Variable Coefficients* // Journal Applicable Analysis. **93**:19. 2014. P. 2211–2242.
27. A.M. Mathai, R.K. Saxena, H.J. Haubold *The H-Function. Theory and Applications.* Springer, New York Dordrecht Heidelberg London. 2010. 268 pp.
28. R. Metzler, W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher *Fractional model equation for anomalous diffusion* // Physica A. **211**. 1994. P. 13–24.
29. R. Metzler, J. Klafter *The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics* // Physica A: Math. Gen. **37**. 2004. R161–R208.
30. V.V. Uchaikin *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers.* Vol. I. HEP/Springer, Background and Theory, 2013, 385 pp.

Фатима Гидовна Хуштова,
Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89А,
360000, г. Нальчик, Россия
E-mail: khushtova@yandex.ru