

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПАВЛОВА-КОРЕВАРА-ДИКСОНА С МАЖОРАНТОЙ ИЗ КЛАССА СХОДИМОСТИ

Р.А. ГАЙСИН

*Посвящается столетию со дня рождения
члена-корреспондента АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева*

Аннотация. Изучается интерполяционная задача в классе целых функций экспоненциального типа, определяемом некоторой мажорантой из класса сходимости (неквазианалитической мажорантой). В более узком классе, когда мажоранта обладала свойством вогнутости, аналогичная задача ранее рассматривалась Б. Берндсоном, но с узлами в точках некоторой подпоследовательности натуральных чисел. Им был получен критерий разрешимости данной интерполяционной задачи. При этом он впервые применил метод Хёрмандера решения $\bar{\partial}$ -задачи. В работах А.И. Павлова, Я. Коревара и М. Диксона интерполяционные последовательности в смысле Б. Берндсона успешно применялись в ряде задач комплексного анализа. При этом была обнаружена некоторая связь с аппроксимативными свойствами систем степеней $\{z^{p_n}\}$ и с известными задачами Поля и Макинтайра.

В статье установлен критерий интерполяционности в более общем смысле для произвольной последовательности действительных чисел. При доказательстве основной теоремы применяется модифицированный метод Б. Берндсона.

Ключевые слова: интерполяционная последовательность, целая функция, класс сходимости.

Mathematics Subject Classification: 30E05

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть L — класс всех непрерывных на \mathbb{R}_+ функций $l = l(x)$, таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ \omega \in W : \frac{\omega(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \rightarrow \infty \right\}.$$

Множество W принято называть классом сходимости, а функции w из W — весами (неквазианалитическими весами).

R. A. GAISIN, PAVLOV-KOREVAAR-DIXON INTERPOLATION PROBLEM WITH MAJORANT IN CONVERGENCE CLASS.

© Гайсин Р.А. 2017.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-01-01661).

Поступила 14 сентября 2017 г.

Определение 1 ([1]). Пусть $\{p_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{p_n\}$ называется интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона, если найдется функция $\omega \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция f , обладающая свойствами:

$$1) f(p_n) = b_n \quad (n \geq 1), \quad 2) M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq e^{\omega(r)}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Последовательность Λ будем называть интерполяционной, если найдется функция $w \in W$, зависящая только от этой последовательности, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция f , обладающая свойствами 1) и 2), но с функцией w .

Условия, необходимые и достаточные для интерполяционности последовательности $\{p_n\}$ ($p_n \in \mathbb{N}$) в классе Ω были получены в работе [1]. Цель статьи — доказать критерий интерполяционности последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в классе функций W .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$$

— считающая функция последовательности Λ , а

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1 = 1$. Это несколько упростит выкладки в дальнейшем.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\tau_n = \min_{\substack{k \neq n \\ k \geq 1}} |\lambda_n - \lambda_k|$, $h_n = \min(\tau_n, 1)$,

$$K_n = \left\{ \xi : \frac{h_n}{4} \leq |\xi - \lambda_n| \leq \frac{h_n}{2} \right\} \quad (n \geq 1).$$

Тогда в кольцах K_n верны оценки:

$$1) \sup_{k \neq n} \left| \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \right| \leq \ln 2; \quad 2) \sup_k \left| \ln \left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right| \right| \leq \ln \frac{4}{3}.$$

Доказательство. Пусть $z \in K_n$. Имеем

$$\left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| = \left| 1 + \frac{\lambda_n - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \quad (k \neq n).$$

Так как $|\lambda_n - z| \leq \frac{h_n}{2}$ для $z \in K_n$, $|\lambda_k - \lambda_n| \geq h_n$ ($k \neq n$), то

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq \frac{3}{2}.$$

Значит,

$$-\ln 2 \leq \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq \ln \frac{3}{2}$$

и

$$\sup_{k \neq n} \left| \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \right| \leq \ln 2.$$

Аналогично проверим 2). Имеем

$$\left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right| = \left| 1 + \frac{z - \lambda_n}{\lambda_k + \lambda_n} \right|.$$

Поскольку

$$\left| \frac{z - \lambda_n}{\lambda_k + \lambda_n} \right| \leq \frac{h_n}{2(\lambda_k + \lambda_n)} \leq \frac{1}{4},$$

то

$$\frac{3}{4} \leq \left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right| \leq \frac{5}{4}.$$

Значит,

$$\sup_k \left| \ln \left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right| \right| \leq \ln \frac{4}{3}.$$

Лемма доказана. □

Имеет место

Лемма 2. Для всех z из K_n ($n \geq 1$)

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \right| \leq \ln 10 + |\ln h_n| + \ln \lambda_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| = \ln \left| 1 + \frac{z}{\lambda_n} \right| + \ln \left| \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n} \right|.$$

Так как $\operatorname{Re} z > 0$ для всех $z \in K_n$ ($n \geq 1$), а $\lambda_1 = 1$, то

$$0 < \ln \left| 1 + \frac{z}{\lambda_n} \right| \leq \ln \left(1 + \frac{\lambda_n + \frac{h_n}{2}}{\lambda_n} \right) \leq \ln \frac{5}{2}.$$

Далее,

$$\ln \frac{h_n}{4\lambda_n} \leq \ln \left| \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n} \right| \leq \ln \frac{h_n}{2\lambda_n} < 0.$$

Следовательно,

$$\left| \ln \left| \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n} \right| \right| \leq \left| \ln \frac{h_n}{4\lambda_n} \right| \leq |\ln h_n| + \ln 4\lambda_n \quad (n \geq 1).$$

Таким образом, для всех $z \in K_n$ ($n \geq 1$)

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \right| \leq \ln 10 + |\ln h_n| + \ln \lambda_n.$$

Требуемая оценка получена. □

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty.$$

Тогда

$$q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)$$

— целая функция экспоненциального типа.

Оценим функцию $\ln |q(z)|$ в кольцах K_n . Для любого фиксированного $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ln |q(z)| &= \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| + \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| + \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left| 1 + \frac{z}{\lambda_k} \right| + \\ &+ \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| > \lambda_n} \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right| = \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \end{aligned} \quad (1)$$

(в суммах Σ_i ($i = 1, 2, 3$) считаем, что $\lambda_k \neq \lambda_n$).

Оценим сумму Σ_1 . Для $\lambda_k \neq \lambda_n$ имеем:

$$\begin{aligned} \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| &= \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \right| = \ln \frac{1}{\lambda_k} + \ln |\lambda_k - z| = \\ &= \ln \frac{1}{\lambda_k} + \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| + \ln |\lambda_k - \lambda_n|. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее,

$$\sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^{2\lambda_n} \ln \frac{1}{t} dn_1(t) \quad (k \neq n), \quad (3)$$

где $n_1(t)$ — считающая функция последовательности $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \{\lambda_n\}$. Интегрируя по частям, из (3) получаем

$$\sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \frac{1}{\lambda_k} = N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n) \ln 2\lambda_n, \quad (4)$$

где

$$N_1(t) = \int_0^t \frac{n_1(x)}{x} dx.$$

Выясним теперь, чему равна сумма $\sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln |\lambda_k - \lambda_n|$ ($k \neq n$). Для этого заметим, что

$$\sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln |\lambda_k - \lambda_n| = \int_0^{\lambda_n} \ln t \, d\nu(\lambda_n; t) \quad (k \neq n), \quad (5)$$

где $\nu(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$. Интегрируя по частям интеграл Стильеса (5), последнее равенство запишем в виде

$$\sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln |\lambda_k - \lambda_n| = \nu(\lambda_n; \lambda_n) \ln \lambda_n - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt. \quad (6)$$

Учитывая соотношения (2), (4), (6), получаем, что

$$\Sigma_1 = N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n) \ln 2 - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt + M_n^-, \quad (7)$$

где

$$M_n^- = \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left| \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \quad (k \neq n).$$

Приступим к оценке Σ_2 . Поскольку

$$\ln \left| 1 + \frac{z}{\lambda_k} \right| = \ln \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right) + \ln \left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right|,$$

то

$$\Sigma_2 = \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right) + M_n^+, \quad (8)$$

где

$$M_n^+ = \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left| \frac{\lambda_k + z}{\lambda_k + \lambda_n} \right|.$$

Но

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right) &= \int_0^{2\lambda_n} \ln \left(1 + \frac{\lambda_n}{t} \right) dn_1(t) = n_1(2\lambda_n) \ln \frac{3}{2} + \\ &+ \lambda_n \int_0^{2\lambda_n} \frac{n_1(t)}{t(t + \lambda_n)} dt \leq n_1(2\lambda_n) \ln \frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, из (8), (9) получаем, что

$$|\Sigma_2| \leq n_1(2\lambda_n) \ln \frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n) + |M_n^+|.$$

Тогда, учитывая лемму 1, имеем:

$$|\Sigma_2| \leq n_1(2\lambda_n) \ln \frac{3}{2} + N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n) \ln \frac{4}{3},$$

то есть

$$|\Sigma_2| \leq n_1(2\lambda_n) \ln 2 + N_1(2\lambda_n). \quad (10)$$

Осталось оценить Σ_3 . Поскольку в этой сумме при $z \in K_n$

$$\frac{|z|}{t} \leq \frac{\lambda_n + \frac{h_n}{2}}{2\lambda_n} = \frac{1}{2} + \frac{h_n}{4\lambda_n} \leq \frac{3}{4},$$

то $1 - \frac{r^2}{t^2} > 0$, и

$$\Sigma_3 = \int_{2\lambda_n}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| dn(t) \geq \int_{2\lambda_n}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{r^2}{t^2} \right) dn(t),$$

где $r = |z|$, $n(t) = \sum_{\lambda_k \leq t} 1$. Отсюда получаем, что

$$\Sigma_3 \geq -n(2\lambda_n) \ln \left(1 - \frac{r^2}{4\lambda_n^2} \right) - 2r^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)} dt.$$

Отбрасывая первое выражение (в силу сказанного, оно положительно), имеем:

$$\Sigma_3 \geq -2r^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)} dt.$$

С другой стороны,

$$\Sigma_3 \leq \int_{2\lambda_n}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2} \right) dn(t).$$

Отсюда аналогично получаем (подстановка отрицательна)

$$\Sigma_3 \leq 2r^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt.$$

Поэтому в итоге

$$|\Sigma_3| \leq 2r^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)} dt. \quad (11)$$

Так как $r \leq \lambda_n + \frac{1}{2} \leq 2\lambda_n$, то

$$\frac{2r^2}{t^2 - r^2} \leq 4 \frac{2\lambda_n^2}{t^2 + \lambda_n^2} \frac{t^2 + \lambda_n^2}{t^2 - r^2}.$$

Поскольку $r \leq \lambda_n + \frac{1}{2} \leq \frac{t+1}{2}$, то $t^2 - r^2 \geq t(t - r) \geq \frac{t(t-1)}{2}$. Следовательно, учитывая неравенство $\lambda_n \leq \frac{t}{2}$, получаем

$$\frac{t^2 + \lambda_n^2}{t^2 - r^2} \leq \frac{5}{2} \frac{t}{t-1} \leq \frac{5}{2} \frac{2\lambda_n}{2\lambda_n - 1} \leq 5.$$

Таким образом, из (11) окончательно имеем:

$$|\Sigma_3| \leq 40\lambda_n^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 + \lambda_n^2)} dt \leq 20 \ln M_q(\lambda_n), \quad (12)$$

где $M_q(r) = \max_{|z|=r} |q(z)|$.

Учитывая (1), (7) запишем

$$\ln |q(z)| = \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt + N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n) \ln 2 + M_n^- + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad z \in K_n.$$

Следовательно, для $z \in K_n$

$$\left| \ln \frac{1}{|q(z)|} - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \right| \leq \left| \ln \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| \right| + N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n) \ln 2 + |M_n^-| + |\Sigma_2| + |\Sigma_3|.$$

Отсюда, учитывая леммы 1, 2, оценки (10), (12), окончательно получаем, что

$$\left| \ln \frac{1}{|q(z)|} - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \right| \leq \ln 10 + |\ln h_n| + \ln \lambda_n + 2N_1(2\lambda_n) + n_1(2\lambda_n) \ln 8 + 20 \ln M_q(\lambda_n).$$

Полученное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($1 = \lambda_1 < \lambda_n \uparrow \infty$) имеет конечную верхнюю плотность, $h_n = \min(\min_{k \neq n} |\lambda_k - \lambda_n|, 1)$,

$$q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right).$$

Тогда в кольцах

$$K_n = \left\{ \xi : \frac{h_n}{4} \leq |\xi - \lambda_n| \leq \frac{h_n}{2} \right\}$$

верна оценка

$$\left| \ln \frac{1}{|q(z)|} - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \right| \leq m(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$, $m(\lambda_n) = \ln 10 + \ln \lambda_n + |\ln h_n| + n(2\lambda_n) \ln 8 + 2N(2\lambda_n) + 20 \ln M_q(\lambda_n)$.

Следствие 1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, и для некоторой функции $w_1 \in W$

$$|\ln h_n| \leq w_1(\lambda_n) \quad (n \geq 1),$$

то для $z \in K_n$

$$\left| \ln \frac{1}{|q(z)|} - \int_0^r \frac{\nu(z; t)}{t} dt \right| \leq w_2(r),$$

где w_2 — какая-то функция из W .

Мы воспользовались хорошо известным фактом, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ равносильна сходимости интегралов [2], [3]:

$$\int_1^{\infty} \frac{n(r)}{r^2} dr, \quad \int_1^{\infty} \frac{N(r)}{r^2} dr, \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln M_q(r)}{r^2} dr.$$

Сделаем одно замечание. Так как

$$-\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} \leq \lambda_k \leq 2\lambda_n, \\ k \neq n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| = - \sum_{|\lambda_k - \lambda_n| \leq \lambda_n} \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| + \sum_{\lambda_k \leq \frac{\lambda_n}{2}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| = -\Sigma_1(\lambda_n) + A,$$

то для $\Sigma_1(\lambda_n)$ и A верны соотношения:

$$0 \leq A = \sum_{\lambda_k \leq \frac{\lambda_n}{2}} \ln \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} - 1 \right) \leq \sum_{\lambda_k \leq \frac{\lambda_n}{2}} \ln \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2} \right) \leq \ln M_q(\lambda_n),$$

$$\Sigma_1(\lambda_n) = - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt + N_1(2\lambda_n) - n_1(2\lambda_n) \ln 2.$$

Так что имеет место

Лемма 3. Верна оценка

$$\left| -\ln \prod_{\substack{k \neq n \\ \frac{\lambda_n}{2} \leq \lambda_k \leq 2\lambda_n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| - \int_0^{\lambda_n} \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t} dt \right| \leq n(2\lambda_n) + N(2\lambda_n) + \ln M_q(\lambda_n),$$

где $\nu(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leq t\}$.

В дальнейшем нам понадобится и следующая

Лемма 4. Пусть $w \in W$. Тогда функция $v(z) = w^*(|z|)$, где

$$w^*(r) = \int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2} \right) dw(t), \quad r = |z|,$$

субгармоническая в \mathbb{C} .

Доказательство. Заметим, что

$$v(z) \geq u(z) \equiv \int_1^\infty \ln \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| dw(t),$$

причем u — субгармоническая в \mathbb{C} функция (см., например, в [4]). Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и выберем w_0 на мнимой оси так, что $|w_0| = |z_0|$. Так как $z_0 = w_0 e^{-\alpha i}$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi+\alpha} v [e^{-\alpha i}(w_0 + \rho e^{i\psi})] d\psi,$$

$\psi = \varphi + \alpha$. Поскольку функция $f(\psi) = v [e^{-\alpha i}(w_0 + \rho e^{i\psi})]$ 2π -периодична, а $v(z) = v(|z|)$, то имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(w_0 + \rho e^{i\psi}) d\psi.$$

Далее, для любого $\rho > 0$ (u субгармонична в \mathbb{C})

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(w_0 + \rho e^{i\psi}) d\psi \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w_0 + \rho e^{i\psi}) d\psi \geq u(w_0) = v(z_0).$$

Отсюда и следует субгармоничность функции v . □

3. КРИТЕРИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ Λ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность Λ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in W$, такая, что*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \quad б) -\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1).$$

Отметим, что из леммы 3 и условий а), б) следует, что

$$\ln \frac{1}{h_n} \leq w_0(\lambda_n) \quad (n \geq 1),$$

где $h_n = \min \left(\min_{\substack{k \neq n \\ k \geq 1}} |\lambda_n - \lambda_k|, 1 \right)$, w_0 — некоторая функция из класса W .

Доказательство достаточной части теоремы 2 основано на одной теореме существования Хёрмандера для $\bar{\partial}$ -уравнений. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\varphi = \varphi(z)$ — функция, субгармоническая в \mathbb{C} , $g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует решение $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ уравнения $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = g$, удовлетворяющее условию*

$$\int_{\mathbb{C}} |u|^2 e^{-\varphi} (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda \leq \int_{\mathbb{C}} |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \quad (13)$$

при условии, что правая часть конечна (λ — мера Лебега).

Доказательство. Докажем сначала д о с т а т о ч н о с т ь теоремы 2. Для этого возьмем функцию $\psi \in C^\infty$, такую, что $\psi(z) = 1$ при $|z| < \frac{1}{4}$ и $\psi(z) = 0$ при $|z| > \frac{1}{2}$. Положим

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(z - \lambda_n), \quad \Psi_n(z) = \psi\left(\frac{z}{h_n}\right)$$

($\{b_n\}$ — любая заданная последовательность комплексных чисел, $|b_n| \leq 1$). Поскольку $A(z) = b_k \Psi_k(z - \lambda_k)$ для $z \in B_k = \{z : |z - \lambda_k| < \frac{h_k}{2}\}$, и $A(z) = 0$ для z из внешности объединения кружков B_n ($n \geq 1$), то, очевидно, $A \in C^\infty$. Далее, так как $|\lambda_k - \lambda_n| \geq h_n$ при $k \neq n$, то $A(\lambda_k) = b_k \psi(0) = b_k$ ($k \geq 1$).

Пусть

$$\varphi(z) = 2 \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right| + v(z),$$

где v — субгармоническая функция, которая будет выбрана позже. Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $\prod_n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$ — целая функция экспоненциального типа, и φ является субгармонической функцией.

Имеем:

$$M_\varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leq 2 \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) + M_v(r).$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dn(t). \quad (14)$$

Интегрируя по частям интеграл Стильеса (14) и учитывая, что $\frac{n(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем:

$$\int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dn(t) = 2r^2 \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt \equiv w_1(r).$$

Проверим, что $w_1 \in W$. Действительно, полагая $t = sr$, имеем:

$$w_1(r) = 2 \int_{1/r}^{\infty} \frac{n(sr)}{s(s^2 + 1)} ds,$$

откуда видно, что w_1 — возрастающая функция. Так как

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{w_1(r)}{r^2} dr = \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t} \left(\int_1^{\infty} \frac{dr}{t^2 + r^2} \right) dt \leq \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt < \infty,$$

то $w_1 \in W$.

Построим субгармоническую функцию v так, чтобы величина $M_v(r)$ (максимум модуля функции v) допускала оценку сверху через некоторую функцию из класса W , и при этом правая часть в (13) для $g = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$ была конечной.

Пусть

$$K_n = \left\{ \xi : \frac{h_n}{4} < |\xi - \lambda_n| < \frac{h_n}{2} \right\} \quad (n \geq 1).$$

Заметим, что кольца K_n ($n \geq 1$) попарно не пересекаются. Это следует из того, что

$$\frac{h_n}{2} + \frac{h_{n+1}}{2} \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (n \geq 1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 e^{-\varphi} d\lambda &= \int_{\cap_n \{ \xi: |\xi - \lambda_n| > \frac{h_n}{2} \}} \left| \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 e^{-\varphi} d\lambda + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} \left| \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 e^{-\varphi} d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{ \xi: |\xi - \lambda_n| < \frac{h_n}{4} \}} \left| \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 e^{-\varphi} d\lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

Первый и последний из интегралов справа в равенстве (15), очевидно, равны нулю. Далее, $A(\xi) = b_n \psi \left(\frac{\xi - \lambda_n}{h_n} \right)$ для $\xi \in K_n$. Считая, что $\psi = \psi(w, \bar{w})$, где $w = x + iy = \frac{\xi - \lambda_n}{h_n}$, получаем: $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}} \frac{1}{h_n}$. Отсюда имеем:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\xi}} \right| = \frac{1}{2h_n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{h_n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|, \quad \xi \in K_n.$$

Поскольку $|b_n| \leq 1$, то

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} T_n,$$

где

$$T_n = \frac{1}{h_n^2} \int_{K_n} e^{-v(\xi)} \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right|^{-2} d\lambda(\xi),$$

$$\text{а } C_1 = \max_{|x| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2.$$

Для каждого фиксированного n и $\xi \in K_n$

$$p(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| = \prod_{\lambda_k \leq \frac{\lambda_n}{2}} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2} \right|.$$

Так как $\operatorname{Re} \xi > 0$ для $\xi \in K_n$ ($n \geq 1$), то

$$\left| 1 + \frac{\xi}{\lambda_k} \right| \geq 1. \quad (16)$$

Далее, для $\lambda_k \leq \frac{\lambda_n}{2}$

$$\left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| \geq \frac{|\xi|^2}{\lambda_k^2} - 1 \geq 4 \left[1 - \frac{1}{2\lambda_n} \right]^2 - 1 \geq 1 \quad (17)$$

для $\lambda_n \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть при $n \geq n_0$. Учитывая оценки (16), (17), получаем, что для $\xi \in K_n$, $n \geq n_0$,

$$p(\xi) \geq \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n \\ k \neq n}} \left| 1 - \frac{\xi}{\lambda_k} \right| \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2} \right| \left| 1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2} \right|. \quad (18)$$

Применяя лемму 1, для $\xi \in K_n$ ($n \geq 1$) имеем:

$$\left| 1 - \frac{\xi}{\lambda_k} \right| = \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \frac{|\xi - \lambda_k|}{|\lambda_n - \lambda_k|} \geq \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right| \quad (k \neq n). \quad (19)$$

Оценим теперь величину $\left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right|$ для $\xi \in K_n$:

$$\left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geq \frac{h_n |\xi + \lambda_n|}{4 \lambda_n^2} \geq \frac{h_n}{4 \lambda_n}.$$

Но из условий а) и б) следует, что (см. выше)

$$\frac{1}{h_n} \leq e^{w_0(\lambda_n)} \quad (n \geq 1),$$

где w_0 — некоторая функция из класса W . Значит, для $\xi \in K_n$ ($n \geq 1$)

$$\left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_n^2}\right| \geq e^{-w_2(\lambda_n)}, \quad w_2 \in W. \quad (20)$$

Требуемая оценка через функцию из W для первого произведения в (18) легко следует из условий а) и б), если учесть (19). Осталось оценить произведение $\prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right|$. Имеем¹:

$$\begin{aligned} \ln \prod_{\lambda_k \geq 2\lambda_n} \left|1 - \frac{\xi^2}{\lambda_k^2}\right| &= \int_{2\lambda_n}^{\infty} \ln \left|1 - \frac{\xi^2}{t^2}\right| dn(t) \geq \\ &\geq -C_2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{t^2} dn(t) \geq -2C_2 \lambda_n^2 \int_{2\lambda_n}^{\infty} \frac{n(t)}{t^3} dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть

$$w_3(r) \equiv r^2 \int_{2r}^{\infty} \frac{n(t)}{t^3} dt = \int_2^{\infty} \frac{n(sr)}{s^3} ds.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{w_3(r)}{r^2} dr &= \int_1^{\infty} \frac{1}{r^2} \left(\int_2^{\infty} \frac{n(sr)}{s^3} ds \right) dr = \int_2^{\infty} \frac{1}{s^3} \left(\int_1^{\infty} \frac{n(sr)}{r^2} dr \right) ds = \\ &= \int_2^{\infty} \frac{1}{s^2} \left(\int_s^{\infty} \frac{n(x)}{x^2} dx \right) ds \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{n(x)}{x^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Так как $p(\xi) \geq \beta > 0$ на $\cup_{n \leq n_0} K_n$, то отсюда и оценок (18)–(21), условий а), б) теоремы окончательно получаем, что существует функция $w_4 \in W$, такая, что для всех $n \geq 1$

$$p(\xi) \geq e^{-w_4(\lambda_n)}, \quad \xi \in K_n. \quad (22)$$

Положим

$$w^*(r) = \int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dw_4^*(t) + (w_4^*(1) + 1) \ln(1 + r^2),$$

¹Поскольку $\frac{|\xi|^2}{t^2} \leq \left(\frac{\lambda_n + \frac{1}{2}}{2\lambda_n}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_1}\right)^2 < \frac{2}{3}$, то

$$\ln \left|1 - \frac{\xi^2}{t^2}\right| \geq \ln \left(1 - \frac{|\xi|^2}{t^2}\right) \geq -3 \frac{|\xi|^2}{t^2},$$

так как функция $\varphi(\alpha) = \ln(1 - \alpha) + 3\alpha$ возрастает при $\alpha < \frac{2}{3}$. Но $\frac{|\xi|}{\lambda_n} \leq \frac{3}{2}$ при $\xi \in K_n$ ($n \geq 1$), поэтому

$$\ln \left|1 - \frac{\xi^2}{t^2}\right| \geq -C_2 \frac{\lambda_n^2}{t^2}, \quad C_2 = \frac{27}{4}.$$

где $w_4^* = w_4 + w_0$. Тогда при некотором $C > 0$ $v(z) = Cw^*(|z|)$ — искомая функция. Действительно, по лемме 4, v является субгармонической в \mathbb{C} функцией, а величина $M_v(r) = Cw^*(r)$, как мы видели выше с функцией w_1 , представляет собой функцию из класса W .

Остается показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$. Учитывая оценку (22) и определение функции v , имеем:

$$T_n \leq \frac{1}{h_n^2} \int_{K_n} e^{-Cw^*(|\xi|)+2w_4(\lambda_n)} d\lambda(\xi) \leq C_3 \exp \left[2w_0(\lambda_n) + 2w_4(\lambda_n) - Cw^*(\lambda_n - \frac{1}{2}) \right],$$

$C_3 = \frac{3}{16}\pi$. Заметим, что

$$w^*(r) = 2r^2 \int_1^{\infty} \frac{w_4^*(t)}{t(t^2 + r^2)} dt + \ln(1 + r^2) \geq 2r^2 w_4^*(r) \int_r^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 + r^2)} \geq \frac{1}{2} w_4^*(r),$$

а также

$$\frac{w^*(\lambda_n)}{w^*(\lambda_n - \frac{1}{2})} \leq M \quad (n \geq 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{C}{M}w^*(\lambda_n)+2w_4^*(\lambda_n)} \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{C}{M}+4)w^*(\lambda_n)}.$$

Из определения функции $w^*(r)$ следует, что $w^*(r) \geq (w_4^*(1) + 1) \ln(1 + r^2)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \lambda_n^2)^{C_4}},$$

где $C_4 = (\frac{C}{M} - 4)(w_4^*(1) + 1)$, C — постоянная из определения функции v . Так как последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, то последний ряд сходится, если $2C_4 > 1$. Для этого достаточно взять $C > 5M$.

Как уже говорилось выше, $M_v(r) = Cw^*(r)$, $w^* \in W$. Значит,

$$M_\varphi(r) \leq w_5(r), \quad (23)$$

где $w_5 = 2w_1 + Cw^*$ — функция из класса W .

Мы собираемся применить теорему 3 для $g = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$. Поскольку функция φ выбрана так, что $e^{-\varphi}$ имеет неинтегрируемую особенность в каждой точке λ_n , должно быть $u(\lambda_n) = 0$ ($n \geq 1$).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}, \quad u(\lambda_n) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (24)$$

Положим $f = A - u$, где u — решение уравнения (24) (оно существует по теореме Хёрмандера). Ясно, что f — целая функция и $f(\lambda_n) = b_n$ ($n \geq 1$).

Так как $|f|^2$ — субгармоническая во всей плоскости, то для любого $\rho > 0$, в частности, при $1 \leq \rho \leq r$ [5, гл. I, п. 6]

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{|\xi-z| \leq \rho} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi) < \int_{|\xi| \leq 2r} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi), \quad r = |z|.$$

Поскольку $|f|^2 \leq 2(|A|^2 + |u|^2)$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{|z| \leq 2r} |f|^2 d\lambda &\leq 2 \int_{|z| \leq 2r} |A|^2 d\lambda + 2 \int_{|z| \leq 2r} |u|^2 d\lambda \leq \\ &\leq 8\pi r^2 + 2 \int_{|z| \leq 2r} |u|^2 \frac{e^{-\varphi}}{(1+|z|^2)^2} (1+|z|^2)^2 e^{\varphi} d\lambda. \end{aligned}$$

Применив к последнему интегралу оценку (13) из теоремы Хёрмандера, получим:

$$\int_{|z| \leq 2r} |f|^2 d\lambda \leq 8\pi r^2 + 2 \exp \{2 \ln(1+4r^2) + M_{\varphi}(2r)\} \int_{\mathbb{C}} |g|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Учитывая сходимость последнего интеграла и оценку (23), заключаем, что

$$|f(z)| \leq C_5 e^{w_6(|z|)},$$

где $w_6 \in W$. Последнее означает, что функция $f = A - u$ решает интерполяционную задачу.

Достаточность теоремы доказана.

Докажем необходимость. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — интерполяционная последовательность и \tilde{w} — функция из класса W , существование которой утверждается в определении 1. Сначала выберем целую функцию f , которая решает интерполяционную задачу для $b_1 = 1$ и $b_n = 0$ ($n > 1$). Из неравенства Йенсена, используя свойство 2) интерполяционной последовательности, получаем

$$n(r) \leq \ln M_f(er) \leq \tilde{w}(er).$$

Как уже говорилось в §1, сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{n(r)}{r^2} dr$$

равносильна условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

Для того чтобы доказать условие б), зафиксируем n и выберем такую целую функцию f , которая решает интерполяционную задачу для $b_n = 1$ и $b_k = 0$ ($k \neq n$).

Справедливо представление

$$f(z) = \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n, \\ k \neq n}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) G(z), \quad (25)$$

где G — целая функция (если ни одно из λ_k ($k \neq n$) не попало в интервал $(\frac{\lambda_n}{2}, 2\lambda_n)$, то считаем, что $G = f$). Для $\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n$ имеем:

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geq \left|1 - \frac{4\lambda_n}{\lambda_k}\right| \geq 1, \quad |z| = 4\lambda_n.$$

Отсюда следует, что $|G(z)| \leq |f(z)|$, $|z| = 4\lambda_n$. По принципу максимума модуля,

$$|G(\lambda_n)| \leq M_G(4\lambda_n) \leq M_f(4\lambda_n) \leq e^{\tilde{w}(4\lambda_n)}. \quad (26)$$

С другой стороны, из (25) следует, что

$$G(\lambda_n) = \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n, \\ n \neq k}} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{-1}, \quad (27)$$

поскольку $f(\lambda_n) = 1$. Из соотношений (26), (27) окончательно получаем:

$$-\ln \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2} < \lambda_k < 2\lambda_n, \\ k \neq n}} \left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right| \leq \tilde{w}(4\lambda_n),$$

где \tilde{w} — функция из класса W .

Теорема доказана полностью. \square

Автор выражает благодарность профессору А.М. Гайсину за указание на работу Б. Берндсона, а участникам семинара по теории функций — за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berndtsson В. *A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation* // Indag. Math. 1978. V. 40. № 4. P. 409–414.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976. 536 с.
3. Гайсин А.М. *Целые функции: основы классической теории с приложениями к исследованиям по комплексному анализу*. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. 160 с.
4. Кацнельсон В.Э. *Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением* // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10. № 4. С. 35–44.
5. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*. М.: Мир, 1984. 472 с.

Рашит Ахтярович Гайсин,
 Башкирский государственный университет,
 ул. Заки Валиди, 32,
 450077, г. Уфа, Россия
 E-mail: rashit.gajsin@mail.ru