ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 138-147.

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ ЛИНИИ ВНЕШНЕГО КАСАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ю.З. ШАЙГАРДАНОВ

Аннотация. В ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ рассматривается краевая задача

$$\varepsilon A u - \frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x), \quad u|_\Gamma = 0.$$

Здесь A – эллиптический оператор второго порядка, ε – малый параметр. Предельным при $\varepsilon = 0$ является уравнение первого порядка. Его характеристики – прямые, параллельные оси Ox_3. Относительно области $\overline{Q}$ предполагается, что характеристика либо пересекает Γ в двух точках либо касается Γ извне. Множество точек касания образует замкнутую гладкую кривую. В статье построена асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решения исследуемой задачи в окрестности этой кривой. Для построения асимптотики используется метод согласования асимптотических разложений.

Ключевые слова: малый параметр, асимптотика, эллиптическое уравнение.

Mathematics Subject Classification: 34E05, 35J25

Постановка задачи

В ограниченной односвязной области $Q \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ рассматривается краевая задача

$$\varepsilon A(x, D)u(x, \varepsilon) - D_3 u(x, \varepsilon) = f(x), \ \ x \in Q, \tag{0.1}$$

$$u = 0, \ \ x \in \Gamma. \tag{0.2}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $D = (D_1, D_2, D_3)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $A(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x) D^\alpha$ — эллиптический дифференциальный оператор (д.о.) с положительно определенной квадратичной формой

$$a_2(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq a_0|\xi|^2, \ \ a_0 > 0 - const,$$

α — мультииндекс.

Пусть данные задачи (0.1)—(0.2) являются гладкими (класса C^∞), тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует единственное решение $u(x, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{Q})$.

Предельным для (0.1) при $\varepsilon = 0$ является уравнение первого порядка

$$-D_3 u_0(x) = f(x). \tag{0.3}$$

Yu.Z. Shaygardanov, Asymptotics in a parameter of the solution to an elliptic boundary value problem in the vicinity of the outer touching of the characteristics to the limit equation.

© Шайгарданов Ю.З. 2017.

Поступила 9 июня 2017 г.

Его характеристики — прямые параллельные оси x_3. Относительно области $\overline{Q} = Q \cup \Gamma$ предположим, что характеристики уравнения (0.3) либо пересекают Γ в двух точках, либо касаются Γ извне с единичным порядком, а множество точек касания образует гладкую замкнутую кривую S_0. Далее будем предполагать, что кривая S_0 лежит в плоскости $x_3 = 0$. Этого можно добиться гладкой заменой переменных, которая не изменяет вид уравнения (0.1).

Кривая S_0 разбивает Γ на две части $\Gamma^{\pm}$ при $x_3 \gtrless 0$ соответственно. Предельной для (0.1)—(0.2) является задача

$$-D_3 u_0(x) = f(x), \;\; u_0|_{\Gamma^-} = 0. \tag{0.4}$$

Асимптотическое решение (АР) задачи (0.1)—(0.2) при $\varepsilon \to 0$ всюду в области Q, за исключением окрестности кривой S_0, находится методом Вишика-Люстерника [1]. В данной работе строится АР задачи (0.1)—(0.2) в окрестности S_0. Для построения АР используется метод согласования асимптотических разложений А.М.Ильина [2]. Двумерный случай для уравнений с постоянными коэффициентами рассмотрен в [3] (см. также [2]).

1. Оценка решения в подобласти

Пусть $d(x_1, x_2)$ — расстояние по внутренней нормали к S_0. Через S_{d_0} обозначим кривую на плоскости $x_3 = 0$, удаленную от S_0 на расстояние $d(x, y) = d_0$, где d_0 выбрано так, чтобы нормали не пересекались. Характеристики уравнения (0.3), проходящие через S_{d_0}, отсекают от Q область Q_0, ограниченную этими характеристиками X_{d_0} и Γ_{d_0} — частью Γ, содержащей S_0. Пусть Q_δ — подобласть $Q_0 : \;\; Q_\delta = \{x \in Q_0 : \;\; 0 < d(x, y) < d_0 - \delta\}$, где $0 < \delta < d_0$. Через $H^p(G)$, где G — область в $\mathbb{R}^3$, обозначим пространство Соболева ($p \geq 0$ — целое) с нормой

$$\|u\|^2_{p,G} = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \int |D^\alpha u|^2 \, dx.$$

Теорема 1. *Пусть Q_0 и Q_δ — области, определенные выше, тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta \geq C\varepsilon^\gamma$, где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от ε, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, для решения задачи (0.1)—(0.2) имеет место оценка*

$$\varepsilon \|u\|^2_{1,Q_\delta} + \|u\|^2_{0,Q_\delta} \leqslant C_1 \left[\|f\|^2_{0,Q_0} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\gamma} (\varepsilon \|u\|^2_{1,Q_0} + \|u\|^2_{0,Q_0}) \right] \tag{1.1}$$

с постоянной C_1, не зависящей от ε.

Доказательство.

Пусть $\psi_\delta(x_1, x_2)$ — гладкая срезающая функция

$$\psi_\delta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant d(x_1, x_2) \leqslant \delta_0 - \delta, \\ 0, & d(x_1, x_2) \geq \delta_0, \end{cases}$$

для которой справедливы оценки

$$\|D_1^k D_2^m \psi_\delta\| \leqslant C_{k,m} \delta^{-(k+m)}, \;\; k, m = 0, 1, 2,$$

с постоянными $C_{k,m}$, не зависящими от δ.

Рассмотрим выражение $u_\delta(x) = e^{-\lambda x_3} v_\delta(x)$, где

$$u_\delta(x) = u(x)\psi_\delta(x_1, x_2), \;\; v_\delta(x) = v(x)\psi_\delta(x_1, x_2).$$

В силу уравнения (0.1)

$$\varepsilon A v_\delta - D_3 v_\delta - \lambda v_\delta = e^{\lambda x_3} f \psi_\delta - \varepsilon A' v, \tag{1.2}$$

где $A'v = e^{\lambda x_3}[A, e^{-\lambda x_3}\psi_\delta] v(x)$, $[\,\cdot\,, \cdot\,]$ — коммутатор.

Умножая (1.2) на $-(v_\delta(x))$ и интегрируя по области Q_0, получим

$$-\varepsilon \langle A v_\delta, v_\delta \rangle + \langle D_3 v_\delta, v_\delta \rangle + \lambda \|v_\delta\|^2_{0,Q_0} \leqslant |\langle e^{\lambda x_3} f \psi_\delta, v_\delta \rangle| + \varepsilon |\langle A' v, v_\delta \rangle|, \tag{1.3}$$

$$\langle u,v\rangle = \int\limits_{Q_0} uv\,dx.$$

Интегрируя по частям в левой части неравенства (1.3) и учитывая, что $v_\delta = 0$ на $\partial Q_0 = X_{d_0}\cup\Gamma_{d_0}$, а также эллиптичность оператора A, получим

$$-\varepsilon\langle Av_\delta, v_\delta\rangle + \langle D_3 v_\delta, v_\delta\rangle + \lambda\|v_\delta\|^2 \geq \varepsilon\alpha_0\|v_\delta\|^2_{1,Q_0} + \left(\lambda - \frac{1}{2} - C_2\varepsilon\right)\|v_\delta\|^2_{0,Q_0}.$$

Здесь и в дальнейшем C_j, $j = 1,2,3...,$ — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Оценка правой части (1.3) дает

$$|\langle e^{\lambda x_3} f\psi_\delta, v_\delta\rangle| + \varepsilon|\langle A'v, v_\delta\rangle| \leqslant C_3\left(\frac{1}{2}\|f\|^2_{0,Q_0} + \frac{1}{2}\|v_\delta\|^2_{0,Q_0}\right) +$$

$$+C_4\varepsilon\left[\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\delta}\|v\|^2_{1,Q_0} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac12}\delta}\|v\|^2_{0,Q_0}\right] \leqslant \frac{C_3}{2}\|f\|^2_{0,Q_0} + \frac{C_3}{2}\|v_\delta\|^2_{0,Q_0} +$$

$$+C_5\varepsilon^{\frac12-\gamma}\left[\varepsilon\|v\|^2_{1,Q_0} + \|v\|^2_{0,Q_0}\right].$$

Из полученных оценок правой и левой части неравенства (1.3) следует, что

$$\varepsilon\alpha_0\|v_\delta\|^2_{1,Q_0} + \left(\lambda - \frac{1}{2} - C_2\varepsilon - \frac{C_3}{2}\right)\|v_\delta\|^2_{0,Q_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{2}\|f\|^2_{0,Q_0} + C_5\varepsilon^{\frac12-\gamma}\left(\varepsilon\|v\|^2_{1,Q_0} + \|v\|^2_{0,Q_0}\right).$$

Выбирая $\lambda > \alpha_0 + \frac12 + C_1\varepsilon + \frac{C_3}{2}$ и учитывая,что $\|v_\delta\|^2_{0,Q_0} \geq \|v\|^2_{0,Q_\delta}$, $\|v_\delta\|^2_{1,Q_0} \geq \|v\|^2_{0,Q_\delta}$, а норма $\|v\|^2_{1,Q_\delta}$ эквивалентна $\|u\|^2_{0,Q_\delta}$, приходим к неравенству (1.1).

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если* $\|f\|^2_{0,Q_0} = O(\varepsilon^k)$ *и* $\varepsilon\|u\|^2_{1,Q_0} + \|u\|^2_{0,Q_0} = O(\varepsilon^m)$, *где* $m < k$, *то в условиях теоремы 1*

$$\varepsilon\|u\|^2_{1,Q_\delta} + \|u\|^2_{0,Q_\delta} = O(\varepsilon^k).$$

Доказательство.

Действительно, последовательно применяя неравенство (1.1) к областям вида $Q_{\frac{\delta}{2^n}}$, $n = 1,2,...,$ через конечное число шагов получим требуемую оценку.

Следствие доказано.

Теорема 1 показывает, что построение АР можно локализовать.

2. Внешнее разложение

Из предположения о порядке касания характеристик кривой S_0 следует, что уравнение Γ_{d_0} можно привести к виду

$$d(x_1,x_2) = x_3^2.$$

Исходя из этого предположения в области Q_0, введем переменные, выпрямляющие Γ_{d_0}:

$$z_1 = d(x_1,x_2) - x_3^2,\ \ z_2 = x_3,\ \ z_3 = s(x_1,x_2), \tag{2.1}$$

где $s(x_1,x_2)$ — координата на S_0, $o \leqslant s \leqslant s_1$.

Отображение $\varkappa:\ \ x \to z$ является диффеоморфизмом, при этом

$$Q_0 \to \omega(0,d_0) = \{z:\ \ 0 < z_1 + z_2^2 < d_0,\ \ |z_2| < \sqrt{d_0},\ \ 0 \leqslant z_3 \leqslant s_1\},$$

$$\Gamma_{d_0} \to \gamma_0 = \{z:\ \ z_1 = 0,\ \ |z_2| \leqslant \sqrt{d_0},\ \ 0 \leqslant z_3 \leqslant s_1\},$$

$$\gamma_0^\pm = \{z \in \gamma_0,\ \ z_2 \gtrless 0\}.$$

Если положить $u\circ\varkappa^{-1}=v(z,\varepsilon)$, $(A_\varepsilon u)\circ\varkappa^{-1}=B_\varepsilon v$, то задача (0.1)—(0.2) запишется в виде

$$B_\varepsilon v=\varepsilon B(z,D)v(z,\varepsilon)+B_0(z,D)v(z,\varepsilon)=g(z),\quad z\in\omega(0,d_0), \tag{2.2}$$

$$v|_{\gamma_0}=v(0,z_2,z_3)=0, \tag{2.3}$$

где $z=(z_1,z_2,z_3)$, $D=(D_1,D_2,D_3)$, $D_j=\frac{\partial}{\partial z_j}$, $B(z,D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2}b_\alpha(z)D^\alpha$ — эллиптический д.о., $B_0(z,D)=2z_2D_1-D_2$.

Формальное асимптотическое решение (ФАР) задачи (2.2)—(2.3) ищется в виде

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(z). \tag{2.4}$$

Относительно $v_k(z)$ получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{cases}B_0v_0=(2z_2D_1-D_2)v_0(z)=g(z),\quad v_0|_{\gamma_0}=0,\\ B_0v_k=-Bv_{k-1},\quad v_k|_{\gamma_0^-}=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

Решения этой системы выписываются в явном виде

$$\begin{cases}v_0(z)=\int\limits_{-\sqrt{z_1+z_2^2}}^{z_2}g_0(z_1+z_2^2-t^2,t,z_3)\,dt,\\ v_k(z)=-\int\limits_{\sqrt{z_1+z_2^2}}^{z_2}Bv_{k-1}\,dt,\quad k=1,2,\dots .\end{cases} \tag{2.6}$$

Из (2.6) видно, что $v_0(z)$ непрерывна при $z\in\overline{\omega}(0,d_0)$, но ее производные по z_1,z_2 будут иметь особенности при $r=\sqrt{z_1+z_2^2}\to 0$. Исследуем асимптотику $v_k(z)$ при $r=\sqrt{z_1+z_2^2}\to 0$.

Лемма 2.1. *Функции $v_k(z)$, $k=0,1,2,...$, представимы в виде*

$$v_k(z)=r^{1-3k}\varphi_k(r,\theta,z_3), \tag{2.7}$$

где $r=\sqrt{z_1+z_2^2}$, $\theta=\frac{z_2}{r}$, $\Pi_{d_0}=[0,\sqrt{d_0}]\times[-1,0)\times(0,1)\times[0,s_1]$, $\varphi_k(r,\theta,z_3)\in C^\infty(\Pi_{d_0})$ и при $r\to 0$ имеют асимптотику

$$v_k(z)\sim r^{1-3k}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{k,m}(\theta,z_3)r^m, \tag{2.8}$$

где $\varphi_{k,m}(\theta,z_3)\in C^\infty(I_0\times[0,s_1])$, $I_0=[-1,1]\setminus\{0\}$.

Доказательство.

По индукции при $k=0$

$$v_0(z)=-\int\limits_{-r}^{z_2}g(r^2-t^2,t,z_3)\,dt=-r\int\limits_{-1}^{\theta}g(r^2(1-\xi^2),r\xi,z_3)\,d\xi=r\varphi_0(r,\theta,z_3),$$

где $\varphi_0=-\int\limits_{-1}^{\theta}g(r^2(1-\xi^2),r\xi,z_3)\,d\xi\in C^\infty(\Pi_{d_0})$.

Посредством V_p, $p<0$ — целое, обозначим класс функций $\tilde v_p(z)$, представимых в виде $\tilde v_p(z)=r^p\varphi_p(r,\theta,z_3)$, где $\varphi_p(r,\theta,z_3)\in C^\infty(\Pi_{d_0})$. Функции из V_p обладают следующими свойствами:

1° $\tilde v_p(z)\in V_p\to D_1\tilde v_p\in V_{p-2},\ \ D_2\tilde v_p\in V_{p-2},\ \ D_3\tilde v_p\in V_p$;

2° $V_{p'}\subset V_p$, при $p'>p$.

Пусть $v_m(z) \in V_{1-3m}$, при $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Докажем, что $v_k(z) \in V_{1-3k}$.

$$v_k(z) = \int\limits_{r}^{z_2} Bv_{k-1}\,dt = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int\limits_{-r}^{z_2} b_\alpha(r^2-t^2,t,z_3)D^\alpha v_{k-1}\,dt =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int\limits_{-r}^{z_3} b_\alpha(r^2-t^2,t,z_3) r^{-3k}\tilde\varphi_{k-1}\left(r,\frac{t}{r},z_3\right)\,dt = r^{1-3k}\varphi_k(r,\theta,z_3),$$

$$\varphi_k = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int\limits_{-1}^{\theta} b_\alpha(r^2(1-\xi^2),r\xi,z_3)\tilde\varphi_{k-1}(r,t,z_3)\,d\xi \in C^\infty(\Pi_{d_0}).$$

Асимптотика (2.8) получается из (2.7) при разложении $\varphi_k(r,\theta,z_1)$ в ряд Тейлора при $r=0$.

Лемма 2.1 доказана.

Следствие. *Функции $v_k(z)$ на γ_0^+ принимают значения*

$$v_k(z)|_{\gamma_0^+} = v_k(0,z_2,z_3) = z_2^{1-3k}\varphi_k^+(z_2,z_3), \quad z_2>0, \tag{2.9}$$

где $\varphi_k^+(z_2,z_3)$ — гладкие функции, и при $z_2 \to +0$ $v_k(z)|_{\gamma_0^+}$ разлагаются в асимптотические ряды

$$v_k(z)|_{\gamma_0^+} \sim z_2^{1-3k}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{k,m}^+(z_3)z_2^m. \tag{2.10}$$

Невязки на γ^+ устраняются с помощью регулярного пограничного слоя в виде ФАР

$$\hat Y(t,z_2,z_3,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,z_2,z_3), \tag{2.11}$$

где $t=\varepsilon^{-1}z_1$, $y_k(t,z_2,z_3)\to 0$ при $t\to\infty$.

Чтобы выписать уравнения для нахождения $y_k(t,z_2,z_3)$, необходимо расщепить оператор B_ε по степеням ε. Представляя B_ε в виде

$$B_\varepsilon = \varepsilon^{-1}[b_{2,0,0}(\varepsilon t,z')D_t^2 + 2z_3D_2] + (q_1(\varepsilon t,z',D') - D_2) + \varepsilon q_2(\varepsilon t,z',D'),$$

где $z'=(z_2,z_3)$, $D'=(D_2,D_3)$, $q_1(\varepsilon t,z',D')$ — оператор первого порядка, $q_2(\varepsilon t,z',D')$ — д.о. второго порядка.

Разлагая коэффициенты B_ε в ряд Тейлора при $\varepsilon=0$, получим

$$B_\varepsilon = \varepsilon^{-1}M_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k M_{k+1}, \tag{2.12}$$

где

$$M_0 = b_{2,0,0}(0,z')D_t^2 + 2z_2D_t, \quad M_1 = q_1(0,z',D')D_t - D_2,$$
$$M_k = t^k b_{2,0,0}(0,z')D_t^2 + t^{k-1}q_1^{(k-1)}(0,z',D')D_t + t^{k-2}q_2(0,z',D').$$

Используя (2.11), (2.12) для $y_k(t,z')$, получим систему о.д.у. по переменной t:

$$\begin{cases} M_0y_0 = \left(\frac{1}{\lambda}D_t^2 + 2z_2D_t\right)y_0 = 0,\ y_0(0,z') = -v_0(0,z'),\ z_3>0,\ y_0\to 0,\ t\to+\infty,\\ M_0y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} M_jy_{k-j},\ y_k(0,z') = -v_0(0,z'),\ z_2>0,\ y_k\to 0,\ t\to+\infty, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $\frac{1}{\lambda} = b_{2,0,0}(0,z') > 0$.

Решения этой системы выписываются в явном виде

$$\begin{cases} y_0(t,z') = -v_0(0,z')e^{-2\lambda z_2 t},\\ y_k(t,z') = e^{-2\lambda z_2 t}P_{2k}(t,z'), \end{cases} \tag{2.14}$$

где $P_{2k}(t,z')$ — полиномы по t степени $2k$.

Выясним поведение $y_k(t,z_2,z_3)$ при $z_2\to 0$.

Лемма 2.2. *Функции $y_k(t,z_2,z_3)$ представимы в виде*

$$y_k(t,z_2,z_3)=z_2^{1-3k}e^{-\lambda\sigma}P_{2k}(\sigma,z_2,z_3), \tag{2.15}$$

где $\sigma=2z_2t$, $P_{2k}(\sigma,z_2,z_3)$ — полиномы по σ порядка $2k$, коэффициенты которых — гладкие функции от (z_2,z_3). При $z_2\to+0$ $y_k(t,z_2,z_3)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$y_k(t,z_2,z_3)\sim z_2^{1-3k}e^{-\lambda_0\sigma}\sum_{m=0}^{\infty}P_{2k+m}(\sigma,z_3)z_2^m, \tag{2.16}$$

где $\lambda_0=\frac{1}{b_{2,0,0}(0,0,z_3)}$, $P_{2k+m}(\sigma,z_3)$ — полиномы по σ порядка $2k+m$ с гладкими коэффициентами от $z_3\in[0,s_1]$.

Доказательство.

По индукции, при $k=0$

$$y_0(t,z')=-e^{-2\lambda z_3 t}v_0(0,z_2,z_3)=z_3e^{-\lambda\sigma}Q_0(z_2,z_3),\ \ z_3>0,$$

где $Q_0(z_2,z_3)=-\varphi_0^+(z_2,z_3)$ по следствию из леммы 2.1. Далее, через $Y_{p,m}$ обозначим класс функций вида

$$y_{p,m}(t,z_2,z_3)=z_3^{1-p}e^{-\lambda\sigma}P_m(\sigma,z_2,z_3),$$

где $p>1$ — целое, $P_m(\sigma,z_2,z_3)$ — полиномы порядка m, коэффициенты которых — гладкие функции от (z_2,z_3). Имеют место следующие свойства $Y_{p,m}$:

1° $Y_{p',m'}\subset Y_{p,m}$ при $p'>p$, $m'\leqslant m$,

2° если $y_{p,m}(t,z_2,z_3)\in Y_{p,m}$, то $D_ty_{p,m}\in Y_{p+1,m}$, $D_2y_{p,m}\in Y_{p,m+1}$, $D_3y_{p,m}\in Y_{p-1,m+1}$, $t^jy_{p,m}\in Y_{p-j,m+j}$.

Предполагая, что $y_j(t,z')\in Y_{1-3j,2j}$ при $1\leqslant j\leqslant k-1$, покажем, что $y_k(t,z')\in Y_{1-3k,2k}$. Положим $y_j(t,z')=\tilde y_j(\sigma,z')$, $0\leqslant j\leqslant k$, тогда уравнение для $\tilde y_k(\sigma,z')$ принимает вид

$$\left(\frac{1}{\lambda}D_\sigma^2+D_\sigma\right)\tilde y_k=-z_2^{-2}\sum_{j=1}^{k}M_j\tilde y_{k-j},\ \ \tilde y_k(0,z')=-z_2^{1-3k}\tilde\varphi_k(z'),$$

$$\tilde y_k(\sigma,z')\to 0,\ \ \sigma\to+\infty.$$

Используя предположения индукции, свойства $Y_{1-3j,2j}$, $0\leqslant j\leqslant k-1$, и вид оператора M_j (2.12), нетрудно показать, что $z_2^{-2}\sum\limits_{j=1}^{k}M_j\tilde y_{k-j}\in Y_{1-3k,2k-1}$, откуда следует, что решение задачи для $\tilde y_k$ имеет вид: $\tilde y_k=z_2^{1-3k}P_{2k}(\sigma,z')e^{-\lambda\sigma}$ и, тем самым, (2.15) доказана. Представляя y_k в виде

$$y_k=z_2^{1-3k}e^{-\lambda_0\sigma}[e^{(\lambda_0-\lambda)\sigma}P_k(\sigma,z_2,z_3)]$$

и разлагая выражение в квадратных скобках в ряд Тейлора при $z_2=0$, получим (2.16).

Лемма 2.2 доказана.

Рассмотрим n-частичные суммы рядов (2.4) и (2.11)

$$V_n(z,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}v_k(z)\varepsilon^k,\ \ Y_n(t,z_2,z_3,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}y_k(t,z_2,z_3)\varepsilon^k$$

и положим

$$U_n(z,\varepsilon)=V_n(z,\varepsilon)+Y_n(t,z_2,z_3,\varepsilon)\chi\left(\frac{z_2}{\varepsilon^{1/3}}\right), \tag{2.17}$$

где

$$\chi(t)=\begin{cases}1, & t\geq 2\\ 0, & t\leqslant 1\end{cases}$$

— гладкая срезающая функция.

Лемма 2.3. *Функция* $U_n(z,\varepsilon)$ *является ФАР задачи (2.2), (2.3) в области* $\overline{\omega}(\varepsilon^\beta, d_0) = \{z: \ \varepsilon^\beta \leqslant r \leqslant d_0, \ 0 \leqslant z_3 \leqslant s_1\}$, *где* $0 < \beta < \frac{1}{3}$, *с точностью* $O(\varepsilon^{(1-3\beta)n})$.

Доказательство.

В силу (2.5) и (2.13) в области $\overline{\omega}(\varepsilon^\beta, d_0)$

$$B_\varepsilon U_n = g(z) + R_n^\beta(z,\varepsilon), \ \ U_n(0,z_2,z_3,\varepsilon) = 0, \ \ |z_2| \geq \varepsilon^\beta,$$

где $R_n(z,\varepsilon) = \varepsilon^{n+1} B v_n + \varepsilon^n \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon^k \left(\sum\limits_{j=k}^{n} M_j y_{n+k-j} \right) + \left(B_\varepsilon - \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^{j-1} M_j \right) Y_n.$

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что при $r \geq \varepsilon^\beta$, $z_2 \geq \varepsilon^\beta$, $0 < \beta < \frac{1}{3}$

$$|R_n^\beta(z,\varepsilon)| \leqslant C_n \left[\left(\frac{\varepsilon}{r^3} \right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{z_2^3} \right)^n \right] \leqslant 2C_n \varepsilon^{(1-3\beta)n},$$

где постоянная C_n е зависит от ε.

Лемма 2.3 доказана.

3. Внутреннее разложение

Для построения ФАР в окрестности линии S_0 введем растянутые переменные

$$z_1 = \varepsilon^{2/3}\xi, \ \ z_2 = \varepsilon^{1/3}\tau, \ \ z_3 = z_3. \tag{3.1}$$

Пусть $\varkappa_\varepsilon: \ z \to (\xi, \tau, z_3)$. Положим

$$v \circ \varkappa_\varepsilon = w(\xi,\tau,z_3,\varepsilon), \ \ (B_\varepsilon v) \circ \varkappa_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon w, \ \ g \circ \varkappa_\varepsilon = h(\xi,\tau,z_3,\varepsilon), \tag{3.2}$$

и перепишем задачу (2.3),(2.4) в переменных (ξ,τ,z_3).

$$\mathcal{L}_\varepsilon w = h, \ \ w(0,\tau,z_3,\varepsilon) = 0. \tag{3.3}$$

Расщепление оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ по степеням ε имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k-1}{3}} L_k, \tag{3.4}$$

где

$$L_0 = \lambda_0^{-1} D_\xi^2 + 2\tau D_\xi - D_\tau, \ \ L_k = \frac{1}{k!} D_\mu^k b_{2,0,0}(\mu^2\xi, \mu\tau, z_3)|_{\mu=0} D_\xi^2 +$$
$$+ \frac{1}{(k+1)!} D_\mu^{k-1} b_{1,1,0}(\mu^2\xi, \mu\tau, z_3)|_{\mu=0} D_\xi D_\tau + \ldots$$

— д.о. второго порядка, коэффициенты которых квазиоднородные полиномы по ξ, τ, а коэффициенты при степенях ξ, τ — гладкие функции от z_2.

ФАР задачи (3.3) ищем в виде

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k+1}{3}} w_k(\xi,\tau,z_3). \tag{3.5}$$

Разлагая $h(\xi,\tau,z_3,\varepsilon)$ по степеням ε, находим, что $h = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k(\xi,\tau,z_3)\varepsilon^{\frac{k}{3}}$, где $h_k(\xi,\tau,z_3) = \frac{1}{k!} D_\mu^k g(\mu^2\xi, \mu\tau, z_3)|_{\mu=0}$. Далее стандартным образом получим систему параболических уравнений для нахождения $w_k(\xi,\tau,z_3)$ в области $\mathbb{R}_+^2 \times [0,s_1] = \{0 < \xi < \infty, |\tau| < \infty, 0 \leqslant z_3 \leqslant s_1\}$:

$$\begin{cases} L_0 w_0 = (\lambda_0^{-1} D_\xi^2 + 2\tau D_\xi - D_\tau) w_0 = h_0, \\ L_0 w_k + \sum\limits_{j=1}^{k} L_j w_{k-j} = h_k, \ \ k = 1,2,... \end{cases} \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$w_k(0, \tau, z_3) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{3.7}$$

Чтобы выяснить, при каких дополнительных условиях следует рассматривать решения (3.6)—(3.7), воспользуемся условиями согласования ([2]).

Обозначим

$$V_n^{(3n)} = \sum_{k=0}^{n} v_k^{(3n)}(z)\varepsilon^k, \quad Y_n^{(3n)} = \sum_{k=0}^{n} y_k^{(3n)}(t, z_2, z_3), \tag{3.8}$$

где $v_k^{(3n)}$, $y_k^{(3n)}$ — $3n$-частичные суммы асимптотических рядов (2.4), (2.16) функций $v_k(z)$, $y_k(t, z_2, z_3)$ соответственно. Пусть

$$U_n^{(3n)}(z, \varepsilon) = V_n^{(3n)}(z, \varepsilon) + Y_n^{(3n)}(t, z_2, z_3)\chi\left(\frac{z_2}{\varepsilon^{1/3}}\right), \tag{3.9}$$

где $\chi(\tau)$ — гладкая срезающая функция

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 2 \\ 0, & \tau \leqslant 1 \end{cases}$$

и $G_n(z, \varepsilon) = U_n(z, \varepsilon) - U_n^{(3n)}(z, \varepsilon)$.

Из лемм 2.1 и 2.2, с учетом разложений (2.4), (2.16), следует, что в области $\omega(\varepsilon^\beta, \varepsilon^\mu) = \{z|\, \varepsilon^\beta \leqslant r \leqslant \varepsilon^\mu\}$, где $0 < \mu < \beta < \frac{1}{3}$, имеют место оценки

$$G_n(z, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu(n+1)}), \quad B_\varepsilon G_n(z, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu n}).$$

Из этих оценок и леммы 2.3 получаем оценку в области $\omega(\varepsilon^\beta, \varepsilon^\mu)$

$$B_\varepsilon U_n^{(3n)} - g(z) = O(\varepsilon^{\mu_0 n}), \tag{3.10}$$

где $\mu_0 = \min(\mu, 1 - 3\beta)$.

Перепишем (3.9) в переменных (ξ, τ, z_3):

$$U_n^{(3n)} \circ \varkappa_\varepsilon = W_n^{(3n)}(\xi, \tau, z_3, \varepsilon). \tag{3.11}$$

Здесь

$$W_n^{(3n)} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(\xi, \tau, z_3)\varepsilon^{\frac{k+1}{3}},$$

$$w_k^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \rho^{k+1-3m}\varphi_{k,m}(\theta_1, z_3) + e^{-\lambda_0\sigma_1}\left(\sum_{m=0}^{n} \tau^{k+1-3m}P_{2k+m}(\sigma_1, z_3)\right)\chi(\tau),$$

где $\rho = \sqrt{\xi + \tau^2}$, $\theta_1 = \frac{\tau}{\rho}$, $\sigma_1 = 2\xi\tau$.

При этом $w_k^{(n)}|_{\xi=0} = 0$, при $\tau \neq 0$, что следует из явных формул и леммы 2.3.

Формула (3.11) и есть условие согласования внешнего и внутреннего разложений. Это означает, что решения системы уравнений (3.6), (3.7) следует искать в классе функций, растущих при $\rho \to +\infty$ не быстрее степени ρ и имеющих при $\rho \to \infty$ асимптотику вида $w_k \sim w_k^{(n)}$.

Перепишем (3.10) в переменных (ξ, τ, z_3):

$$B_\varepsilon U_n^{(3n)} \circ \varkappa_\varepsilon - g(z) \circ \varkappa_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon W_{3n}^{(n)} - h(\xi, \tau, \varepsilon) = \left(L_0 w_0^{(n)} - h_0\right) +$$

$$+\varepsilon^{1/3}\left(L_0 w_1^{(n)} + L_1 w_0^{(n)} - h_1\right) + \cdots +$$

$$+\varepsilon^{k/3}\left(L_0 w_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{k} L_j w_{k-j}^{(n)} - h_k\right) + \cdots = O(\varepsilon^{\mu_0 n}). \tag{3.12}$$

При отображении

$$\varkappa_\varepsilon:\ \omega(\varepsilon^\beta,\varepsilon^\mu)\to\omega'(\varepsilon^{\beta-1/3},\varepsilon^{\mu-1/3})=\{(\varepsilon,\tau,z_3)|\ \varepsilon^{\beta-1/3}<\rho<\varepsilon^{\mu-1/3},z_3\in[0,s_1]\}.$$

Из (3.12) следует, что в области ω'

$$L_0w_0^{(n)}-h_0=O(\varepsilon^{\mu_0 n}),\ \ L_0w_k^{(n)}+\sum_{j=1}^{k}L_jw_{k-j}^{(n)}-h_k=O(\varepsilon^{\mu_0 n-k/3}),\ \ k=1,2,...,k_1. \tag{3.13}$$

Эти соотношения при $\rho\to\infty$ эквивалентны следующим

$$L_0w_0^{(n)}-h_0=O(\rho^{-\mu_1 n}),\ L_0w_k^{(n)}+\sum_{j=1}^{k}L_jw_{k-j}^{(n)}-h_k=O(\rho^{-\mu_1 n+\mu_2 k}),\ \ k=1,2,...,k_1. \tag{3.14}$$

Устремляя $n\to\infty$ в (3.14), получим

$$L_0\widehat{w}_0-h_0=O(\rho^{-\infty}),\ \ L_0\widehat{w}_k+\sum_{j=1}^{k}L_j\widehat{w}_{k-j}-h_k=O(\rho^{-\infty}),\ \ k=1,2,..., \tag{3.15}$$

где

$$\widehat{w}_k=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{k+1-3j}\varphi_{k,j}(\theta_1,z_3)+\chi(\varepsilon)e^{-\lambda_0\sigma_1}\sum_{j=0}^{\infty}\tau^{k+1-3j}P_{2k+j}(\sigma_1,z_3) \tag{3.16}$$

— формальные асимптотические ряды.

Лемма 3.1. *Существуют единственные решения системы уравнений (3.6) с граничными условиями (3.7) $w_k(\xi,\tau,z_3)\in C^\infty(\mathbb{R}^2_+\times[0,s_1])$, которые при $\rho\to\infty$ разлагаются в асимптотические ряды (3.16), $w_k(\xi,\tau,z_3)\sim\widehat{w}_k(\xi,\tau,z_3)$.*

Доказательство.

Обозначим через $w_{a,k}(\xi,\tau,z_3)$ гладкие функции, которые при $\rho\to\infty$ разлагаются в асимптотические ряды (3.16) и равны нулю при $\xi=0$, $w_{a,k}\sim\widehat{w}_k$, $w_{a,k}(0,\tau,z_3)=0$. Известно, что такие функции существуют. Положим

$$w_k(\xi,\tau,z_3)=w_{a,k}(\xi,\tau,z_3)+r_k(\xi,\tau,z_3),\ \ k=0,1,\dots.$$

В силу (3.6) и (3.7) получим

$$L_0r_0=\psi_0,\ \ L_0r_k+\sum_{j=1}^{k}L_jr_{k-j}=\psi_k,\ \ r_0(0,\tau,z_3)=r_k(0,\tau,z_3)=0,\ \ k=1,2,...,$$

где $\psi_0=h_0-L_0w_{a,0}$, $\psi_k=\sum\limits_{j=0}^{k}L_jr_{k-j}$ — гладкие функции, убывающие вместе с производными быстрее любой степени ρ^{-1}. Класс таких функций обозначим $S(\overline{\mathbb{R}^2_+}\times[0,s_1])$. Рассмотрим задачу

$$L_0R_0=\psi(\xi,\tau,z_3),\ \ R_0(0,\tau,z_3)=0,$$

где $\psi\in S(\overline{\mathbb{R}^2_+}\times[0,s_1])$. В [2] доказана однозначная разрешимость этой задачи в классе S в случае, когда L_0 и ψ не зависят от z_3. Очевидно, что этот результат справедлив и в случае гладкой зависимости L_0 и ψ от z_3. Отсюда следует справедливость леммы при $k=0$. Далее доказательство завершается индукцией по k.

Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим $3n$-частичную сумму теперь уже определенного ФАР (3.5)

$$W_{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\varepsilon^{\frac{k+1}{3}}w_k(\xi,\tau,z_3). \tag{3.17}$$

Лемма 3.2. *Ряд (3.17) является ФАР задачи (2.2),(2.3) в области $\overline{\omega}(0,\varepsilon^\mu)=\{z|\ 0\leqslant r\leqslant\varepsilon^\mu,\ z_3\in[0,s_1]\}$ с точностью $O(\varepsilon^{\mu n})$, где $0<\mu<\frac{1}{3}$.*

Доказательство.

Имеем в силу (3.6)

$$B_\varepsilon W_{3n} = \mathcal{L}_\varepsilon W_{3n} = h + \left[R_{1,n}(z,\varepsilon) + R_{2,n}(z,\varepsilon) + R_{3,n}(z,\varepsilon)\right],$$

где

$$R_{1,n}(z,\varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{3n} \varepsilon^{k/3} h_k - h\right),$$

$$R_{2,n}(z,\varepsilon) = \varepsilon^n \sum_{k=1}^{3n} \varepsilon^{k/3} \left(\sum_{j=k}^{3n} L_j w_{3n+k-j}\right),$$

$$R_{3,n}(z,\varepsilon) = \left(\mathcal{L}_\varepsilon - \sum_{k=0}^{3n} \varepsilon^{\frac{k-1}{3}} L_k\right) W_{3n}.$$

Используя асимптотические разложения для $w_k(\xi,\tau,z_3)$ и вид операторов L_k, нетрудно видеть, что каждое слагаемое в квадратных скобках не превосходит $C_n\varepsilon^n\rho^{3n} = C_n r^n \leqslant C_n\varepsilon^{\mu n}$, где постоянная C_n не зависит от ε. Отсюда следует, что в области $\overline{\omega}(0,\varepsilon^\mu)$

$$B_\varepsilon W_{3n} = g(z) + R_n^\mu(z,\varepsilon), \;\; z \in \overline{\omega}(0,\varepsilon^\mu), \tag{3.18}$$

где $R_n^\mu(z,\varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu n})$.

Лемма 3.2 доказана.

Образуем составное асимптотическое разложение ([2])

$$V_{a,n} = U_n(z,\varepsilon) + W_{3n}(\xi,\tau,z_3,\varepsilon) - U_n^{(3n)}(z,\varepsilon). \tag{3.19}$$

Теорема 2. *Составное асимптотическое разложение (3.19) является равномерным асимптотическим решением задачи (2.2)—(2.3) в области $\overline{\omega}(0,d_0)$ с точностью $O(\varepsilon^{\mu_0 n})$.*

Доказательство.

В силу лемм 2.3, 3.2 и формулы (3.10) имеем

$$B_\varepsilon(v - V_{a,n}) = R_n(z,\varepsilon) = \begin{cases} R_n^\beta(z,\varepsilon), \;\; z \in \overline{\omega}(\varepsilon^\beta, d_0) \\ R_n^\mu(z,\varepsilon), \;\; z \in \overline{\omega}(\varepsilon^\mu, d_0) \\ -R_n^\beta(z,\varepsilon) + R_n^0(z,\varepsilon), \;\; z \in \overline{\omega}(\varepsilon^\beta, \varepsilon^\mu) \end{cases}$$

где $R_n(z,\varepsilon) = O(\varepsilon^{\mu_0 n})$. Из теоремы 1 следует, что

$$\varepsilon\|v - V_{a,n}\|^2_{1,\overline{\omega}(0,d_0)} + \|v - V_{a,n}\|^2_{0,\overline{\omega}(0,d_0)} \leqslant C\varepsilon^{\mu_0 n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи мат. наук, 12:5 (1957). С. 3–122.
2. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений краевых задач.* — М.: Наука, 1989.-336с.
3. Леликова Е.Ф. *Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при старших производных* // Дифференц. уравнения, 12:10 (1976). С. 1852–1865.

Юрий Закирович Шайгарданов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `shaig@anrb.ru`