ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 148-157.

УДК 517.53

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ГЛАДКИМ МОДУЛЕМ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Ф.А. ШАМОЯН

Аннотация. Пусть f — аналитическая функция в единичном круге D, непрерывная вплоть до его границы $\Gamma, f(z) \neq 0, z \in D$. Предположим f имеет на Γ модуль непрерывности $\omega(|f|, \delta)$. В статье устанавливается оценка $\omega(f, \delta) \leqslant A\omega(|f|, \sqrt{\delta})$, где A — некоторое неотрицательное число и точность данной оценки. Кроме того, в статье устанавливается многомерный аналог указанного результата. В доказательстве основной теоремы существенную роль играет теорема типа теорем Харди-Литтлвуда о гельдеревских классах аналитических функций в единичном круге.

Ключевые слова: аналитическая функция, модуль непрерывности, факторизация, внешняя функция.

Mathematics Subject Classification: primary: 30D55, 30D15; secondary: 46E22, 47A15

Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — открытый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, Γ – его граница. Обозначим через C_A множество всех функций f, аналитических в D и непрерывных в $D \cup \Gamma$. Если $f \in C(\Gamma)$, то символом $\omega(f, \delta)$ будем обозначать модуль непрерывности функции f на Γ, т.е.

$$\omega(f, \delta) = \{\sup |f(\gamma) - f(\gamma e^{it})|, \gamma \in \Gamma, |t| \leqslant \delta, t \in \mathbb{R}\}.$$

В статье мы рассматриваем следующую задачу: пусть $f \in C_A$, при этом функция $|f(e^{i\theta})|$ на единичной окружности имеет модуль непрерывности $\omega(|f|, \delta)$. Каков модуль непрерывности самой функции f на Γ и тем самым на $D \cup \Gamma$?

Впервые такая задача в классах непрерывных фунций с модулем непрерывности, удовлетворяющих условию Бари-Стечкина

$$\int_0^\delta \frac{\omega(|f|, \delta)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(|f|, \delta)}{t^2} dt = O(\omega(|f|, \delta)), (\delta \to 0), \tag{1}$$

была решена в работе В.П. Хавина и автора (см. [5]).

Было установленно, что если $\omega(|f|, \delta)$ удовлетворяет условию Бари-Стечкина (1), при этом $f(z) \neq 0, z \in D$, то

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \sqrt{\delta})), (\delta \to 0).$$

Кроме того, на простых примерах было показано, что полученная оценка является точной, и условие $f(z) \neq 0, z \in D$, в известном смысле, является необходимым. Подробное доказательство этих увереждений изложено в диссертации [7]. Указанная работа породила довольно интересные исследования в этом направлении. Сначала В.П. Хавин (см. [6]) предложил новый подход для получения таких оценок, применяя методы теории сингулярных интегральных операторов. В дальнейшем Н.А. Широков (см. [8], [10]) распространил

F.A. Shamoyan, Analytic functions with smooth absolute value of boundary data.

Поступила 10 мая 2017 г.

результаты вышеуказанного типа для внешних функций и гёльдеровских классов порядка $\alpha, \alpha \in (0, +\infty)$, одновременно получил необходимое и достаточное условие на $|f(e^{i\theta})|$, для которых функция f будет иметь заданный модуль непрерывности на множестве $D \cup \Gamma$. В этих работах была введена новая характеристика в терминах которых он получил результаты подобного типа и для классов О. Бесова аналитических функций в $D \cup \Gamma$. И наконец, отметим работу [2], где установлено, что описанное выше явление имеет локальный характер, т.е. если, например, модуль $|f|$ на окружности удовлетворяет условию Гёльдера порядка α лишь в одной точке, то f принадлежит классу Гёльдера порядка $\frac{\alpha}{2}$ в этой точке.

Отметим, что доказательство В. П. Хавина и доказательства результатов из вышеуказанных работ ([2], [6], [8], [10]), основаны на тонких методах комплексного и гармонического анализа. На наш взгляд подход, применяемый в работах [5] и [7], основанный на классических теоремах типа Харди-Литтлвуда (см. [3], [4]), является более простым. В этой статье, развивая метод работ [5], [7], мы докажем результаты такого рода и для модулей непрерывности $\omega(|f|, \delta)$, удовлетворяющих классическому условию А. Зигмунда

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(|f|, t)}{t} dt = O\left(\omega(|f|, \delta)\right), (\delta \to 0). \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть f – функция из класса C_A, причем $f(z) \neq 0, z \in D$. Тогда, если модуль непрерывности функции $|f|$ на Γ $\omega(|f|, \delta)$ удовлетворяет условию А. Зигмунда (2), то*

$$\omega(f, \delta) = O\left(\omega(|f|, \sqrt{\delta})\right), (\delta \to 0), \tag{3}$$

причем оценка (3) является точной.

Замечание 1. *Простой пример функции*

$$f(z) = (1 - z)^{2\alpha} \exp\left(-\frac{1 + z}{1 - z}\right), z \in D \cup \Gamma, \alpha \in (0, +\infty),$$

где выбрана главная ветвь степенной функции, показывает точность утверждения теоремы.

Аналог теоремы 1 справедлив и для аналитических функций в единичном шаре пространства $\mathbb{C}^n$. Чтобы сформулировать его, введем еще некоторые обозначения. Пусть $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2}$. Определим $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$, а $S_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = 1\}$.

Обозначим через $H(B_n)$ множество всех аналитических функций в B_n. Если $f \in H(B_n)$ и $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ — разложение функции f по однородным многочленам, то через $R(f)$ обозначим радиальную производную функции f (см. [11], стр. 241), то есть

$$R(f)(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k(z), z \in B_n.$$

Введем также следующее обозначение:

$$C_A(B_n) = H(B_n) \cap C(B_n \cup S_n).$$

Справедлива следующая оценка теоремы 1 в классах $C_A(B_n)$:

Теорема 2. *Пусть $f \in C_A(B_n)$, причем модуль непрерывности функции $|f|$ на S_n $\omega(|f|,\delta)$ удовлетворяет условию А. Зигмунда (2), тогда модуль непрерывности самой функции на множестве $B_n \cup S_n$ удовлетворяет оценке*

$$\omega(f,\delta) \leqslant A\omega(|f|,\sqrt{\delta}), 0 \leqslant \delta \leqslant 2.$$

Замечание 2. *В случае гёльдеровских классов, т.е. когда $\omega(f,t) = t^\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, $t \in [0,2]$, аналог теоремы 2 ранее был установлен в работе Н. А. Широкова [9].*

§1. Доказательство вспомогательных утверждений

Пусть f и g — вещественнозначные функции с общей областью определения $E \subset \mathbb{C}$, тогда соотношение $f \lesssim g$ на E равносильно следующему: существует положительное число A, такое что $f(z) \leqslant Ag(z), \forall z \in E$. Если $f \lesssim g$ и одновременно $g \lesssim f$, то $f(z) \approx g(z)$.

В дальнейшем функцией типа модуля неприрывности назовем неотрицательную неубывающую функцию ω на $[0,+\infty)$, такую что

$$\omega(0) = 0,\ \omega(\delta_1+\delta_2) \leqslant \omega(\delta_1)+\omega(\delta_2),\ \omega(\lambda\delta) \leqslant 2\lambda\omega(\delta),\ \lambda,\delta \in [0,+\infty).$$

Лемма 1. *Пусть ω – функция типа модуля непрерывности удовлетворяющая условию А. Зигмунда (2), тогда*

$$\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta} \lesssim \omega(\sqrt{\delta}), \delta > 0. \tag{4}$$

Доказательство. По определению имеем

$$\int\limits_0^{\sqrt{\delta}} \frac{\omega(u)}{u}du \leqslant A\omega(\sqrt{\delta}).$$

Ясно, что если $1 \leqslant \delta$, то оценка (4) очевидна, поэтому будем предполагать, что $0 < \delta < 1$. Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{\delta}} \frac{\omega(u)}{u}du = \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(u)}{u}du + \int\limits_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{\omega(u)}{u}du.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\sqrt{\delta}} \frac{\omega(u)}{u}du \geq \omega(\delta)\int\limits_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{du}{u} = \frac{\omega(\delta)}{2}\ln\frac{1}{\delta}.$$

Остается использовать условие А. Зигмунда.

Оценка (4) установлена. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f \in C_A$, $t = |t|\tau$, $t \in D$, $\tau \in \Gamma$. Тогда справедлива оценка*

$$|f(t)| \lesssim \left(|f(\tau)| + \omega(f,(1-|t|))\ln\frac{1}{1-|t|}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma P_t(\xi)f(\xi)|d\xi|.$$

где $P_t(\xi)$ — ядро Пуассона. Поэтому

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma P_t(\xi)|f(\xi)-f(\tau)||d\xi| + |f(\tau)|.$$

Следовательно,

$$|f(t)| \lesssim (|f(\tau)| + J_\omega), \tag{5}$$

где $J_\omega := \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma P_t(\xi)\omega(f,|\xi-\tau|)d\tau$. Перейдем к оценке последнего интеграла. Ясно, что

$$J_\omega \lesssim \int\limits_\Gamma \frac{(1-|t|^2)\omega(f,|\xi-\tau|)}{(1-|t|)^2+|\xi-\tau|^2}|d\xi| \lesssim \int\limits_0^\pi \frac{(1-|t|^2)\omega(f,u)}{(1-|t|)^2+u^2}du.$$

Продолжим $\omega(f,\delta)$ на $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ как функцию типа модуля непрерывности (см. [1], [4]). Тогда

$$J_\omega \lesssim \int\limits_0^{\frac{\pi}{1-|t|}} \frac{\omega(f,v(1-|t|))}{1+v^2}dv.$$

Представив этот интеграл в виде суммы

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(f,v(1-|t|))}{1+v^2}dv + \int\limits_1^{\frac{\pi}{1-|t|}} \frac{\omega(f,v(1-|t|))}{1+v^2}dv,$$

и учитывая, что $\frac{\omega(f,\delta)}{\delta}$ не возрастает (см. [1], [4]), получаем

$$J_\omega \lesssim \omega(f,1-|t|)\int\limits_1^{\frac{\pi}{1-|t|}} \frac{v}{1+v^2}.$$

Поэтому

$$J_\omega \lesssim \omega(f,1-|t|)\ln\frac{1}{1-|t|}. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует утверждение леммы.

Лемма 3. *(см. [3]). Пусть λ — положительная неубывающая функция на $(0,1)$, при этом $\int\limits_0^1 \lambda(u)du < +\infty$. Предположим, что f — аналитическая функция в D, такая что*

$$\sup_{z\in D}\left\{\frac{|f'(z)|}{\lambda(|z|)}\right\} < +\infty.$$

Тогда функция f принадлежит классу C_A, при этом

$$\omega(f,\delta) \lesssim \int\limits_{1-\delta}^1 \lambda(u)du.$$

Лемма 4. *Пусть $f \in C_A, f(z) \neq 0, z \in D, |f(z)| \leqslant 1, z \in D$. Тогда существует число $M > 0$ обладающее следующими свойствами: для произвольного $0 < a < 1$ функцию f в D можно представить в виде*

$$f(z) = \Phi_a(z)\Psi_a(z), z \in D,$$

где Ψ_a — аналитическая функция в D, такая что $|\Psi_a|$ непрерывно продолжена на весь замкнутый круг $D \cup \Gamma$,

$$a \leqslant |\Psi_a(t)| \leqslant 1, \forall t \in D,$$

$$||\Psi_a(t')| - |\Psi_a(t'')|| \leqslant ||f(t')| - |f(t'')||, t', t'' \in \Gamma,$$

$$\int\limits_{\Gamma} |\ln|\Psi_a(t)|| \, |dt| \leqslant M, \tag{7}$$

$$\Phi_a(z) = \exp\left(-\int\limits_{\Gamma} S_z(t) d\mu_a(t)\right), z \in D,$$

где $S_z(t)$ — ядро Шварца для круга D, μ_a — борелевская неотрицательная мера на Γ, полная вариация которой не превосходит M.

Доказательство. Пусть $H_a(t) = \max(a, |f(t)|), t \in \Gamma$.

$$\Psi_a(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} S_z(t) \ln H_a(t)|dt|\right),$$

$$\Phi_a(z) = f(z)\left(\Psi_a(z)\right)^{-1} := \exp\left(-\int\limits_{\Gamma} S_z(t) d\mu_a(t)\right), z \in D,$$

где

$$\mu_a(E) = -\int\limits_{E_a} \ln\left(\frac{|f(t)|}{a}\right)|dt| + \mu(E), \tag{8}$$

μ — неотрицательная мера определяющая сингулярную часть функции f, E — произвольное борелевское множество на Γ, $E_a = \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \leqslant a\}$. Ясно, что $|\Psi_a|$ на Γ совпадает с H_a. Оценка (7) получается из следующего неравенства

$$\int\limits_{\Gamma} |\ln|\Psi_a(\xi)|||d\xi| = \int\limits_{E(|f|\geq a)} |\ln|\Psi_a(\xi)|||d\xi| + \int\limits_{E(|f|<a)} |\ln|\Psi_a(\xi)|||d\xi| =$$

$$= \int\limits_{E(|f|\geq a)} |\ln|\Psi_a(\xi)|||d\xi| + \sigma(E_a)\ln\frac{1}{a},$$

где σ — мера Лебега множества E_a.

Остается заметить, что

$$E_a = E(|f| \leqslant a) = E\left(\ln\frac{1}{|f|} \geq \ln\frac{1}{a}\right),$$

(напомним, что $\max|f| \leqslant 1, 0 < a < 1$).

Из конечности интеграла $\int\limits_{\Gamma} |\ln|f(\xi)|||d\xi|$ следует, что $\sup\limits_{A\geq 0} A\sigma(\gamma \in \Gamma : |\ln|f(\gamma)|| \geq A) < +\infty$.

Следовательно, (7) установлено. Теперь оценим $\mu_a(E)$. Для этого обозначим через $V_a(E)$ первое слагаемое в правой части (8) и заметим, что $\mu_a(\Gamma) \leqslant V_a(\Gamma) + \mu(\Gamma)$. Поэтому

$$V_a(\Gamma) \leqslant \int\limits_{\Gamma} |\ln|f||dt + |\ln a|\sigma(\Gamma_a),$$

где $\Gamma_a = \{\gamma \in \Gamma : |\ln|f(\gamma)|| \geq |\ln a|\}$. Таким же путем, как мы доказали неравество (7), получим последнее утверждение леммы. Лемма доказана.

Замечание 3. *Нетрудно заметить, используя неравенство Иенсена, что если* $\|f\|_{C_A} < 1$, *то*

$$|\mu_a(\Gamma)| \lesssim \ln \frac{1}{|f(0)|},$$

$$\int\limits_{\Gamma} |\ln|\Psi_a|| \, |dt| \lesssim \ln \frac{1}{|f(0)|}.$$

§2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $|f(t)| \leqslant 1, \forall t \in \Gamma$. Кроме того, для удобства положим $\omega(\delta) := \omega(|f|, \delta), 0 \leqslant \delta \leqslant 2$, и при этом

$$|f(t')| - |f(t'')| \leqslant \frac{1}{2}\omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in \Gamma.$$

Используя лемму 3, достаточно установить оценку

$$|f'(t)| \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|}, t \in D.$$

Пусть $t \in D$ — фиксированная точка круга D, положим в лемме 4: $a = \omega(\sqrt{1-|t|})$. Введем обозначения

$$F_t(t) = \Psi_{\omega(\sqrt{1-|t|})}(t), f_t(t) = \Phi_{\omega(\sqrt{1-|t|})}(t).$$

Заметим, что

$$f'(t) = f_t'(t)F_t'(t) + f_t'(t)F_t(t)$$

1°. Оценка $|f_t(t)||F_t'(t)|$. Для получения этой оценки сначала докажем неравенство

$$|F_t(t)| \lesssim |F_t(\tau)|, t = |t|\tau, \tau \in \Gamma. \tag{9}$$

По лемме 2

$$|F_t(t)| \lesssim \left(|F_t(\tau)| + \omega(1-|t|)\ln\frac{1}{1-|t|}\right).$$

Поэтому для доказательства неравенства (9) достаточно установить оценку

$$\sup_{t \in D}\{\omega(1-|t|)\ln\frac{1}{1-|t|}\left|F_t^{-1}(\tau)\right|\} < +\infty.$$

Пусть сначала $\max(|f(\tau)|, \omega(\sqrt{1-|t|})) = |f(\tau)|$, тогда по лемме 4 $|F_t(\tau)| \geq \omega(\sqrt{1-|t|})$. Поэтому, учитывая оценку

$$\omega(1-|t|)\ln\frac{1}{1-|t|} \lesssim \omega(\sqrt{1-|t|}),$$

получаем

$$\frac{\omega(1-|t|)\ln\frac{1}{1-|t|}}{|F_t(\tau)|} \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{\omega(\sqrt{1-|t|})} \lesssim 1.$$

Теперь рассмотрим случай $|f(\tau)| \leqslant \omega(\sqrt{1-|t|})$. Снова применяя лемму 1, получим нужную оценку (9).

Перейдем к оценке функций $|f_t(t)|, |F_t'(t)|$. Пусть $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \omega(|\gamma - \tau|) \leqslant |F_t(\tau)|\}, \Gamma_2 = \Gamma|\Gamma_1$. Тогда имеем

$$|f_t(t)|\,|F_t'(t)| \leqslant |F_t'(t)|.$$

При этом

$$|F_t'(t)| = |F_t(t)| \left| \int\limits_{\Gamma} |F_t(\gamma)| \frac{2\gamma}{(\gamma-t)^2} |d\gamma| \right| =$$

$$= |F_t(t)| \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{(\ln|F_t(\gamma)| - \ln|F_t(\tau)|)}{(\gamma-t)^2} \right| \lesssim |F_t(\tau)| \left[|\int\limits_{\Gamma_1}| + |\int\limits_{\Gamma_1}| \right] \lesssim$$

$$\lesssim |F_t(\tau)| \int\limits_{\Gamma_1} \frac{|\ln|F_t(\gamma)| - \ln|F_t(\tau)||}{|\gamma-t|^2} |d\gamma| + |F_t(\tau)| \int\limits_{\Gamma_2} \frac{|\ln|F_t(\gamma)|| \, |d\gamma|}{|\gamma-t|^2} +$$

$$+ |F_t(\tau)| \, |\ln|F_t(\tau)|| \int\limits_{\Gamma_2} \frac{|d\gamma|}{|\gamma-t|^2} \overset{def}{=} [I_1 + I_2 + I_3].$$

Оценка I_1.
Если $\gamma \in \Gamma_1$, то по теореме о среднем

$$|\ln|F_t(\gamma)|| - |\ln|F_t(\tau)|| \leqslant \frac{||F_t(\gamma)| - |F_t(\tau)||}{\min\limits_{\gamma\in\Gamma_1}(|F_t(\gamma)|, |F_t(\tau)|)} \leqslant \frac{||f(\gamma)| - |f(\tau)||}{\min\limits_{\gamma\in\Gamma_1}(|F_t(\gamma)|, |F_t(\tau)|)}.$$

Но, учитывая определение Γ_1, имеем

$$|F_t(\gamma)| \geq ||F_t(\tau)| - |F_t(\tau) - F_t(\gamma)|| \geq |F_t(\tau)| - \frac{1}{2}\omega(|\gamma-\tau|) \geq \frac{1}{2}|F_t(\tau)|.$$

Следовательно,

$$I_1 \lesssim \frac{1}{1-|t|} \int\limits_{\Gamma} \omega(|\gamma-\tau|) P_t(\gamma) |d\gamma|,$$

где $P_t(\gamma)$ — ядро Пуассона.
Используя лемму 2, получим

$$I_1 \lesssim \frac{\omega(1-|t|)}{1-|t|} \ln\frac{1}{1-|t|}.$$

Из леммы 1, окончательно получаем

$$I_1 \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|}, t \in D.$$

Оценка I_2.
Пусть

$$K_t(\gamma) = \frac{1}{(\gamma-t)^2}, \gamma \in \Gamma, t \in D.$$

Тогда имеем

$$I_2 \leqslant |F_t(\tau)| \max_{\gamma\in\Gamma_2} |K_t(\gamma)| \int\limits_{\Gamma} |\ln|f_t(\gamma)|| \, |d\gamma| \lesssim |F_t(\tau)| \max_{t\in\Gamma_2} |K_t(\gamma)|.$$

В последней оценке мы воспользовались леммой 4.
Теперь, учитывая определение Γ_2, получим

$$I_2 \lesssim |F_t(\tau)| \max_{\gamma\in\Gamma_2} \frac{1}{(|\gamma-\tau|^2 + (1-|t|))^2} \lesssim |F_t(\tau)| \max\{\frac{1}{x^2}, x : \omega(x) \geq |F_t(\tau)|\}.$$

Пусть $x^* \in (0, 2]$, такая что

$$\omega(x^*) = |F_t(\tau)|. \tag{10}$$

Тогда из последней оценки имеем

$$I_2 \lesssim \frac{|F_t(\tau)|}{(x^*)^2} = C_f \frac{\omega(x^*)}{(x^*)^2}.$$

Но из неравенства $|F_t(\tau)| \geq \omega(\sqrt{1-|t|})$ следует, что $\sqrt{1-|t|} \leqslant x^*$. Поэтому

$$\frac{\omega(x^*)}{(x^*)^2} = \frac{\omega(x^*)}{x^* \cdot x^*} \leqslant \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{\sqrt{1-|t|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-|t|}} = \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|},$$

то есть

$$I_2 \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{(1-|t|)}.$$

Оценка I_3.

$$I_3 = |F_t(\tau)|\,|\ln|F_t(\tau)|| \int\limits_{\Gamma_2} \frac{|d\gamma|}{|\gamma - t|^2} \lesssim |F_t(\tau)|\,|\ln|F_t(\tau)|| \int\limits_{\omega(u)\geq |F_t(\tau)|} \frac{du}{u^2 + (1-|t|)^2} =$$

$$= |F_t(\tau)|\,|\ln|F_t(\tau)|| \lesssim \frac{|F_t(\tau)|\,|\ln|F_t(\tau)||}{(1-|t|)} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arg\,ctg} \frac{x^*}{1-|t|}\right), \tag{11}$$

где x^* определяется по равенству (10).

Учитывая элементарное неравенство

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arg\,ctg} V \leqslant \frac{H}{1+V}, V \in [0, +\infty),$$

из оценки (11) окончательно получим

$$I_3 \lesssim |F_t(\tau)|\,|\ln|F_t(\tau)|| \frac{H}{1-|t|+x^*}.$$

Теперь, учитывая оценки $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant 2} u|\ln u| \leqslant e, x^* \geq \sqrt{1-|t|}$, из (11) получаем

$$I_3 \lesssim \frac{1}{\sqrt{1-|t|}} \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{\sqrt{1-|t|}} = C_f \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались неравенством $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \geq \omega(1)$ при $0 < \delta \leqslant 1$.

Перейдем теперь к оценке

2°. $|F_t(\tau)|\,|f_t'(t)|$

Как и выше, положим

$$K_t(\xi) = \frac{1}{(t-\xi)^2}, \xi \in \Gamma, t \in D.$$

Тогда

$$f_t'(t) = f_t(t) \int\limits_{\Gamma} K_t(\xi) d\mu^t(\xi),$$

где мера μ^t сосредоточена на множестве

$$E_t = \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \leqslant \omega(\sqrt{1-|t|})\},$$

при этом $\mu^t(\Gamma) \leqslant M$.

Пусть $\tau^* \in E_t$ — ближайшая к точке t. Тогда по лемме 2

$$|F_t(t)| \lesssim \left[|F_t(\tau)| + \omega(1-|t|) \ln \frac{1}{1-|t|}\right]. \tag{12}$$

Поэтому
$$|F_t(t)| \lesssim \left(|F_t(\tau) - F_t(\tau^*)| + |F_t(\tau^*)|\, \omega(1-|t|) \ln \frac{1}{1-|t|} \right).$$
Так как $\tau^* \in E_t$, то $|F_t(\tau^*)| \leqslant \omega(\sqrt{1-|t|})$. Следовательно, из оценки (12) получаем
$$|F_t(t)| \lesssim \left[\omega(|\tau - \tau^*|) + \omega(1-|t|) \ln \frac{1}{1-|t|} + \omega(\sqrt{1-|t|}) \right].$$
Из леммы 1 имеем
$$|F_t(t)|\, |f_t'(t)| \lesssim \left[\omega(|\tau-\tau^*|) + \omega(\sqrt{1-|t|}) \right] |f_t(t)| \int\limits_{\Gamma} |K_t(\xi)|\, d\mu^t(\xi),$$
то есть
$$|F_t(t)|\, |f_t'(t)| \lesssim \left[|f_t'(t)|\, \omega(|\tau-\tau^*|)\, | + f_t'(t)|\, \omega(\sqrt{1-|t|}) \right].$$
Перейдем к оценке выражения в скобке.

Пусть
$$J_1 = |f_t'(t)|\, \omega(|\tau-\tau^*|) = \omega(|\tau-\tau^*|)\, |f_t(t)| \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu^t(\xi)}{|\xi - t|^2},$$
$$J_2 = |f_t'(t)|\, \omega(\sqrt{1-|t|}).$$
Сначала оценим J_2.

Имеем
$$J_2 \lesssim \omega(\sqrt{1-|t|}) \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu^t(\xi)}{|\xi-t|^2} \exp\left(-\frac{1-|t|^2}{|\xi-t|^2} d\mu^t(\xi) \right) \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|} \sup_{u>0} e^{-u} u \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|}. \tag{13}$$
Перейдем теперь к оценке J_1.

Если $\omega(|\tau-\tau^*|) \lesssim \omega(\sqrt{1-|t|})$ то J_1 оценивается точно так же, как J_2. Поэтому будем предполагать, что $\omega(\sqrt{1-|t|}) \leqslant \omega(|\tau-\tau^*|)$. Ввиду монотонности функции ω, из последней оценки сразу следует $\sqrt{1-|t|}) \leqslant |\tau-\tau^*|$. Следовательно, получаем
$$J_1 \lesssim \omega(|\tau-\tau^*|)|f_t(t)| \frac{1}{|t-\tau^*|^2} \lesssim \frac{\omega(|\tau-\tau^*|)}{|t-\tau^*|} \frac{1}{|t-\tau^*|} \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\omega(|\tau-\tau^*|)}{|\tau-\tau^*|} \frac{1}{\sqrt{1-|t|}} \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{(\sqrt{1-|t|})(\sqrt{1-|t|})} = \frac{\omega(\sqrt{1-|t|})}{1-|t|}, t \in D. \tag{14}$$
В последнем неравенстве мы воспользовались невозрастанием функции $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$, на $(0,2)$.
Из оценок (13), (14) следует утверждение теоремы 1.

Теперь наметим ход доказательства теоремы 2.

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 2, рассмотрим следующую срезающую функцию: $f(\lambda) = f(\lambda\xi)$, $\lambda \in D$, $\xi \in S_n$, точка ξ — фиксированная (см. [11], стр. 245).

Легко видеть, что $f_\xi(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Исходя из замечания 2, устанавливается оценка
$$|f_\xi(\lambda_1) - f_\xi(\lambda_2)| \leqslant A\omega\left(\sqrt{|\lambda_1-\lambda_2|}\right), \lambda_1, \lambda_2 \in D,$$
причем A не зависит от $\xi \in S_n$.

Далее, используя равенство

$$R(f)(z) = n\int\limits_{S_n} d\sigma(\xi)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\langle z,\xi\rangle e^{-i\theta}f(e^{i\theta}\xi)d\theta}{(1-\langle z,\xi\rangle e^{-i\theta})^{n+1}}, z\in B_n,$$

где R — радиальная производная (см. [11], стр. 243), устанавливается оценка

$$|R(f)(z)| \lesssim \frac{\omega(\sqrt{1-\|z\|})}{1-\|z\|}, z\in B_n.$$

Теперь, применяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 7.9 из [11], получим утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. ММО. Т. 5. 1956. С. 482–522.
2. Васин А.В., Кисляков С.В., Медведев А. Н. *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля* // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 3. С. 52–85.
3. Геронимус Я.Л. *О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе* Мат. сб. 1956. Т. 38(80). № 3. С. 319–330.
4. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* М.: Наука. 1976. 320 с.
5. Хавин В.П., Шамоян Ф.А *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений* // Зап. научн. семин. ЛОМИ 19. 1970. С. 237–239.
6. Хавин В.П *Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции.* Изв. Арм. ССР Сер. мат. 1971. С. 252–258, 265–287.
7. Шамоян Ф.А *Некоторые проблемы деления в пространствах аналитических функций.* Дис. на соиск. учен. степени кандидата физ.-мат. наук. Ленингр. гос. универс. Ленинград. 1970. 119 с.
8. Широков Н.А. *Внешние функции из аналитических классов О. В. Бесова* // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 217. С. 172–217.
9. Широков Н.А. *Гладкость голоморфных в шаре функций и ее модуля на сфере* // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2016. . Т. 447. С. 123–127.
10. N.A. Shirokov *Analytic functions smooth up to the boundary.* Lecture Notes in Math. vol 1312. 1988. Springer - Verlag, Berlin. 210 pp.
11. Kehe Zhu *Space of holomorphic functions in unit ball.* Cerad. Texts in math., vol 226. Springe - Verlag Berlin. 2004. 271 pp.

Файзо Агитович Шамоян,
Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского,
ул. Бежицкая, 14,
241036, Брянск, Россия
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru