ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 132-137.

УДК 512.5

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ФОРМУЛЫ ФАА-ДИ-БРУНО

А.Б. ШАБАТ, М.Х. ЭФЕНДИЕВ

Аннотация. В работе построены две новые модификации классической формулы Фаа-ди-Бруно. Рассмотрены приложения этих формул в теории интегрируемости нелинейных уравнений с частными производными. Обсуждается задача об интегрирование по частям в формальном вариационном исчислении Гельфанда-Олвера-Сандерса.

Ключевые слова: формула Фаа-ди-Бруно, дифференциальные многочлены, условия интегрируемости.

Mathematics Subject Classification: 37K10

1. Обобщение формулы Фаа-ди-Бруно

Дифференцирование сложной функции $f[u(x), v(x), ..., z(x)]$ приводит к красивой формуле, опубликованной Франческо Фаа-ди-Бруно в 1857 г. Правая часть приведённого ниже расширенного варианта этой формулы для производной порядка $n \geq 1$ по независимой переменной x от композиции функций:

$$\frac{f^{(n)}}{n!} = \left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \frac{\hat{B}_1^{k_1}\hat{B}_2^{k_2}\cdots\hat{B}_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right) f(u,v,...z), \quad \hat{B}_j \overset{\text{def}}{=} \frac{u_j}{j!}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!}\frac{\partial}{\partial v} + ... + \frac{z_j}{j!}\frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1)$$

записана нами в виде дифференциального оператора с частными производными, действующего на функцию f с аргументами u, v, $\ldots$, z. Коэффициенты указанного выше линейного оператора выражены через переменные u, v, $\ldots$, z и многочлены от их x-производных, обозначаемых u_j. Эти так называемые *дифференциальные переменные*

$$u_j \overset{\text{def}}{=} \frac{d^j u(x)}{dx^j}, \quad v_j \overset{\text{def}}{=} \frac{d^j v(x)}{dx^j}, \quad \ldots, z_j \overset{\text{def}}{=} \frac{d^j z(x)}{dx^j}, \quad j = 1,\ 2, \ldots\ , n. \qquad (1.2)$$

в формуле (1.1) рассматриваются как независимые переменные, перестановочные друг с другом и с операторами дифференцирования $\partial_u, \partial_v, \ldots, \partial_z$. В частности, в случае двух аргументов u, v функции f и $n \leq 4$ формула (1.1) даёт:

$$f^{(1)} = (\hat{B}_1)f = (u_1\partial_u + v_1\partial_v)\, f(u,v) = \frac{df[u(x), v(x)]}{dx},$$

$$f^{(2)} = \left[u_2\partial_u + v_2\partial_v + u_1^2\partial_u^2 + 2u_1v_1\partial_u\partial_v + v_1^2\partial_v^2)^2\right] f(u,v) = \left[2\hat{B}_2 + \hat{B}_1^2\right] f$$

$$f^{(3)} = \left(6\hat{B}_3 + 3\hat{B}_2\hat{B}_1 + \hat{B}_1^3\right) f, \quad f^{(4)} = \left(4!\hat{B}_4 + 4!\hat{B}_3\hat{B}_1 + 12\hat{B}_2^2 + 12\hat{B}_2\hat{B}_1^2 + \hat{B}_1^4\right) f.$$

Число различных мономов в этих многочленах от n переменных $\hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_n$ определяется диофантовым уравнением

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = n, \quad k_j \geq 0 \qquad (1.3)$$

A.B. Shabat, M.Kh. Efendiev, On applications of Faa di Bruno.

Поступила 8 апреля 2017 г.

и совпадает с числом $p(n)$ различных разбиенией (partitions) целого числа $n \geq 1$. В силу этого (см. [1]):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{j=1}^{\infty}(1-t^j)^{-1} = 1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5+11t^6+15t^7+22t^8+\dots$$

Доказательство формулы Фаа-ди-Бруно (1.1) в скалярном случае $f[u(x)]$ можно извлечь из цитированной выше монографии [1]. По существу дело сводится к доказательству формулы $f^{(n+1)} = D_x(f^{(n)})$, где линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$D_x = u_1\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^{\infty} u_{j+1}\frac{\partial}{\partial u_j}: \quad u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto u_k \mapsto \dots \tag{1.4}$$

применяется к слагаемым правой части формулы (1.1), зависящим не только от u, но и от дополнительных независимых переменных (1.2).

Для обоснования, указанного в (1.1), обобщения формулы Фаа-ди-Бруно на «векторный случай» $f[u(x), v(x), \dots, z(x)]$, заметим, что для экспоненциальных функций $f = e^{(u(x),v(x),\dots,z(x))}$ вида

$$\log f = w = \alpha u + \beta v +, \dots, +\gamma z \tag{1.5}$$

скалярная и векторная формы, рассматриваемой формулы (1.1) совпадают. В силу соображений линейности это доказывает справедливость общей формулы для линейной комбинации экспоненциальных функций вида (1.5), а значит и в общем случае (см. формулы прямолинейных вычислений в работе [3]).

2. Цепочки Дарбу

Обсудим краткоримененимость формулы Фаа-ди-Бруно (1.1) к задаче об интегрировании линейного гиперболического уравнения второго порядка относительно функции $\psi = \psi(x, y)$:

$$[D_xD_y + b(x,y)D_y + c(x,y)]\psi = 0, \tag{2.1}$$

при помощи теории преобразований Дарбу.

Лемма. Пусть $c(n) = c(n; x, y)$, $b(n) = b(n; x, y)$ удовлетворяют нелинейной цепочке связанных друг с другом уравнений:

$$D_x \log c(n) = b(n+1) - b(n), \quad D_y b(n) = c(n) - c(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Тогда

i) выполняются следующие уравнения Дарбу:

$$[\log c(n)]_{xy} = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.3}$$

ii) формулы

$$(D_x + b(n))\psi(n) + \psi(n-1) = 0, \quad D_y\psi(n) = c(n)\psi(n+1), \tag{2.4}$$

переводят решения уравнений (ср. (2.1)) в решения:

$$[D_xD_y + b(n)D_y + c(n)]\psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

и коммутируют друг с другом операторы из (2.4).

◀ Пусть выполнены уравнения (2.2). Тогда в силу равенства смешанных производных

$$D_xD_y(\log c(n)) = D_yD_x(\log c(n)) = b_y(n+1) - b_y(n) = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n),$$

что даёт цепочку уравнений Дарбу. Для доказательства ii) определим операторы «сдвига» $T^{\pm 1}: \psi(n) \to \psi(n \pm 1)$. Тогда, используя формулы $Tc(n) = c(n+1)T$, $T^{-1}c(n)T = c(n-1)$, $[D_x, D_y] = [D_x, T] = [D_y, T] = 0$, получаем:

$$[D_x+b(n)+T^{-1},\ D_y-c(n)T] = (-c_x(n)+c(n)b(n+1)-b(n)c(n))T+c(n)-c(n-1)-b_y(n) = 0. \blacktriangleright \tag{2.6}$$

Разрешимость линейных уравнений (2.1)), в теории преобразований Дарбу (см. [6]), удаётся связать с условиями замыкания цепочки нелинейных уравнений типа (2.3) для коэффициентов этих линейных уравнений. Для уравнений (2.2) простейшие условия такого рода соответствуют задаче Дирихле и занулению функций $c(n) = c(n; x, y)$ при $n \leq 0$ и $n > N \geq 1$. В случае $N = 1$ это даёт скалярное уравнение $[\log c(1)]_{xy} + 2c(1) = 0$, эквивалентное *уравнению Лиувилля* $\alpha u_{xy} + 2e^{\alpha u} = 0$, с точностью до замены вида $c(n) = e^{\alpha u}$. Характерное свойство, свидетельствующее об интегрируемости уравнения Лиувилля, формулируется при $\alpha = -2$ в виде следующего уравнения:

$$D_y(u_2 + u_1^2) = 0, \quad u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}. \tag{2.7}$$

Здесь $u(x, y)-$произвольное решение рассматриваемого уравнения , выполненное с учётом уравнения Лиувилля и его дифференциальных следствий.

В общем случае экспоненциальных систем вида[1]

$$[\log c(n)]_{xy} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{n,j} c(j), \quad n \in [N], \quad \det(\alpha_{nj}) \neq 0, \tag{2.8}$$

задача об условиях существовании «лиувиллевских многочленов», аналогичных (2.7), была решена в препринте 1981 г. [9]. Точнее, в работе было доказано, что наличие достаточного набора дифференциальных соотношений вида (2.7), с необходимостью приводит нас к матрицам Картана (α_{nj}), соответствующим полупростым алгебрам Ли. Представляется интересным, в дополнение к [9] и работе А.Н. Лезнова [10], связать лиувиллевские многочлены[2] для экспоненциальных систем (2.8) с формулой Фаа-ди-Бруно (1.1) и рассмотреть возможность их некоммутативного обобщения. Ограничимся здесь двумя простыми примерами.

Скалярное уравнение $u_{xy} = F$ с произвольной функцией $F = F(u)$ позволяет определить оператор D_y, действующий на множестве многочленов от дифференциальных переменных (1.2):

$$D_y = F\frac{\partial}{\partial u_1} + D_x(F)\frac{\partial}{\partial u_2} + \sum_{j>2}^{\infty} F^{(j-1)}\frac{\partial}{\partial u_j}, \quad F^{(n)} = D_x^n(F \circ u). \tag{2.9}$$

Коэффициенты (ср. (1.1)) этого оператора, рассматриваемого на решениях уравнения $u_{xy} = F(u)$, однозначно определяются условием коммутирования $D_x \circ D_y = D_y \circ D_x$ векторных полей (1.4) и (2.9), соответствующих x и y дифференцированиям, соответственно. Легко видеть, что условие $D_y(u_2 + u_1^2) = 0$ даёт $F' + 2F = 0$, т.е. приводит нас к уравнению Лиувилля. Можно проверить (см. [8]), что последнее условие на функцию $F(u)$ остаётся в силе во всех случаях разрешимости уравнения

$$D_y W(u_1, \ldots, u_m) = 0, \tag{2.10}$$

и что общее полиномиальное решение уравнения (2.10) в скалярном случае $u_{xy} = F(u)$ порождается многочленом минимального порядка $W_2 = u_2 + u_1^2$ и выражается через многочлены Белла (см. [1]).

Уравнение Лиувилля, как уже говорилось, соответствует задаче Дирихле с $N = 1$ для цепочки Дарбу (2.3). При $N = 2$ мы находим:

$$[\log c(1)]_{xy} = c(2) - 2c(1), \quad [\log c(2)]_{xy} = c(1) - 2c(2), \tag{2.11}$$

[1] «проинтегрированных» в известных работах А.Н. Лезнова и М.В. Савельева

[2] постоянные при изменяющимся y

что соответствует простейшей из матриц Картана с $\alpha_{ii} = -2$ на главной диагонали. Указанная в Лемме факторизация (2.2) этих уравнений приводит к дополнительным уравнениям для $b(1),\ b(2),\ b(3)$:

$$\begin{cases} D_y(b(1)) = c(1), \quad D_y(b(2)) = c(2) - c(1), \quad D_y(b(3)) = -c(2); \\ D_x \log c(1) = b(2) - b(1), \quad D_x \log c(2) = b(3) - b(2); \\ D_y(W_0) = 0, \quad W_0 = b(1) + b(2) + b(3). \end{cases} \tag{2.12}$$

Из этих уравнений, которые выполняются для задачи Дирихле (2.11) и при $N \geq 2$, видно, что в качестве дифференциальных переменных u_j при построении лиувиллевских многочленов W_m из формулы (2.10) можно выбирать

$$b_j(n) = D_x^j b(n), \quad j = 1,\ 2, \ldots, \quad n \in [N+1]. \tag{2.13}$$

В частности, при $N = 2$, определив при помощи уравнений из верхней строчки формулы (2.12) оператор D_y, действующий на множестве многочленов от дифференциальных переменных (2.13), мы находим решения W_m уравнения (2.10) при $m = 0,\ 1$:

$$W_0 = b(3) + b(2) + b(1), \quad W_1 = b^2(1) + b^2(2) + b^2(3) + 2b_1(2) + 4b_1(1),$$

и при $W_0 = 0$ находим следующий лиувиллевский многочлен W_2:

$$D_y b_2(1) = c(1)\left[b_1(2) - b_1(1) + (b(2) - b(1))^2\right],$$

$$D_y[b_2(1) + b_1(1)b(1) - b_1(2)b(1)] = c(1)\left[b^2(2) - b^2(1)\right] - c(2)\left[b(1)b(3) - b(1)b(2)\right],$$

$$W_2 = b_2(1) + b_1(1)b(1) - b_1(2)b(1) + \frac{1}{3}[b^3(1) + b^3(2) + b^3(3)].$$

Отметим, что указанное выше дополнительное условие $W_0 = 0$ позволяет избавиться от «лишней» переменной $b(3)$ и уравнять тем самым число неизвестных $b(j)$ и $c(j)$. При $N = 3$ аналогично строятся (при $W_0 = 0$) три независимых решения (2.10) порядков $m = 1,\ 2,\ 3$ и т.д.

3. Условия интегрируемости и задача Гельфанда-Сандерса

Пусть $n' = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ — наименьшее целое $\geq n/2$. Собирая в скалярной формуле Фаа-ди-Бруно члены с $u_j, j \in [n']$, мы получаем

$$f^{(n)} = u_n f_u + \binom{n}{1} u_{n-1} f_u f^{(1)} + \binom{n}{2} u_{n-2} f_u f^{(2)} \ldots + \binom{n}{n'} u_{n'} f_u [f^{(n')} - \varepsilon(n) u_{n'} f_u] + \ldots, \varepsilon(n) = \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 0, & n - \text{нечетный} \\ 1, & n - \text{четный} \end{cases},$$

где многоточие в конце формулы (3.1) обозначает слагаемые формулы (1.1), которые соответствуют урезанному диофантовому уравнению (1.3):

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + n'' k_{n''} = n, \quad n'' = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$$

и содержат только дифференциальные переменные (1.2) с номерами $j \in [n'']$. Например, при $n = 5$ мы имеем $n' = 3$, $n'' = 2$, и формула (3.1) записывается в виде

$$f^{(5)} = \left(u_5 + \binom{5}{1} u_4 f^{(1)} + \binom{5}{2} u_3 f^{(2)}\right) f_u + 5! \left(\sum_{k_1 + 2k_2 = 5} \frac{\hat{B}_1^{k_1} \hat{B}_2^{k_2}}{k_1! k_2!}\right) f(u).$$

Мы не останавливаемся на обобщении формулы (3.1) на векторный случай, но отметим очевидную аналогию с биномиальными коэффициентами формулы Лейбница:

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}$для дифференцирования произведения двух функций u и v.

Ниже речь идёт о применимости формул типа (3.1) к задаче об интегрировании по частям произвольных функций $f[u]$, где $[u]$ обозначает конечный набор дифференциальных переменных (1.2). Для этого выделяется линейная по старшим производным часть функции $f[u]$ и сравнивается с приведённой выше формулой (3.1). Теоретической вопрос о представимости функции $f[u]$ в виде производной $f[u] = D_x g[u]$ эквиволентно равенства нулю «вариационной производной»:

$$\frac{\delta f}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) - D_x^3\left(\frac{\partial f}{\partial u_3}\right) + \dots = 0. \tag{3.2}$$

Однако в приложениях требуется находить первообразную $g[u]$ от $f[u] = D_x g[u]$ и определять препятствия к интегрированию. Задача о препятствиях для интегрирования по частям, основанная на обобщённой формуле Лейбница (3.1), лежит в основе развитого в 80-е гг. в Уфе [7]), [11] симметрийного подхода к проблеме интегрируемости нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Простейшим из них является уравнение Лиувилля из предыдущего раздела, к которому следует добавить, как было указано в пионерской работе [8], ещё два уравнения:

$$u_{x,y} = F(u), \quad F(u) = e^u + \beta e^{\gamma u}, \quad \gamma = -1, \quad \gamma = -2. \tag{3.3}$$

Задача об эволюционных уравнений третьего порядка $u_t = F(u, u_1, u_2, u_3)$, интегрируемых в том же смысле, что и известное уравнение Кортевега—де Фриза, относится к задачам, для которых препятствия к интегрируемости, о которых говорилось выше, выделены в явном виде. Некоторое представление о многообразии этих обобщённых уравнений Кортевега—де Фриза даёт приведённый ниже список:

Уравнения типа Кортевега—де Фриза

$$u_t = u_3 + P(u)u_1, \quad P''' = 0, \tag{3.4}$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 + (\alpha e^{2u} + \beta e^{-2u})u_1. \tag{3.5}$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1} + \frac{r(u)}{u_1}, \quad \frac{d^5 r(u)}{du^5} = 0. \tag{3.6}$$

Общая задача о полиномиальных уравнениях $u_t = F([u])$ произвольного порядка, обладающих высшими симметриями, была исследована в работе [5], в которой для интегрирования по частям использовался альтернативный подход, предложенный И.М. Гельфандом. Существенную роль при этом играли свойства однородности рассматриваемых многочленов $F([u])$ и теоремы о делимости, связанные с теорией чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.Comtet *Advanced Combinatorics* // Dordrecht. 1974.
2. Faa di Bruno *Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel* // Quart.J.M. 1857. **1**. P. 359–360.
3. Rumen Mishkov *Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument* // Internat. J.Math. 2000. **24**(7). P. 481–491.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* Москва-Ижевск. 2012.
5. J.Sanders, J.P.Wang *On the integrability of homogeneous scalar evolution equations* // Journal of Diff. Eq-s. 1998. **147**. P. 410–34.

6. Веселов А.П., Шабат А.Б. *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера* // Функц. Анализ и его прилож. 1993. **27**(2). С. 1–21.
7. A.B. Shabat, V.V. Sokolov *Classification of integrable evolution equations* // Soviet Scientific Reviews, Section C. N.Y. Harwood Academic Publishers. 1984. V. 4. P. 221–280.
8. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Ур. Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // ДАН СССР. 1979. **247**(5).
9. Шабат А., Ямилов Р. *Экспоненц. системы типа I и матрицы Картана.* Preprint. Ufa. 1981. С. 1–22.
10. Лезнов А.Н. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве* // ТМФ. 1980. **42**(3). С. 343–349.
11. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. *О бесконечных алгебрах Ли-Беклунда* // Функц. Анализ и его прилож. 1980. **14**(4). С. 79–80.

Алексей Борисович Шабат,
ИТФ РАН им. Л.Д. Ландау,
просп. Академика Семенова, д. 1-А,
142432, г. Черноголовка, Россия
КЧГУ им. У.Д. Алиева,
ул.Ленина, 23,
369200, г. Карачаевск, Россия
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `shabatab@mail.ru`

Магомед Хочалаевич Эфендиев,
КЧГУ им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 23,
369200, г. Карачаевск, Россия
E-mail: `kchr1927@gmail.ru`