ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 111-118.

УДК 517.982.3

О ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

И.Х. МУСИН

Аннотация. Рассматривается гильбертово пространство F^2_φ целых функций n переменных, построенное при помощи выпуклой функции φ в $\mathbb{C}^n$, зависящей от модулей переменных и растущей на бесконечности быстрее $a\|z\|$ для любого $a > 0$. Изучается задача описания сопряжённого для него в терминах преобразования Лапласа функционалов. При определённых условиях на весовую функцию φ получено описание преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на F^2_φ. Доказательство основного результата основано на использовании новых свойств преобразования Юнга-Фенхеля и одного результата об асимптотике многомерного интеграла Лапласа, установленного Р.А. Башмаковым, К.П. Исаевым и Р.С. Юлмухаметовым.

Ключевые слова: гильбертово пространство, преобразование Лапласа, целые функции, выпуклые функции, преобразование Юнга-Фенхеля.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E10, 46F05, 42A38

1. Введение

1.1. О проблеме. Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$ и для $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ $abs\, u := (|u_1|, \dots, |u_n|)$.

Обозначим через $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ множество всех выпуклых функций g в $\mathbb{R}^n$ таких, что:
1) $g(x_1, \dots, x_n) = g(|x_1|, \dots, |x_n|)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
2) сужение g на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$ ($\|x\|$ – евклидова норма точки $x \in \mathbb{R}^n$).

С каждой функцией $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ свяжем гильбертово пространство

$$F^2_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z),\ f, g \in F^2_\varphi.$$

Если $\varphi(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, то F^2_φ – пространство Фока.

Очевидно, какова бы ни была функция $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}^n$ функция $f_\lambda(z) = e^{\langle\lambda, z\rangle}$ принадлежит F^2_φ. Поэтому для любого линейного непрерывного функционала S на пространстве F^2_φ корректно определена в $\mathbb{C}^n$ функция

$$\hat{S}(\lambda) = S(e^{\langle\lambda, z\rangle}),\ \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

– преобразование Лапласа функционала S. Легко видеть, что $\hat{S}$ – целая функция.

Обозначим через $(F^2_\varphi)^*$ сопряжённое пространство к пространству F^2_φ.

I.Kh. Musin, On a Hilbert space of entire functions.

© Мусин И.Х. 2017.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №15-01-01661) и Программы Президиума РАН (проект «Комплексный анализ и функциональные уравнения».)

Поступила 22 мая 2017 г.

Цель работы – нахождение условий на $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$, при выполнении которых пространство $\widehat{(F^2_\varphi)^*}$ преобразований Лапласа линейных непрерывных функционалов на F^2_φ допускает описание как $F^2_{\varphi^*}$.

Если $\varphi(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, то $\widehat{(F^2_\varphi)^*} = F^2_\varphi$. Действительно, в этом случае проблема описания пространства $(F^2_\varphi)^*$ в терминах преобразования Лапласа функционалов легко решается благодаря классическому представлению: для любого $f \in F^2_\varphi$

$$f(\lambda) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) e^{\langle \lambda, \overline{z} \rangle - \|z\|^2} \, d\mu_n(z), \ \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Для случая, когда функция $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ – радиальная, решение указанной проблемы было получено В.В. Напалковым и С.В. Попёновым [5, 6].

1.2. Обозначения и определения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть $\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма u.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – длина мультииндекса α, $\tilde{\alpha} := (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1)$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha_z := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$

$$c_\alpha(\varphi) := \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\, z)} \, d\mu_n(z).$$

Для функции u с областью определения, содержащей множество $(0, \infty)^n$, определим функцию $u[e]$ в $\mathbb{R}^n$ по правилу:

$$u[e](x) = u(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непрерывных функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{u(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Преобразование Юнга-Фенхеля функции $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ есть функция $u^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, определяемая по формуле: $u^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - u(y))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Если E – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, h – выпуклая функция в E, $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$, $p > 0$, то $D^h_y(p) := \{x \in E : h(x) + h^*(y) - \langle x, y \rangle \le p\}$, $y \in \tilde{E}$.

Через $V(D)$ обозначаем n-мерный объём множества $D \subset \mathbb{R}^n$.

1.3. Основной результат.

Теорема. *Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $K > 0$ $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$*

$$\frac{1}{K} \le V(D^{\varphi[e]}_\alpha(1/2)) V(D^{\varphi^*[e]}_\alpha(1/2)) \prod_{j=1}^n \alpha_j \le K.$$

Тогда отображение $\mathcal{L} : S \in (F^2_\varphi)^* \to \hat{S}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $(F^2_\varphi)^*$ и $F^2_{\varphi^*}$.

Доказательство Теоремы (п. 3.2) основано на использовании новых свойств преобразования Юнга-Фенхеля (п. 2.1) и одного результата об асимптотике многомерного интеграла Лапласа из работы [9] (п. 2.2).

2. Вспомогательные сведения и результаты

2.1. О некоторых свойствах преобразования Юнга-Фенхеля. Легко проверить, что справедливо следующее

Предложение 1. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(u[e])^*(x) > -\infty$ для $x \in \mathbb{R}^n$, $(u[e])^*(x) = +\infty$ для $x \notin [0, \infty)^n$, $(u[e])^*(x) < +\infty$ для $x \in [0, \infty)^n$.*

Отметим лишь, что последнее утверждение Предложения 1 следует, например, из того, что каково бы ни было $M > 0$, найдётся постоянная $A > 0$ такая, что

$$(u[e])^*(x) \le \sum_{1 \le j \le n: x_j \ne 0} (x_j \ln \frac{x_j}{M} - x_j) + A, \ x \in [0, \infty)^n.$$

Предложение 2. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\lim_{\substack{x \to \infty, \\ x \in [0,\infty)^n}} \frac{(u[e])^*(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Доказательство. Для любых $x \in [0, \infty)^n$ и $t \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(u[e])^*(x) \ge \langle x, t\rangle - (u[e])(t).$$

Пользуясь этим неравенством, получаем, что для любого $M > 0$

$$(u[e])^*(x) \ge M\|x\| - u[e]\left(\frac{Mx}{\|x\|}\right), \ x \in [0, \infty)^n \setminus \{0\}.$$

Отсюда утверждение следует. □

Следующие три утверждения были доказаны в работе [1] (Lemma 6, Proposition 3, Proposition 4).

Предложение 3. *Пусть $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \le \sum_{\substack{1 \le j \le n: \\ x_j \ne 0}} (x_j \ln x_j - x_j), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) \le 0.$$

Предложение 4. *Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j \ln x_j - x_j), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Предложение 5. *Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \le j \le n: \\ x_j \ne 0}} (x_j \ln x_j - x_j), x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Предложения 4 и 5 можно усилить, пользуясь результатами Д. Асагры [2, 3]. Им была доказана следующая

Теорема A. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое и выпуклое. Для любой выпуклой функции $f : U \to \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественно аналитическая выпуклая функция $g : U \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) - \varepsilon \le g(x) \le f(x), \ x \in U$.*

Таким образом, справедливо [3]

Следствие A. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое и выпуклое. Для любой выпуклой функции $f : U \to \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно дифференцируемая выпуклая функция $g : U \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) - \varepsilon \le g(x) \le f(x), \ x \in U$.*

Пользуясь Предложением 4 и Следствием A, легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Предложение 6. *Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j \ln x_j - x_j), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Кроме того, справедливо следующее

Предложение 7. *Пусть выпуклая функция $u \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) = \sum_{\substack{1 \le j \le n: \\ x_j \ne 0}} (x_j \ln x_j - x_j),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n \setminus \{0\};$$

$$(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0.$$

Доказательство. Согласно Предложению 6 наше утверждение справедливо для точек $x \in (0, \infty)^n$. Пусть теперь $x = (x_1, \dots, x_n)$ принадлежит границе $[0, \infty)^n$ и $x \ne 0$. Для простоты рассмотрим случай, когда первые k $(1 \le k \le n-1)$ координат x положительны, а все другие равны 0. Для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \ge \sum_{j=1}^{k} x_j(\xi_j + \mu_j) - (u(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) + u^*(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})).$$

Из этого неравенства получаем, что

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \ge \sum_{j=1}^{k} x_j(\xi_j + \mu_j) -$$

$$-(u(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_k}, 0, \dots, 0) + u^*(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_k}, 0, \dots, 0)).$$

Определим функцию u_k на $\mathbb{R}^k$ по правилу: $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \to u(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$. Отметим, что для любых $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k, \check{t} = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$u^*(\check{t}) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} (\langle \check{t}, v \rangle - u(v)) \le$$

$$\le \sup_{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}} (\sum_{j=1}^{k} t_j v_j - u(v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)) = \sup_{v \in \mathbb{R}^k} (\langle t, v \rangle - u_k(v)) = u_k^*(t).$$

Пользуясь этим и вышеприведённым неравенством, имеем для $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и всех $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k), \tilde{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \ge \langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle - u_k[e](\tilde{\xi}) + \langle \tilde{x}, \tilde{\mu} \rangle - u_k^*[e](\tilde{\mu}).$$

Следовательно,

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \ge (u_k[e])^*(\tilde{x}) + (u_k^*[e])^*(\tilde{x}).$$

Так как по Предложению 6

$$(u_k[e])^*(\tilde{x}) + (u_k^*[e])^*(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{k} (x_j \ln x_j - x_j),$$

то $(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \ge \sum\limits_{j=1}^{k} (x_j \ln x_j - x_j)$. Отсюда и из Предложения 3 следует справедливость первого утверждения настоящего Предложения.

Если $x = 0$, то $(u[e])^*(0) = -\inf\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u[e](\xi) = -u(0)$, $(u^*[e])^*(0) = -\inf\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u^*[e](\xi) = -u^*(0) = = \inf\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} u(\xi) = u(0)$. Следовательно, $(u[e])^*(0) + (u^*[e])^*(0) = 0$. □

2.2. Асимптотика многомерного интеграла Лапласа. В работе [9] установлена следующая

Теорема B. *Пусть E – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, h – выпуклая функция в E, $\tilde{E} = \{y \in \mathbb{R}^n : h^*(y) < \infty\}$ и внутренность $\tilde{E}$ – не пустое множество. Пусть*

$$D^h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : h(x) + h^*(y) - \langle x, y \rangle \le 1\},$$

$$D_y^h = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in D\},\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$e^{-1}V(D_y^h)e^{h^*(y)} \le \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle x,y\rangle - h(x)}\,dx \le (1+n!)V(D_y^h)e^{h^*(y)},\ y \in \tilde{E}.$$

Здесь предполагается, что $h(x) = +\infty$ для $x \notin E$.

3. Описание сопряжённого пространства

3.1. Вспомогательные леммы. При доказательстве теоремы будут полезны следующие четыре леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда система* $\{\exp\langle\lambda, z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ *полна в* F_φ^2.

Доказательство. Пусть S – линейный непрерывный функционал на пространстве F_φ^2 такой, что $S(e^{\langle\lambda,z\rangle}) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Поскольку для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $(D_\lambda^\alpha \hat{S})(\lambda) = S(z^\alpha e^{\langle z,\lambda\rangle})$, то из этого равенства получаем, что $S(z^\alpha) = 0$. Так как функция $\varphi(|z_1|, \ldots, |z_n|)$ – выпуклая в $\mathbb{C}^n$, то из результата Б.А. Тейлора о весовой аппроксимации целых функций полиномами [4, Theorem 2] следует, что полиномы плотны в F_φ^2. Значит, S – нулевой функционал. По известному следствию из теоремы Хана-Банаха получаем, что система $\{\exp\langle\lambda, z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ полна в F_φ^2. $\square$

Отметим, что система $\{z^\alpha\}_{|\alpha|\ge 0}$ ортогональна в F_φ^2. Кроме того, она полна в F_φ^2. Следовательно, система $\{z^\alpha\}_{|\alpha|\ge 0}$ – базис в F_φ^2.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$c_\alpha(\varphi) \ge \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

В частности, для любого $M > 0$ *найдётся постоянная* $C_M > 0$ *такая, что для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $c_\alpha(\varphi) \ge C_M M^{|\alpha|}$.

Доказательство. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и для любых положительных чисел $R_1, \ldots, R_n$ имеем

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(r_1,\cdots,r_n)}\,dr_1 \cdots dr_n \ge$$

$$\ge (2\pi)^n \int\limits_0^{R_1} \cdots \int\limits_0^{R_n} r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(R_1,\cdots,R_n)}\,dr_1 \cdots dr_n =$$

$$= (2\pi)^n \frac{R_1^{2\alpha_1+2}}{2\alpha_1+2} \cdots \frac{R_n^{2\alpha_n+2}}{2\alpha_n+2} e^{-2\varphi(R_1,\cdots,R_n)}.$$

Отсюда получаем, что для любых $t \in \mathbb{R}^n$

$$c_\alpha(\varphi) \ge \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{\langle 2\tilde{\alpha}, t\rangle - 2\varphi[e](t)}.$$

Следовательно,

$$c_\alpha(\varphi) \ge \frac{\pi^n}{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n} e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Теперь, пользуясь Предложением 2, легко получим и второе утверждение Леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть целая функция в* $\mathbb{C}^n$ $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} a_\alpha z^\alpha \in F_\varphi^2$. *Тогда* $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) < \infty$ *и* $\|f\|_\varphi^2 = \sum_{|\alpha|\ge 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$.

Обратно, пусть последовательность $(a_\alpha)_{|\alpha|\ge 0}$ *комплексных чисел* a_α *такова, что сходится ряд* $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. *Тогда* $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{C}^n)$. *Причём,* $f \in F_\varphi^2$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$ из класса F^2_φ. Тогда

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha \sum_{|\beta|\geq 0} \overline{a}_\beta \overline{z}^\beta e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi).$$

Обратно, из сходимости ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0} |a_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ и Леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ $|a_\alpha| \leq c_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}$. Это означает, что $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$. Легко видеть, что $f \in F^2_\varphi$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$*

$$(2\pi)^n e^{-1} V(D^{\varphi[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)} \leq c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D^{\varphi[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Тогда

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2\varphi(r_1,\cdots,r_n)}\, dr_1 \cdots dr_n =$$

$$= (2\pi)^n \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty e^{(2\alpha_1+2)t_1+\cdots+(2\alpha_n+2)t_n - 2\varphi[e](t_1,\ldots,t_n)}\, dt_1 \cdots dt_n.$$

То есть

$$c_\alpha(\varphi) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle 2\tilde\alpha, t\rangle - 2\varphi[e](t)}\, dt.$$

По Теореме B имеем

$$(2\pi)^n e^{-1} V(D^{2\varphi[e]}_{2\tilde\alpha}) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)} \leq c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D^{2\varphi[e]}_{2\tilde\alpha}) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)}$$

Так как $D^{2\varphi[e]}_{2\tilde\alpha} = D^{\varphi[e]}_{\tilde\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)$, то отсюда и из предыдущего неравенства следует справедливость нашего утверждения. $\square$

3.2. Доказательство Теоремы. Покажем, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F^2_\varphi)^*$ в $F^2_{\varphi^*}$. Пусть $S \in (F^2_\varphi)^*$. Тогда найдётся функция $g_S \in F^2_\varphi$ такая, что $S(f) = (f, g_S)_\varphi$, то есть

$$S(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g_S(z)} e^{-2\varphi(abs\ z)}\, d\mu_n(z),\ f \in F^2_\varphi.$$

При этом, $\|S\| = \|g_S\|_\varphi$. Если $g_S(z) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} b_\alpha z^\alpha$, то $\hat S(\lambda) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{c_\alpha(\varphi)\overline{b_\alpha}}{\alpha!} \lambda^\alpha,\ \lambda \in \mathbb{C}^n$. Следовательно,

$$\|\hat S\|^2_{\varphi^*} = \sum_{|\alpha|\geq 0} \left(\frac{c_\alpha(\varphi)|b_\alpha|}{\alpha!}\right)^2 c_\alpha(\varphi^*). \tag{1}$$

По Лемме 3 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$

$$c_\alpha(\varphi) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D^{\varphi[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha)},$$

$$c_\alpha(\varphi^*) \leq (2\pi)^n (1+n!) V(D^{\varphi^*[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde\alpha)}.$$

Следовательно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$

$$c_\alpha(\varphi) c_\alpha(\varphi^*) \leq (2\pi)^{2n} (1+n!)^2 V(D^{\varphi[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) V(D^{\varphi^*[e]}_{\tilde\alpha}(1/2)) e^{2(\varphi[e])^*(\tilde\alpha) + 2(\varphi^*[e])^*(\tilde\alpha)}.$$

Согласно Предложению 6 для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n}((\alpha_j + 1)\ln(\alpha_j + 1) - (\alpha_j + 1)).$$

Так как по формуле Стирлинга [10, С. 792] для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(m+1)\ln(m+1) - (m+1) = \ln \Gamma(m+1) - \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln(m+1) - \frac{\theta}{12(m+1)},$$

где $\theta \in (0,1)$ зависит от m, то

$$(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}) = -n\ln\sqrt{2\pi} + \sum_{j=1}^{n}(\ln\Gamma(\alpha_j+1) + \frac{1}{2}\ln(\alpha_j+1) - \frac{\theta_j}{12(\alpha_j+1)}),$$

где $\theta_j \in (0,1)$ зависит от α_j. Тогда

$$\frac{e^{2((\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}))}}{\alpha!^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j+1)e^{-\frac{\theta_j}{6(\alpha_j+1)}}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leq (2\pi)^n(1+n!)^2 V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2))V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2))\prod_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j.$$

Пользуясь условием на φ, получаем, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}{\alpha!^2} \leq (2\pi)^n(1+n!)^2 K.$$

Отсюда и из (1), полагая $M_1 = (2\pi)^n(1+n!)^2K$, получаем

$$\|\hat{S}\|_{\varphi^*}^2 \leq M_1\sum_{|\alpha|\geq 0}c_\alpha(\varphi)|b_\alpha|^2 = M_1\|g_S\|_\varphi^2 = M_1\|S\|^2.$$

Значит, $\hat{S} \in F_{\varphi^*}^2$. Кроме того, из последней оценки следует, что линейное отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F_\varphi^2)^*$ в $F_{\varphi^*}^2$ непрерывно.

Отметим, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F_\varphi^2)^*$ в $F_{\varphi^*}^2$ инъективно, поскольку по Лемме 1 система $\{\exp\langle\lambda, z\rangle\}_{\lambda\in\mathbb{C}^n}$ полна в F_φ^2.

Покажем, что отображение $\mathcal{L}$ действует из $(F_\varphi^2)^*$ на $F_{\varphi^*}^2$. Пусть $G \in F_{\varphi^*}^2$. Пользуясь представлением целой функции G в виде ряда Тейлора $G(\lambda) = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} d_\alpha\lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, имеем $\|G\|_{\varphi^*}^2 = \sum\limits_{|\alpha|\geq 0}|d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*)$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ определим числа $g_\alpha = \frac{\overline{d_\alpha}\alpha!}{c_\alpha(\varphi)}$ и рассмотрим вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{|\alpha|\geq 0}|g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$. Имеем

$$\sum_{|\alpha|\geq 0}|g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha|\geq 0}\left|\frac{\overline{d_\alpha}\alpha!}{c_\alpha(\varphi)}\right|^2 c_\alpha(\varphi) = \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)}|d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*).$$

По Лемме 4 для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi) \geq e^{-1}V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2))e^{2(\varphi[e])^*(\tilde{\alpha})},$$

$$c_\alpha(\varphi^*) \geq e^{-1}V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2))e^{2(\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha})}.$$

Следовательно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*) \geq e^{-2}V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi[e]}(1/2))V(D_{\tilde{\alpha}}^{\varphi^*[e]}(1/2))e^{2((\varphi[e])^*(\tilde{\alpha}) + (\varphi^*[e])^*(\tilde{\alpha}))}.$$

Отсюда и из равенства (2) для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \le \frac{e^2(2e\pi)^n}{V(D_{\tilde\alpha}^{\varphi[e]}(1/2))V(D_{\tilde\alpha}^{\varphi^*[e]}(1/2))\prod\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j+1)} .$$

Пользуясь условием на φ, получаем, что $\frac{\alpha!^2}{c_\alpha(\varphi)c_\alpha(\varphi^*)} \le Ke^2(2e\pi)^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Следовательно, для рассматриваемого ряда имеем

$$\sum_{|\alpha|\ge 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi) \le Ke^2(2e\pi)^n \sum_{|\alpha|\ge 0} |d_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi^*) = Ke^2(2e\pi)^n \|G\|^2_{\varphi^*}. \tag{3}$$

Итак, ряд $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} |g_\alpha|^2 c_\alpha(\varphi)$ сходится. Но тогда по Лемме 3 функция $g(\lambda) = \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} g_\alpha \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, является целой, причём, в силу (3) g принадлежит F^2_φ и

$$\|g\|^2_\varphi \le Ke^2(2e\pi)^n \|G\|^2_{\varphi^*}. \tag{4}$$

Определим функционал S на F^2_φ формулой

$$S(f) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-2\varphi(absz)}\, d\mu_n(z),\ f \in F^2_\varphi.$$

Очевидно, S – линейный непрерывный функционал на F^2_φ. Причём, $\hat{S} = G$. Поскольку $\|S\| = \|g\|_\varphi$, то оценка (4) показывает, что обратное отображение $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывно. Таким образом, $\mathcal{L}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $(F^2_\varphi)^*$ и $F^2_{\varphi^*}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Kh. Musin *On a space of entire functions rapidly decreasing on R^n and its Fourier transform* // Concrete Operators. 2015. Volume 2, Issue 1. P. 120–138.
2. D. Azagra *Global and fine approximation of convex functions* // Proc. London Math. Soc. (2013) 107 (4). P. 799–824.
3. D. Azagra *Global approximation of convex functions.* arXiv:1112.1042v7.
4. B.A. Taylor *On weighted polynomial approximation of entire functions* // Pacific Journal of Mathematics. 1971. V. 36, №2. P. 523–539.
5. Напалков В.В., Попёнов С.В. *О преобразовании Лапласа функционалов в весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$* // Доклады Академии наук. 1997. Т. 352, №5. С. 595–597.
6. Попёнов С.В. *О преобразовании Лапласа функционалов в некоторых весовых пространствах Бергмана в $\mathbb{C}^n$* // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Уфа, 1996. Т. 2. Комплексный анализ. С. 125–132.
7. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 132–137.
8. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // Доклады Академии наук. Т. 413. № 1. 2007. С. 20–22.
9. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимск. матем. журн., 2010. Том 2, № 1. С. 3–16.
10. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II.* М.: Наука, 1970.

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`