ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 102-110.

УДК 517.5

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СО СПЕКТРОМ НУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТИ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе показывается, что каждое аналитическое решение однородного уравнения свертки с характеристической функцией экспоненциального минимального типа в области своего существования представляется в виде ряда экспоненциальных многочленов. Данный ряд при этом сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах этой области. Известно, что если характеристическая функция имеет экспоненциальный минимальный тип, то плотность её нулевого множества равна нулю. Поэтому в работе рассматриваются последовательности показателей, имеющие нулевую плотность. Дается простое описание пространства коэффициентов упомянутого ряда. Кроме того, приводится также полное описание всех возможных систем функций, построенных по относительно малым группам, для которых имеет место представление в виде ряда экспоненциальных многочленов.

Ключевые слова: ряд экспоненциальных многочленов, относительно малые группы, базис, выпуклая область.

Mathematics Subject Classification: 30D10

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел, т.е. $\lambda_k \in \mathbb{C}$, n_k — натуральное число, называемое кратностью точки λ_k, $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $B(z, r)$ — круг с центром в точке z радиуса r. Обозначим через $n(r, \Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей) попавших в круг $B(0, r)$, $r > 0$. Верхней плотностью последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda)}{r}.$$

Рассмотрим последовательность простых точек $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}. \qquad (1)$$

Д. Полиа [1] доказал, что при условии нулевой плотност $\bar{n}(\Lambda) = 0$ каждая сумма ряда (1) (она автоматически является аналитической функцией) имеет выпуклую область существования. В работе [2] Д. Полиа обобщил этот результат. Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$M_f(g) = \int_{\mathbb{C}} g(z + w) d\mu(z) \equiv 0, \qquad (2)$$

где μ — комплексная мера с компактным носителем и

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} e^{\lambda z} d\mu(z)$$

O.A. Krivosheeva, Invariant subspaces with zero density spectrum.

Поступила 31 октября 2016 г.

— преобразование Лапласа функционала, порождающего оператор свертки, называемое характеристической функцией оператора M_f. Предположим, что $f(\lambda)$ — функция экспоненциального минимального типа, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такая, что $\ln|f(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon) + \varepsilon|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда оператор M_f определен в пространстве функций g аналитических в окрестности начала (каждая g является аналитической в своей окрестности). В работе [2] доказывается, что при указанном условии каждое аналитическое решение уравнения (2) имеет выпуклую область существования.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность нулей и их кратностей функции f. Отметим, что если $f(\lambda)$ — функция экспоненциального минимального типа, то плотность $\bar{n}(\Lambda)$ ее нулевого множества равна нулю (см. [3], гл. I, §11, теорема Линделефа).

Валирон в работе [4] доказал, что каждое аналитическое решение уравнения (2) в области своего существования представляется в виде

$$g(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{3}$$

где $\{r_m\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что на окружностях $|\lambda| = r_m$, $m = 1, 2, \ldots$, модуль функции f имеет подходящие оценки снизу. Система функций $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$, называется множеством элементарных решений уравнения (2).

В настоящей работе этот результат Валирона усиливается. Показывается, что каждое аналитическое решение уравнения (2) с характеристической функцией $f(\lambda)$ экспоненциального минимального типа в области своего существования представляется в виде ряда

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z), \tag{4}$$

где $\{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — фиксированная система функций, каждая из которых является конечной линейной комбинацией функций из системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Ряд (4) при этом сходится абсолютно и равномерно на компактах. Дается простое описание пространства коэффициентов $d = \{d_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Кроме того, приводится также полное описание всех возможных систем $\{e_{m,j}(z)\}$ построенных по относительно малым группам U_m показателей λ_k функций из $\mathcal{E}(\Lambda)$, для которых имеет место представление (4).

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D. Через $H^*(D)$ обозначим сильно сопряженное к $H(D)$ пространство, называемое пространством аналитических функционалов. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Подпространство $W(\Lambda, D)$ является замкнутым и инвариантным относительно оператора дифференцирования. Если $a \in \mathbb{C}$, то положим:

$$W(\Lambda, a) = \bigcup_{D \ni a} W(\Lambda, D),$$

где D пробегает множество всех выпуклых окрестностей точки a. Пространство $W(\Lambda, a)$ наделим топологией индуктивного предела.

Отметим, что согласно указанному выше результату Валирона пространство аналитических решений уравнения (2) с характеристической функцией $f(\lambda)$ экспоненциального минимального типа вложено в пространство $W(\Lambda, 0)$.

Лемма 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $a \in \mathbb{C}$. Предположим, что каждая функция из $W(\Lambda, a)$ имеет выпуклую область существования. Тогда $\bar{n}(\Lambda) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\bar{n}(\Lambda) > 0$. Рассмотрим вначале случай простых λ_k, т.е. $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty}$. Из теоремы 18 гл. IV, §7 в книге [3] следует, что в этом случае система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в пространстве функций аналитических в круге с центром в точке a и радиуса $\bar{n}(\Lambda)/e$. Следовательно, верно вложение $H(B(a, \bar{n}(\Lambda)/e)) \subset W(\Lambda, a)$. Поскольку не все функции из $H(B(a, \bar{n}(\Lambda))/e)$ имеют выпуклую область существования, то это противоречит условию леммы.

Покажем, что общий случай кратных λ_k сводится к разобранному случаю. Для этого введем вспомогательную последовательность $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_{k,j}, 1\}_{k=1,j=1}^{\infty,n_k}$. Точки $\lambda_{k,j}$ выберем произвольно из условий: 1) все $\lambda_{k,j}$ различные; 2) $|\lambda_{k,j} - \lambda_k| < 1$, $j = \overline{1, n_k}$, $k \geq 1$. Тогда системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ и $\mathcal{E}(\tilde{\Lambda})$ полны или неполны одновременно в любой выпуклой области D.

Действительно, пусть D — выпуклая область. Напомним, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ $(\mathcal{E}(\tilde{\Lambda}))$ неполна в D тогда и только тогда, когда существует целая функция $f(\tilde{f})$ экспоненциального типа, удовлетворяющая двум условиям: 1) сопряженная диаграмма $f(\tilde{f})$ лежит в D; 2) функция $f(\tilde{f})$ обращается в нуль в точках $\lambda_k(\lambda_{k,j})$ с кратностью не меньшей, чем $n_k(n_k = 1)$ (один). Итак, пусть $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Тогда существует функция f обладающая свойствами 1), 2). Она представляется в виде $f = hg$, где h и g — целые функции первого порядка (не обязательно конечного, т.е., экспоненциального типа). При этом функция h обращается в нуль только в точках λ_k с кратностью n_k, а функция g — в остальных нулях функции f с нужной кратностью. Пусть $\tilde{h}$ — целая функция первого порядка, которая обращается в нуль только в точках $\lambda_{k,j}$ с кратностью один. Рассмотрим функцию $\tilde{f} = \tilde{h}g$. В силу выбора точек $\lambda_{k,j}$ из теоремы В работы [5] следует, что $\tilde{f}$ — целая функция экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой совпадает с сопряженной диаграммой функции f, т.е. лежит в D. По построению функция $\tilde{f}$ обращается в нуль в точках $\lambda_{k,j}$ с кратностью не меньшей, чем один. Таким образом, $\tilde{f}$ удовлетворяет условиям 1), 2), т.е., $\mathcal{E}(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Обратное утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевую плотность $\bar{n}(\Lambda) = 0$. Построим систему функций $\{e_{m,j}(z)\}$, о которой говорилось выше.

Пусть $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на конечные группы U_m. Сделаем перенумерацию членов Λ. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек λ_k в группе U_m. Положим $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. Будем говорить, что группы $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ относительно малы, если

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Отсюда легко следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} = 1.$$

Из последнего равенства и условия $\bar{n}(\Lambda) = 0$ получаем:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0. \tag{5}$$

Следуя работе [6], по системе $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$ построим новую систему функций $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Пусть Γ_m — контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий точки группы U_m, и

$$\omega_m(\lambda) = \prod_{l=1}^{M_m}(\lambda - \lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Положим

$$P_m(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\frac{\exp(z\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)}d\zeta, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Эта формула определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше N_m-1, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе с производными до порядка $n_{m,l} - 1$ принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $\exp(z\zeta)$ и ее производных, т.е.

$$P_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, z) = z^n \exp(\lambda_{m,l} z), \quad l = 1, 2, \ldots, M_m, \quad n = 0, 1, \ldots, n_{m,l} - 1.$$

Положим

$$e_{m,j}(z) = P_m^{(j-1)}(\lambda_{m,1}, z), \quad j = 1, \ldots, N_m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пусть U — тривиальное разбиение последовательности Λ (т.е. каждая группа U_m состоит из одной точки $\lambda_{m,1} = \lambda_m$), то нетрудно заметить, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ совпадает с $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Рассмотрим также систему функций

$$e'_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j,k} e_{m,k}(z), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_m. \tag{7}$$

Набор $\{e'_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ обозначим $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$, где $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\mathcal{A}_m = (a_{m,j,k})$ —матрица перехода от $\{e_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$ к $\{e'_{m,j}\}_{j=1}^{N_m}$. Будем говорить, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ нормирована, если $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_m} |a_{m,j,k}| = 1$, $j = 1, \ldots, N_m$, $m = 1, 2, \ldots$

Для каждой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ зафиксируем последовательность выпуклых компактов $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset \mathrm{int}\ K_{p+1}$, $p \geq 1$, (int — внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$.

Пусть $\Lambda = \{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $|\xi_m| \to \infty$ при $k \to \infty$ и e_m — целые функции, $m \geq 1$. Будем говорить (см. [7]), что $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\xi_m\}$, если для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ выполнены два условия:

1) для каждого $p \geq 1$ существуют число $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w\in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\xi_m)), \quad m \geq 1;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют число $a > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\xi_m)) \leqslant \sup_{w\in K_s} |e_m(w)|, \quad m \geq 1.$$

Здесь $H_M(\lambda)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(\lambda) = \sup_{w\in M} Re(\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Условия 1) и 2) означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\xi_m z)\}_{m=1}^{\infty}$.

С учетом равенства (5) по теореме 6 из работы [8] верно утверждение:

Лемма 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Тогда любая нормированная система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ определенная по формулам (6), (7) является почти экспоненциальной последовательностью с показателями $\{\lambda_{m,1}\}$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где $\lambda'_{m,j} = \lambda_{m,1}$, $j = \overline{1, N_m}$).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A}) = \{e'_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z). \tag{8}$$

Из леммы 2 сразу следует, что для ряда (8) верна теорема 3.1 из работы [9] (теорема Абеля для рядов экспоненциальных многочленов). Для ее формулировки нам понадобятся некоторые обозначения.

Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество единичной окружности $\mathbb{S}$ с центром в нуле. Θ — выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \xi \in \Theta\}.$$

Θ — выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки), если $\Theta = \mathbb{S}$. Отметим еще, что внутренность E лежит в $E(\Theta)$. Согласно лемме 2.1 в работе [9] множество $E(\Theta)$ является выпуклой областью.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех частичных пределов последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$.

Теорема 1 [9]. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы, и $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A}) = \{e'_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ — нормированная система. Предположим, что общий член ряда (8) ограничен на каждом компакте открытого множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из выпуклой области $D = E(\Theta(\Lambda))$.*

Поскольку $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевую плотность, то система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$ для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$. Действительно, функционал $\mu \in H^*(D)$, преобразование Лапласа которого равно

$$f(z) = \exp(az) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^2\right)^{n_k} \tag{9}$$

обращается в нуль на всех функциях системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ и $\mu \neq 0$ (a — некоторая точка области D). В силу неполноты $\mathcal{E}(\Lambda)$ система $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} \subset H^*(D)$ для любой выпуклой области D, т.е., $\mu_{m,j}(e_{l,p}) = 1$, если $m = l$, $j = p$, и $\mu_{m,j}(e_{l,p}) = 0$ в противном случае (см. [10], §2).

Пусть $a \in \mathbb{C}$ и функция $g \in W(\Lambda, a)$ раскладывается в ряд, сходящийся равномерно на каждом компакте открытого множества $E \subset \mathbb{C}$

$$g(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z). \tag{10}$$

По теореме 1 этот ряд сходится равномерно на любом компакте из выпуклой области $D = E(\Theta(\Lambda))$. Тогда согласно сказанному выше коэффициенты однозначно определяются по формулам $d_{m,j} = \mu_{m,j}(g)$, $m \geq 1$, $j = \overline{1, N_m}$, где $\{\mu_{m,j}\} \subset H^*(D)$ — биортогональная к $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ система функционалов.

Пусть $a \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$, если каждый его элемент g единственным образом раскладывается в ряд (8), который сходится равномерно на компактах из области существования функции g.

По теореме 1 область сходимости ряда (8) является выпуклой. Поэтому с учетом (5) непосредственно из теоремы 2.6 в работе [10] получаем следующий результат

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Если для некоторого набора матриц $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$, то $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ также является базисом в $W(\Lambda, a)$.*

Таким образом, при помощи теоремы 2 проблема существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, a)$ вида $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$, построенного по относительно малым группам, сводится к проблеме базисности конкретной системы функций $\mathcal{E}(\Lambda, U)$.

Выясним условия, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$. Для этого нам понадобится числовая характеристика последовательности Λ называемая индексом конденсации.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$. Положим

$$q_{\Lambda,U}^m(z, \delta) = \prod_{\lambda_{k,v} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), k \neq m} \left(\frac{z - \lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|} \right)^{n_{k,v}}, \quad m \geq 1.$$

Модуль функции $q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)$ можно интерпретировать меру сгущения точек $\lambda_{k,v} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, $k \neq m$, около z. В случае когда их нет, полагаем $q_{\Lambda,U}^m(z, \delta) \equiv 1$. Следуя [11] и [10], введем индекс конденсации групп U_m последовательности Λ:

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{m \to \infty} \min_{\lambda_{m,v} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,v}, \delta)|}{|\lambda_{m,v}|}.$$

Отметим, что коэффициент 3 в определении $q_{\Lambda,U}^m$ выбран лишь для удобства (см. [11], замечание 1 к теореме 5.1). Он обеспечивает неравенство $S_\Lambda(U) \leqslant 0$. В случае, когда U — тривиальное разбиение (т.е. каждая группа U_m состоит из одной точки), $S_\Lambda(U)$ совпадает с величиной S_Λ введенной в работе [11]. Равенство $S_\Lambda(U) = 0$ означает, что группы U_m в каком-то смысле разделены между собой.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет нулевую плотность. Тогда последовательность $\{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является правильно распределенным множеством (см. [3], гл. II,§1). Тогда последовательность является правильной в смысле определения 3.1 из работы [10]. Поэтому согласно лемме 3.5 из работы [10] верно утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$. Тогда существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U) = 0$.*

Теперь мы можем сформулировать и доказать результат, решающий проблему базиса в подпространстве $W(\Lambda, a)$.

Теорема 3. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$;

2) $S_\Lambda(U) = 0$.

Доказательство. Предположим, что верно утверждение 1). Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая точку a. Тогда с учетом 1) в силу определения подпространства $W(\Lambda, a)$ находим, что любая функция $g \in W(\Lambda, D)$ единственным образом раскладывается в ряд (10), который сходится равномерно на компактах из области существования функции g. В частности, он сходится равномерно на каждом компакте из D.

Таким образом, верно утверждение 2) из теоремы 3.1 в работе [12]. Тогда согласно этой теореме имеет место равенство $S_\Lambda(U) = 0$.

Пусть теперь верно утверждение 2) и g — произвольный элемент подпространства $W(\Lambda, a)$. Согласно определению $W(\Lambda, a)$ найдется ограниченная выпуклая область D такая, что $g \in W(\Lambda, D)$. Поскольку $\bar{n}(\Lambda) = 0$ и $S_\Lambda(U) = 0$, то выполнено утверждение 5) из теоремы 3.1 в работе [12]. Тогда согласно этой тереме функция g раскладывается в ряд (10), который сходится равномерно на компактах из области D.

Пусть G — открытое множество, состоящее из всех точек плоскости, в некоторой окрестности каждой из которых ряд (10) сходится равномерно. Из теоремы 1 следует, что G является выпуклой областью. Верно вложение $D \subset G$. Поэтому функция g аналитически продолжается в область G и представляется там рядом (10), сходящимся равномерно на компактах из G. В частности, $g \in W(\Lambda, G)$.

Покажем, что G — область существования функции g. Предположим противное, т.е. существует граничная точка z_0 области G и число $r > 0$ такие, что g аналитически продолжается в круг $B(z_0, r)$. Фиксируем произвольную точку b из пересечения области G и круга $B(z_0, r/2)$. Тогда круг $B(b, r/2)$ содержит окрестность точки z_0 и лежит в круге $B(z_0, r)$.

Таким образом, функция g является аналитической в круге $B(b, r/2)$. Поскольку $b \in G$, то найдется $r' \in (0, r/2)$ такое, что круг $B(b, r')$ лежит в области G. Отсюда с учетом включения $g \in W(\Lambda, G)$ получаем: $g \in W(\Lambda, B(b, r'))$. Круг $B(b, r/2)$ представляет из себя сумму двух кругов $B(b, r')$ и $B(0, r'')$, где $r' + r'' = r/2$. Следовательно, по теореме 12.1 работы [13] функция g аппроксимируется линейными комбинациями элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в круге $B(b, r/2)$, т.е., $g \in W(\Lambda, B(b, r/2))$.

Как и выше, для выпуклой области $\tilde{D} = B(b, r/2)$ выполнено утверждение 5) из теоремы 3.1 в работе [12]. Тогда согласно этой теореме функция g раскладывается в ряд

$$g(z) = \sum_{m=1, j=1}^{\infty, N_m} \tilde{d}_{m,j} e_{m,j}(z), \tag{11}$$

который сходится равномерно на компактах из области $\tilde{D}$. Следовательно, в пересечении $G \cap \tilde{D}$ одновременно имеют место представления (10) и (11). Выше отмечалось, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m}$ обладает биортогональной последовательностью функционалов в любой выпуклой области и, в частности, в $G \cap \tilde{D}$. Поэтому представление в виде ряда (10) является единственным, т.е. верны равенства $d_{m,j} = \tilde{d}_{m,j}$, $m \geq 1$, $j = \overline{1, N_m}$. Это означает, что функция g раскладывается в ряд (10) в объединении областей G и $\tilde{D}$, который сходится равномерно на компактах из $G \cup \tilde{D}$. Поскольку G является собственным подмножеством области $G \cup \tilde{D}$, то мы получили противоречие с определением области G.

Таким образом, наше предположение неверно, т.е. G — область существования функции g. Теорема доказана.

В теореме 3 при условии, что Λ разбита на относительно малые группы, дается решение проблемы существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, a)$. Кроме того, описываются всевозможные подходящие ($S_\Lambda(U) = 0$) способы разбиения Λ на относительно малые группы.

Непосредственно из леммы 3 и теоремы 3 следует утверждение.

Теорема 4. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$. Тогда существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы такое, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$.*

Замечание. Выше отмечалось, что пространство аналитических решений уравнения (2) с характеристической функцией $f(\lambda)$ экспоненциального минимального типа вложено в пространство $W(\Lambda, 0)$, где Λ — кратное нулевое множество $f(\lambda)$ (это следует также из теоремы 6.1 в работе [14], где решается проблема спектрального синтеза для пространств решений однородных уравнений свертки). Следовательно, теорема 4 усиливает указанный ранее результат Валирона из работы [4].

Непосредственно из леммы 1, теорем 1 и 4 получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) каждая функция из $W(\Lambda, a)$ имеет выпуклую область существования;

2) $\bar{n}(\Lambda) = 0$.

Замечание. Теорема 5 содержит в себе отмеченные выше результаты Д. Полиа из работ [1] и [2].

Пусть U — тривиальное разбиение последовательности Λ. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \mathcal{E}(\Lambda)$, $S_\Lambda(U) = S_\Lambda$ (величина S_Λ вводится в работе [11]). Следовательно, теорема 3 содержит в себе как частный случай следующее решение проблемы фундаментального принципа для подпространства $W(\Lambda, a)$.

Теорема 6. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$;

2) $S_\Lambda = 0$.

Замечание. Теорема 6 следует из теоремы 5.1 работы [15].

Приведем теперь описание всех возможных базисов в подпространстве $W(\Lambda, a)$ для фиксированного разбиения U последовательности Λ на относительно малые группы.

Пусть система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ (где $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$) такова, что для каждого $m \geq 1$ матрица перехода $\mathcal{A}_m$ от $\{e_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$ к $\{e'_{m,j}\}_{j=1}^{N_m}$ является невырожденной. Символом $\mathcal{B}_m = (b_{m,j,k})$ обозначим матрицу, обратную к $\mathcal{A}_m$. Положим

$$\mathfrak{a}(\mathbb{A}) = \varlimsup_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,k\leqslant N_m} \frac{\ln|b_{m,j,k}|}{|\lambda_{m,1}|}.$$

Из теоремы 2.7 в работе [10] получаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$, а система $E(\Lambda, U, \mathbb{A})$ нормирована. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в $W(\Lambda, a)$;

2) $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) = 0$.

В заключение приведем описание пространства коэффициентов рядов (10) (или, что эквивалентно, рядов (8)), представляющих функции из подпространства $W(\Lambda, a)$.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, $a \in \mathbb{C}$, пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Введем банаховы пространства комплексных последовательностей

$$Q_p(\Lambda, U) = \{d = \{d_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} : ||d||_p = \sup_{m,j} |d_{m,j}| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\}, \quad p \geq 1.$$

Символом $Q(\Lambda, U, D)$ обозначим проективный предел пространств Q_p, $p \geq 1$, а символом $Q(\Lambda, U, a)$ — индуктивный предел пространств $Q(\Lambda, U, D)$ по всем выпуклым областям D, содержащим точку a.

Определим оператор $\mathfrak{B}$, действующий на пространстве $Q(\Lambda, U, a)$ со значениями в $W(\Lambda, a)$ по правилу: последовательности $d = \{d_{m,j}\} \in Q(\Lambda, U, a)$ поставим в соответствие сумму $g(z)$ ряда (10), если он сходится в топологии некоторого пространства $H(D)$.

Из теоремы 2.2 в работе [10] вытекает следующий результат.

Теорема 8. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\bar{n}(\Lambda) = 0$, и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение Λ на относительно малые группы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, a)$;

2) оператор $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(\Lambda, U, a)$ и $W(\Lambda, a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Polya *Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Luckensatzes* // Nachr. Geselesch Wissensch. Gottingen. 1927. P. 187–195.
2. G. Polya *Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen* // Math. Zeits. 1928. Bd. 29. P. 549–560.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
4. G. Valiron *Sur les solutions des equations differentielles lineares d'ordre infinit et a coefficients constants* // Ann. Ec. Norm. Sup. 1929. V. 46. P. 25–53.
5. Красичков И.Ф. *Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней* // Матем. Сб. 1966. Т. 70(112), № 2. С. 198–230.
6. Кривошеев А.С. *Базисы «по относительно малым группам»* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 67–89.
7. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2. № 1. С. 87–96.
8. Кривошеев А.С.. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4. № 1. С. 88–106.
9. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 4. С. 84–90.
10. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. Сб. 2013. Т. 204. № 12. С. 49–104.
11. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 2. С.71–136.
12. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве* // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 684–697.
13. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций.III. О распространении спектрального синтеза* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 3. С. 331–352.
14. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций.II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
15. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 2. С. 162–205.

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru