ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 78-88.

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Н. КОНЕЧНАЯ, К.А. МИРЗОЕВ

Аннотация. В работе найден главный член асимптотики некоторой фундаментальной системы решений одного класса линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка $\tau y = \lambda y$ на бесконечности, где λ – фиксированное комплексное число. При этом рассматривается специальный класс матриц типа Шина – Зеттла, и τy – квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей из этого класса. Накладываемые на первообразные коэффициентов квазидифференциального выражения τy – т.е. на элементы соответствующей матрицы – условия не связаны с их гладкостью, а лишь обеспечивают определенный степенной рост на бесконечности этих первообразных. Таким образом, коэффициенты выражения τy могут и осцилировать. К рассматриваемому классу, в частности, относится обширный класс дифференциальных уравнений произвольного (четного или нечетного) порядка с коэффициентами-распределениями конечного порядка. Используя известное определение произведения двух квазидифференциальных выражений с негладкими коэффициентами, в работе также предлагается метод, позволяющий получить асимптотические формулы для фундаментальной системы решений рассматриваемого уравнения в случае, когда левая часть этого уравнения представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений. Полученные результаты применяются к спектральному анализу соответствующих сингулярных дифференциальных операторов. В частности, предполагая симметричность квазидифференциального выражения τy, по известной схеме определяется минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный этим выражением в пространстве интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу функций на $[1, +\infty)$ (в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1, +\infty)$), и вычисляются индексы дефекта этого оператора.

Ключевые слова: квазипроизводная, квазидифференциальное выражение, главный член асимптотики фундаментальной системы решений, минимальный замкнутый симметрический оператор, дефектные числа.

Mathematics Subject Classification: 34E05, 34L05

1. Введение

Пусть элементы матрицы $F = (f_{jk})$ – комплекснозначные функции f_{jk}, $j, k = 1, 2 \ldots, m$, $m > 1$ – определены, измеримы на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и удовлетворяют следующим условиям:
1) $f_{jk} = 0$ почти всюду на (a, b) при $2 \leqslant j + 1 < k \leqslant m$ и $f_{j,j+1} \neq 0$ почти всюду на (a, b) при $1 \leqslant j \leqslant m - 1$;
2) функции f_{jk} локально интегрируемы по Лебегу на (a, b) при всех $1 \leqslant j, k \leqslant m$, т.е. f_{jk} интегрируемы по Лебегу на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ($f_{jk} \in \mathcal{L}^1_{loc}(a, b)$).

N.N. Konechnaya, K.A. Mirzoev, Asymptotics of solutions to a class of linear differential equations.

Первый автор поддержан грантом РНФ № 17-11-01215.

Поступила 25 мая 2017 г.

Определим *квазипроизводные* $y^{[j]}$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$ заданной функции y посредством матрицы F, полагая $y^{[0]} := y$ и

$$y^{[j]} := (f_{j,j+1})^{-1}[(y^{[j-1]})' - \sum_{k=1}^{j} f_{jk} y^{[k-1]}], \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{1}$$

при условии, что $y^{[k-1]}$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ уже определены и являются абсолютно непрерывными функциями на каждом компакте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ($y^{[k-1]} \in AC_{loc}(a, b)$). Определим также *квазидифференциальное выражение* τy посредством матрицы F, полагая

$$\tau y := i^m [(y^{[m-1]})' - \sum_{k=1}^{m} f_{mk} y^{[k-1]}]. \tag{2}$$

Естественная область определения $\mathcal{D}(\tau)$ выражения τ – это множество всех комплекснозначных функций y, для которых существуют локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $y^{[j]}$ до $(m-1)$-го порядка включительно, и очевидно, что $\tau y \in \mathcal{L}^1_{loc}(a, b)$ для любого $y \in \mathcal{D}(\tau)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\tau y = \lambda y, \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр. Это уравнение равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}' = (F + \Lambda)\mathbf{y}, \tag{4}$$

где $\mathbf{y}$ – вектор-столбец $\mathbf{y} := colon(y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m-1]})$, а элементы квадратной матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$ размерности m определяются равенствами $\lambda_{m1} := i^{-m}\lambda$ и $\lambda_{ij} := 0$ для всех остальных значений i и j. Равносильность скалярного уравнения (3) и системы (4) понимается в том смысле, что если y является решением уравнения (3), то $\mathbf{y} = colon(y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m-1]})$ $(y = y^{[0]})$ является решением системы (4), и наоборот, если $\mathbf{y} = colon(y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})$ – решение системы (4), то $y = y_0$ – решение уравнения (3) и $y_k = y^{[k]}$ $(k = 0, 1, \ldots m-1)$.

Отметим, что условие 1) позволяет посредством матрицы F формулами (1) и (2) определить квазипроизводные функции $y \in \mathcal{D}(\tau)$ и скалярное линейное квазидифференциальное выражение τy (порядка m), а условие 2) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений (4), поставленной в произвольной точке промежутка (a, b). Таким образом, при выполнении условий 1) и 2) теорема существования и единственности решения задачи Коши справедлива и для уравнения (3).

В специальной литературе матрицы, удовлетворяющие условиям 1) и 2), называют матрицами типа Шина – Зеттла, и класс этих матриц обозначают символом $Z_m(a, b)$ (см., напр., [1], Section I, p.8, или [2]) или символом $\mathcal{S}_m(a, b)$ (см. [3]). Определения квазипроизводых и квазидифференциального выражения, приведенные здесь, взяты из этих работ.

В дальнейшем предполагается, что $a = 1$ и $b = +\infty$. В параграфе 2 настоящей работы определяется подкласс матриц из $Z_m[1, +\infty)$ и порожденные ими квазидифференциальные уравнения вида (3), исследуемые в данной работе. В параграфе 3 доказана теорема об асимптотике некоторой фундаментальной системы решений этого класса уравнений на бесконечности. В параграфе 4, следуя работе [2] (см. также [4]), определяется произведение двух квазидифференциальных выражений и предлагается метод, позволяющий получить асимптотические формулы для решений уравнений вида (3) в случае, когда левая часть этого уравнения представляется как произведение двух выражений из класса, определенного в параграфе 2. В параграфе 5, налагая дополнительные ограничения на матрицу F, которые обеспечивают симметричность (формальную самосопряженность) выражения τy

(см. [1], Section I, p.10), определяем минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный этим выражением в пространстве интегрируемых по Лебегу с квадратом модуля функций на $[1,+\infty)$ (в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$), и полученные в параграфе 3 результаты применяем для определения индекса дефекта этого оператора.

Часть результатов данной статьи без доказательств приведены в работе [5].

2. Построение специальной матрицы F

2.1. Пусть $m = 2n$. Определим матрицу $F_{2n}(=: F)$, положив

$$F_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & . & . & f_{n,n} & f_{n,n+1} & 0 & . & . & 0 \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & . & . & f_{n+1,n} & f_{n+1,n+1} & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f_{2n-1,1} & f_{2n-1,2} & f_{2n-1,3} & . & . & f_{2n-1,n} & f_{2n-1,n+1} & 0 & . & . & 1 \\ f_{2n,1} & f_{2n,2} & f_{2n,3} & . & . & f_{2n,n} & f_{2n,n+1} & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что элементы f_{jk} матрицы F_{2n} удовлетворяют условиям 1) и 2) п.1, т.е.

(A) $f_{jk} \in \mathcal{L}^1_{loc}[1,+\infty)$ при $n \le j \le 2n, 1 \le k \le n+1$, и $f_{n,n+1} \ne 0$ п.в. на $[1,+\infty)$.

Пусть, кроме того,

(B) существуют число $\nu \ge 0$, комплексные числа α_{jk} и комплекснозначные функции $\beta_{jk}(x)$ такие, что $\alpha_{n,n+1} \ne 0$ и при всех $x \ge 1$ элементы f_{jk} имеют вид

$$f_{n,n+1}(x) := x^{-2n-\nu}(\alpha_{n,n+1} + \beta_{n,n+1}(x));$$
$$f_{nj}(x) := x^{-n+j-1}(\alpha_{nj} + \beta_{nj}(x)),\ j = 1,\dots n;$$
$$f_{n+k,n+1}(x) := x^{-k}(\alpha_{n+k,n+1} + \beta_{n+k,n+1}(x)),\ k = 1,\dots n;$$
$$f_{n+k,j}(x) := x^{n+\nu-k+j-1}(\alpha_{n+k,j} + \beta_{n+k,j}(x)),\ k = 1,\dots n, j = 1,\dots n.$$

Обозначим через $D := dg(d_1, d_2, \dots, d_{2n})$ диагональную матрицу-функцию с элементами

$$d_k(x) := x^{-k+\frac{1}{2}},\ \ d_{k+n}(x) := x^{n+\nu-k+\frac{1}{2}},\ k = 1,\dots,n.$$

Сделав в системе (4) (с $F = F_{2n}$) замену $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$, легко установить, что новая неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{Y}' = (D^{-1}F_{2n}D + D^{-1}\Lambda D - D^{-1}D')\mathbf{Y},$$

где для элементов $\tilde{f}_{ij}$ матрицы $D^{-1}F_{2n}D$ справедливы формулы

$$\tilde{f}_{ij} = d_i^{-1} f_{ij} d_j, \qquad i,j = 1,2,\dots 2n,$$

а все элементы матрицы $D^{-1}\Lambda D$ равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $x^{-1}(-1)^n\lambda/x^\nu$. Кроме того,

$$D^{-1}D' = x^{-1}dg(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -n+\frac{1}{2}, n+\nu-\frac{1}{2}, n+\nu-\frac{3}{2}, \dots, \nu+\frac{1}{2}).$$

Из этих рассуждений легко извлечь, что неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = (A + B(x))\mathbf{Y}, \tag{5}$$

где $A = A_1 + A_2 + A_3$ – постоянная матрица, причем матрица A_1 имеет тот же вид, что и F_{2n}, с той лишь разницей, что f_{jk} в ней заменены на α_{jk}, A_2 – диагональная матрица, определяемая равенством

$$A_2 = dg(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-n-\nu, \frac{3}{2}-n-\nu, \dots, -\frac{1}{2}-\nu),$$

а A_3 – матрица, равная Λ (см. (4)) при $\nu = 0$ и нулевой матрице при $\nu > 0$. Кроме того, в (5) ненулевые элементы $b_{jk}(x)$ матрицы-функции $B(x)$ такие, что $b_{jk}(x) = \beta_{jk}(x)$ при $n \le j \le 2n, 1 \le k \le n+1$, кроме элемента $b_{2n,1}(x)$, а

$$b_{2n,1}(x) = \begin{cases} \beta_{2n,1}(x), & \text{если} \quad \nu = 0; \\ \beta_{2n,1}(x) + (-1)^n \lambda / x^\nu, & \text{если} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

2.2. Пусть теперь $m = 2n+1$. Определим матрицу $F_{2n+1}(=: F)$, положив

$$F_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & f_{n,n+1} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & \cdot & \cdot & f_{n+1,n} & f_{n+1,n+1} & f_{n+1,n+2} & 0 & . & . & 0 \\ f_{n+2,1} & f_{n+2,2} & f_{n+2,3} & \cdot & \cdot & f_{n+2,n} & f_{n+2,n+1} & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ f_{2n,1} & f_{2n,2} & f_{2n,3} & \cdot & \cdot & f_{2n,n} & f_{2n,n+1} & 0 & 0 & . & . & 1 \\ f_{2n+1,1} & f_{2n+1,2} & f_{2n+1,3} & \cdot & \cdot & f_{2n+1,n} & f_{2n+1,n+1} & 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае будем предполагать, что элементы f_{jk} матрицы F_{2n+1} удовлетворяют условиям

(A) $f_{n,n+1}, f_{n+1,n+2}, f_{jk} \in \mathcal{L}^1_{loc}[1, +\infty)$ при $n+1 \le j \le 2n+1, 1 \le k \le n+1$, и $f_{n,n+1} \ne 0$, $f_{n+1,n+2} \ne 0$ п.в. на $[1, +\infty)$,

и

(B) существуют число $\nu \ge 0$, комплексные числа α_{jk} и комплекснозначные функции $\beta_{jk}(x)$ такие, что $\alpha_{j,j+1} \ne 0$ при $j = n, n+1$ и при всех $x \ge 1$ элементы f_{jk} имеют вид

$$f_{n,n+1}(x) := x^{-n-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} \, (\alpha_{n,n+1} + \beta_{n,n+1}(x));$$

$$f_{n+1,n+2}(x) := x^{-n-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} \, (\alpha_{n+1,n+2} + \beta_{n+1,n+2}(x));$$

$$f_{n+1,n+1}(x) := x^{-1}(\alpha_{n+1,n+1} + \beta_{n+1,n+1}(x));$$

$$f_{n+1,j}(x) := x^{\frac{\nu}{2}+j-\frac{3}{2}}(\alpha_{n+1,j} + \beta_{n+1,j}(x)),\ j = 1, \dots n;$$

$$f_{n+1+j,n+1}(x) := x^{\frac{\nu}{2}+n-j-\frac{1}{2}}(\alpha_{n+1+j,n+1} + \beta_{n+1+j,n+1}(x)),\ j = 1, \dots n;$$

$$f_{n+1+j,k}(x) := x^{\nu+n-j+k-1}(\alpha_{n+1+j,k} + \beta_{n+1+j,k}(x)),\ j = 1, \dots n, k = 1, \dots n.$$

Кроме того, теперь элементы d_k матрицы $D := dg(d_1, d_2, \dots, d_{2n+1})$ в замене $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$ определим равенствами

$$d_k(x) := x^{-k+\frac{1}{2}},\ d_{n+1}(x) := x^{\frac{\nu}{2}},\ d_{n+1+k}(x) := x^{\nu+n-k+\frac{1}{2}},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

С помощью такой замены система (4) (с $F = F_{2n+1}$) снова преобразуется к системе вида

$$\mathbf{Y}' = (D^{-1}F_{2n+1}D + D^{-1}\Lambda D - D^{-1}D')\mathbf{Y}$$

для неизвестной вектор-функции $\mathbf{Y}$. Заметим, что в этом случае элементы $\tilde{f}_{ij}$ матрицы $D^{-1}F_{2n+1}D$ можно найти, как и прежде, по формулам

$$\tilde{f}_{ij} = d_i^{-1} f_{ij} d_j, \qquad i, j = 1, 2, \dots 2n+1,$$

а все элементы матрицы $D^{-1}\Lambda D$ равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $x^{-1}i(-1)^{n+1}\lambda/x^\nu$. Кроме того,

$$D^{-1}D' = x^{-1}dg(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -n+\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}, n+\nu-\frac{1}{2}, n+\nu-\frac{3}{2}, \dots, \nu+\frac{1}{2}).$$

Таким образом, и в этом случае неизвестная вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений (5), где $A = A_1 + A_2 + A_3$, причем матрицы A_1 и A_3 составляются также, как и в случае $m = 2n$, с заменой F_{2n} на F_{2n+1}, а матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = dg(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - n - \nu, \frac{3}{2} - n - \nu, \ldots, -\frac{1}{2} - \nu).$$

Кроме того, в (5) ненулевые элементы $b_{jk}(x)$ в $B(x)$ такие, что $b_{j,j+1}(x) = \beta_{j,j+1}(x)$ при $j = n, n+1$, $b_{jk}(x) = \beta_{jk}(x)$ при $n+1 \leq j \leq 2n+1, 1 \leq k \leq n+1$, кроме элемента $b_{2n+1,1}(x)$, а

$$b_{2n+1,1}(x) = \begin{cases} \beta_{2n+1,1}(x), & \text{если} \quad \nu = 0; \\ \beta_{2n+1,1}(x) + i(-1)^{n+1}\lambda/x^{\nu}, & \text{если} \quad \nu > 0. \end{cases}$$

Условие (C), сформулированное ниже, одинаково и для случая $m = 2n$, и для случая $m = 2n+1$. Пусть $r+1$– это кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности, и пусть

(C) матрицы A и $B(x)$ таковы, что

$$\int_1^{\infty} \frac{(lnx)^r}{x} ||B(x)||dx < \infty, \tag{6}$$

где $||B(x)||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы $B(x)$.

Замечание 1. *Матрицы F_{2n} и F_{2n+1} подобраны так, что любое дифференциальное выражение вида*

$$\tau y = \sum_{k=0}^{[m/2]} (p_k y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} [(q_k y^{(k+1)})^{(k)} + (q_k y^{(k)})^{(k+1)}], \tag{7}$$

где $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее число a, и $m = 2n$ или $m = 2n+1$, с достаточно гладкими коэффициентами порождается матрицами такого вида, причем все элементы этих матриц, кроме обязательно ненулевых элементов (см. вид матриц F_{2n}, F_{2n+1} и условие (A)), равны нулю, за возможным исключением элементов побочной диагонали и двух диагоналей слева и справа от нее, и ненулевые элементы являются гладкими функциями (подробнее см. [1], Appendix A, pp. 119-124). Более того, матрицы Шина-Зеттла F_{2n} и F_{2n+1}, построенные в [1] (порождающие выражение (7)), таковы, что если отказаться от гладкости элементов этих матриц и предположить только их локальную интегрируемость, а в формулах (1) и (2) всюду производные трактовать в смысле теории распределений, то в них можно раскрыть все скобки, и тогда регулярная обобщенная функция τy из (2) при $y \in \mathcal{D}(\tau)$ представится в виде (7) в терминах теории обобщенных функций. При этом особо подчеркнем, что от коэффициентов p_k и q_k в выражении (7) требуется лишь их локальная интегрируемость (см. [6], [7]).

В работе [3] анонсировано, что широкий класс выражений вида (7) любого порядка с коэффициентами-распределениями также вписывается в класс квазидифференциальных выражений, порожденных матрицами Шина-Зеттла вида F_{2n} или F_{2n+1}.

Замечание 2. *Определение квазипроизводных и квазидифференциального выражения по формулам (1) и (2) посредством матриц F_{2n} и F_{2n+1} позволяет утверждать, что $y^{[j]} = y^{(j)}$ при $0 \leq j \leq n-1$, т.е. элементы этих матриц, отличные от единицы, участвуют только в определении $y^{[j]}$ при $n \leq j \leq m-1$ и τy. Используя это, можно показать, что в случае, когда матрицы F_{2n} и F_{2n+1} порождают дифференциальное выражение (7), для $y \in \mathcal{D}(\tau)$ выражения $p_k y^{(k)}$ $(0 \leq k \leq [m/2])$ и $q_k y^{(k+1)}$ $(0 \leq k \leq [(m-1)/2])$ являются* *регулярными обобщенными функциями. Таким образом, при $y \in \mathcal{D}(\tau)$ слагаемые в выражении (7) являются обобщенными производными регулярных обобщенных функций, а их сумма τy – регулярной обобщенной функцией.*

3. Главный член асимптотики решений

3.1. В дальнейшем нам понадобиться следующее утверждение, доказанное в [8] (см. также [9]; [10], гл. III, стр. 120, задача 35; [11], ch. IV, p. 95):

Лемма 1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$V'(t) = (A + R(t))V(t), \tag{8}$$

где матрица A – постоянная, причем каноническая форма матрицы A имеет жордановы клетки J_k, $k \geq 1$, и максимальное число строк для всех клеток J_k равно $r+1$ $(r \geq 1)$. Предположим далее, что

$$\int_1^\infty t^r ||R(t)|| dt < \infty. \tag{9}$$

Пусть z – характеристический корень A и пусть уравнение

$$V'(t) = AV(t) \tag{10}$$

имеет решение вида

$$e^{zt}t^kC + O(e^{zt}t^{k-1}),$$

где C – постоянный вектор. Тогда уравнение (8) имеет решение φ, такое, что

$$\varphi(t) = e^{zt}t^k(C + o(1)), \qquad t \to +\infty.$$

3.2. Докажем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы F удовлетворяют условиям (A) - (C). Предположим, что $z_1, z_2, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{q+j}$ – все различные характеристические корни матрицы A, причём $z_1, z_2, \ldots, z_q$ – однократные корни, при $1 \leq p \leq j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p. Тогда уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений $y_k(x)$ такую, что при $x \to +\infty$*

$$y_k(x) = c_k x^{z_k - \frac{1}{2}}(1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \ldots, q, \tag{11}$$

и при $k = q,\ q + r_1, \ldots, q + r_1 + \ldots + r_{j-1}$

$$y_{k+i}(x) = c_{k+i} x^{z_{q+p} - \frac{1}{2}}(\ln x)^{i-1}(1 + o(1)),\ i = 1, \ldots, r_p,\ \text{если } k = q + r_1 + \ldots + r_{p-1}, \tag{12}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – произвольные ненулевые постоянные.

Доказательство. Структура матрицы A и при $m = 2n$, и при $m = 2n+1$ (см. параграф 2) такова, что $a_{j,j+1} \neq 0$ при $1 \leqslant j \leqslant m-1$ и $a_{jk} = 0$ при $2 \leqslant j+1 < k \leqslant m$. Поэтому собственный вектор, соответствующий какому-либо собственному значению, однозначно определяется заданием своей первой координаты. Таким образом, геометрическая кратность любого собственного значения матрицы A равна единице. Иными словами, каждому собственному значению матрицы A соответствует только одна жорданова клетка в её канонической форме. Поэтому размерность жордановой клетки в канонической форме матрицы A наибольшей размерности (число $r+1$ в лемме 1) совпадает с кратностью собственного значения матрицы A наибольшей кратности (число $r+1$ в условии (C)).

Преобразуем теперь систему дифференциальных уравнений (5), положив $x = e^t$. Тогда эта система примет вид (8), где $V(t) = \mathbf{Y}(e^t)$, $R(t) = B(e^t)$. Кроме того, если матрицы A и $B(x)$ удовлетворяют условию (C), то матрица $R(t)$ удовлетворяет условию (9) леммы 1. Если теперь $z_1, z_2, \ldots, z_q$ – все различные простые характеристические корни матрицы A, то система уравнений с постоянными коэффициентами (10) имеет решения $e^{z_k t}C_k$, где C_k – собственный вектор, соответствующий собственному значению z_k $(1 \leq k \leq q)$. Применив далее лемму 1, находим, что система (8) имеет решения вида

$$e^{z_k t}(C_k + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, сделав обратную замену $t = lnx$, и учитывая преобразование $\mathbf{y} = D\mathbf{Y}$, находим, что система (4) имеет решения, представимые в виде

$$x^{z_k} D(C_k + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, первая координата этого решения – решение y_k уравнения (3) – представляется в виде (11), причем c_k – первая координата собственного вектора C_k – не равна нулю.

Пусть теперь z_{q+p} – характеристический корень матрицы A кратности r_p. Как нам уже известно, этому характеристическому корню также соответствует только одна жорданова клетка в каноническом разложении матрицы A, и поэтому размерность этой клетки равна r_p и не превосходит числа $r+1$. Отсюда следует, что система уравнений (10) имеет решения, представимые в виде

$$e^{z_{q+p}t}C_{q+p} \quad \text{и} \quad e^{z_{q+p}t}t^k C_{q+p} + O(e^{z_{q+p}t}t^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, r_p - 1,$$

где C_{q+p} – собственный вектор, соответствующий собственному значению z_{q+p}. Далее, применяя еще раз лемму 1 и рассуждая также, как и в случае простого собственного значения, без труда можно установить, что уравнение (3) имеет ровно r_p решений, представимых в виде (12), соответствующих собственному значению z_{q+p}. Остается рассмотреть совокупность решений уравнения (3), представимых в виде (11) и (12), соответствующих всем собственным значениям матрицы A. Эта совокупность, очевидно, образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{F}(z,\nu)$ характеристический многочлен матрицы A. Из теоремы 1 следует, что справедливо следующее утверждение:

Следствие 1. *Пусть элементы матрицы F удовлетворяют условиям (A) – (C). Тогда максимальное число линейно-независимых решений уравнений (3), принадлежащих пространству $\mathcal{L}_2[1,+\infty)$, равно:*
1) при $\nu > 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}(z,\nu)$, лежащих в области $Rez < 0$, и не зависит от λ;
2) при $\nu = 0$ числу корней полинома $\mathfrak{F}(z,0) - \lambda$, лежащих в области $Rez < 0$.

Замечание 3. *Пусть $y(x)$ – произвольное решение уравнения (3), асимптотическое поведение которого определяется теоремой 1. Изложенное доказательство этой теоремы позволяет получить главный член асимптотики на бесконечности и некоторых квазипроизводных $y^{[j]}(x)$ функции $y(x)$. Для этого компонента с номером $j+1$ соответствующего собственного вектора должна быть отлична от нуля. В частности, если учесть замечание 2, получаем, что асимптотические формулы из теоремы 1 в некоторых случаях можно дифференцировать до $n-1$-го порядка включительно.*

Замечание 4. *В асимптотических формулах из теоремы 1 не участвует матрица-функция $B(x)$ явно, достаточно лишь, чтобы она удовлетворяла условию (C). Предположим теперь, что элементы $f_{jk}(x)$ матрицы F (равной F_{2n} или F_{2n+1}) подобраны так, что соответствующее дифференциальное выражение τy представляется в виде (7), и при этом $B(x)$ – нулевая матрица (см. замечание 1). В этой ситуации анализ выражения τy показывает, что, для случая $m = 2n$, если коэффициенты p_k, $k = 0, 1, ...n$, и q_k, $k = 0, 1, ...n-1$, удовлетворяют условию (B), то существуют комплексные числа a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, и b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, такие, что корни многочлена $\mathfrak{F}(z,\nu)$ совпадают* *(при $\nu > 0$) с корнями многочлена*

$$\mathfrak{F}_{2n}(z,\nu) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + j\right)^2 \right] +$$

$$+2i\left(z+\frac{\nu}{2}\right)\left\{b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \prod_{j=0}^{k-1}\left[\left(z+\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}+j\right)^2\right]\right\}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $m = 2n+1$, т.е. существует многочлен $\mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu)$ вида

$$\mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu) = \mathfrak{F}_{2n}(z,\nu) + 2i\left(z+\frac{\nu}{2}\right) b_n \prod_{j=0}^{n-1} \left[\left(z+\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}+j\right)^2\right],$$

такой, что собственные значения матрицы A совпадают (при $\nu > 0$) с корнями этого многочлена (о многочленах $\mathfrak{F}_{2n}$ и $\mathfrak{F}_{2n+1}$ подробнее см. [6], [7]).

4. Произведение квазидифференциальных выражений

4.1. В настоящем параграфе квазипроизводные $y^{[j]}$, квазидифференциальное выражение τy, матрицы D, A, $B(x)$ и многочлены $\mathfrak{F}(z,\nu)$ (см. параграфы 2 и 3) будем снабжать нижним индексом F, подчеркивая этим, что они строятся по матрице F. Следуя работам [2] и [4], сначала определим произведение двух квазидифференциальных выражений. Пусть матрицы $\mathcal{F} \in Z_m(a,b)$, $\mathcal{G} \in Z_l(a,b)$, $m, l > 1$, и

$$\mathcal{H} := \begin{pmatrix} \mathcal{G} & M \\ O_{m\times l} & \mathcal{F} \end{pmatrix},$$

где M – матрица размерности $l \times m$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1, а $O_{m\times l}$ – нулевая матрица размерности $m \times l$. Очевидно, что $\mathcal{H} \in Z_{m+l}(a,b)$, т.е. матрица $\mathcal{H}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) параграфа 1. Исходя из определения квазипроизводных и квазидифференциального выражения (см. формулы (1) и (2) параграфа 1), легко установить, что $y_{\mathcal{H}}^{[0]} := y$,

$$y_{\mathcal{H}}^{[j]} := y_{\mathcal{G}}^{[j]}, \quad j = 1, \dots, l-1,$$

$$y_{\mathcal{H}}^{[l]} := (y_{\mathcal{G}}^{[l-1]})' - \sum_{k=1}^{l} g_{lk} y_{\mathcal{G}}^{[k-1]},$$

$$y_{\mathcal{H}}^{[l+r]} := (y_{\mathcal{G}}^{[l]})_{\mathcal{F}}^{[r]}, \quad r = 1, \dots, m-1,$$

и

$$\tau_{\mathcal{H}} y := i^{m+l}[(y_{\mathcal{H}}^{[l+m-1]})' - \sum_{k=1}^{m} f_{mk} y_{\mathcal{H}}^{[l+k-1]}].$$

Из этих формул видно, что область определения $\mathcal{D}(\tau_{\mathcal{H}})$ выражения $\tau_{\mathcal{H}}$ задается равенством

$$\mathcal{D}(\tau_{\mathcal{H}}) = \{y | y \in \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{G}}) \text{ и } \tau_{\mathcal{G}} y \in \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{F}})\},$$

и, кроме того,

$$\tau_{\mathcal{H}} y = \tau_{\mathcal{F}}(\tau_{\mathcal{G}} y) \quad \text{при} \quad y \in \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{H}}) (= \mathcal{D}(\tau_{\mathcal{F}}\tau_{\mathcal{G}}))$$

(подробности см. [2], [4]).

В случае когда $\tau = \tau_{\mathcal{H}}$, уравнение (3), как обычно, равносильно системе (4), т.е.

$$\mathbf{y}' = (\mathcal{H} + \Lambda)\mathbf{y}, \tag{13}$$

где теперь $\mathbf{y}$ уже неизвестный вектор-столбец с $m+l$-компонентами, а элементы квадратной матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$ размерности $m+l$ определяются равенствами $\lambda_{m+l,1} := i^{-m-l}\lambda$ и $\lambda_{ij} := 0$ для всех остальных значений i и j.

4.2. Пусть теперь матрицы $\mathcal{G} \in Z_l[1,+\infty)$ и $\mathcal{F} \in Z_m[1,+\infty)$ имеют такую же структуру, что и матрица F из параграфа 2, и, соответственно, удовлетворяют условию (A). Пусть далее $\nu_1, \nu_2 > 0$ – некоторые постоянные, и элементы g_{jk} и f_{jk} матриц $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ определяются равенствами, аналогичными равенствам из условия (B) параграфа 2 с параметрами ν_1 и ν_2 соответственно.

Определим диагональную матрицу

$$D_{\mathcal{H}} := \begin{pmatrix} D_{\mathcal{G}} & O_{l\times m} \\ O_{m\times l} & x^{\nu_1} D_{\mathcal{F}} \end{pmatrix},$$

и систему (13) преобразуем к виду (5) заменой $\mathbf{y} = D_{\mathcal{H}}\mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ – неизвестная вектор-функция с $m+l$ компонентами, т.е. $\mathbf{Y}$ удовлетворяет системе уравнений

$$x\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = (A_{\mathcal{H}} + B_{\mathcal{H}}(x))\mathbf{Y}.$$

Здесь числовая матрица $A_{\mathcal{H}}$ и матрица-функция $B_{\mathcal{H}}(x)$ определяются равенствами

$$A_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\mathcal{G}} & M \\ O_{m\times l} & \tilde{A}_{\mathcal{F}} \end{pmatrix}, \; B_{\mathcal{H}}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{\mathcal{G}}(x) & O_{l\times m} \\ S(x) & \tilde{B}_{\mathcal{F}}(x) \end{pmatrix},$$

где матрицы $\tilde{A}_{\mathcal{G}}$, $\tilde{A}_{\mathcal{F}}$ и матрицы-функции $\tilde{B}_{\mathcal{G}}$, $\tilde{B}_{\mathcal{F}}$ определяются процедурой, примененной в параграфе 2 (см. уравнение (5)), а $S(x)$ – матрица размерности $m \times l$, все элементы которой также равны нулю, кроме элемента $i^{-m-l}\lambda/x^{\nu_1+\nu_2}$ в левом нижнем углу.

Очевидно, подробное описание матриц $D_{\mathcal{H}}$, $A_{\mathcal{H}}$ и $B_{\mathcal{H}}(x)$ зависит от четности или нечетности чисел l и m и займет много места. Поэтому здесь мы ограничимся сказанным выше.

Пусть теперь $r+1$ – максимальная размерность жордановой клетки в канонической форме матрицы $A_{\mathcal{H}}$, и пусть число r и матрица $B(x)(= B_{\mathcal{H}}(x))$ удовлетворяют условию (C) (см. (6)). Тогда, также как и в параграфе 3, можно применить лемму 1 и доказать аналоги теоремы 1 и следствия 1 для уравнения (3) в случае, когда $\tau = \tau_{\mathcal{H}}$, т.е. для уравнения

$$\tau_{\mathcal{F}}\tau_{\mathcal{G}}y = \lambda y.$$

Замечание 5. *Можно показать, что характеристический многочлен* $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}(z,\nu_1,\nu_2)$ *матрицы* $A_{\mathcal{H}}$ *определяется равенством*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}(z,\nu_1,\nu_2) = \mathfrak{F}_{\mathcal{G}}(z,\nu_1)\mathfrak{F}_{\mathcal{F}}(z+\nu_1,\nu_2),$$

а число $r+1$ *– это кратность корня наибольшей кратности произведения этих многочленов. В частности, в случае, когда* $\mathcal{G} = \mathcal{F} = F$ *(определение матрицы* F *см. параграф 2) и, соответственно,* $\nu_1 = \nu_2 = \nu$*, характеристический многочлен для квадрата выражения* τ_F^2 *определяется равенством*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}(z,\nu) = \mathfrak{F}_F(z,\nu)\mathfrak{F}_F(z+\nu,\nu),$$

где, согласно замечанию 4, многочлен $\mathfrak{F}_F(z,\nu)$ *такой что*

$$\mathfrak{F}_F(z,\nu) = \mathfrak{F}_{2n}(z,\nu) \text{ или } \mathfrak{F}_F(z,\nu) = \mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu).$$

Отметим, что условия $\nu_1, \nu_2 > 0$ были нужны здесь для краткости изложения – их можно заменить условиями $\nu_1, \nu_2 \geq 0$. Кроме того, метод, предложенный в этом параграфе для произведения двух выражений, без особых затруднений обобщается на случай произведения конечного числа квазидифференциальных выражений.

5. Индекс дефекта минимального оператора

5.1. В этом параграфе будем предполагать, что, кроме условий 1) и 2) (см. введение), матрица F удовлетворяет также условию:
3) $F = -J^{-1}F^*J$, где F^* – матрица, сопряженная к матрице F, и

$$J := \left((-1)^i\delta_{i,m+1-j}\right), \quad i,j = 1,2,...m,$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Это условие обеспечивает справедливость формулы Лагранжа для квазидифференциального выражения τy (см. (2)), а именно, для любых функций $u, v \in \mathcal{D}(\tau)$ выполнено равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta \overline{v}\tau u - \int\limits_\alpha^\beta u\overline{\tau v} = [u,v](\beta) - [u,v](\alpha), \qquad \alpha,\beta \in (a,b),$$

где

$$[u,v](x) = i^m \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m+1-j}u^{[j]}(x)\overline{v^{[m-1-j]}(x)},$$

а квазипроизводные $y^{[j]}$ $(j = 0,1,\ldots,m-1)$ определяются формулами (1).

Следуя хорошо известной процедуре (см., например, [1], Section I, pp.1-6), определим минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порожденный выражением τy в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$. Обозначим через D_0' множество всех комплекснозначных финитных на $[1,+\infty)$ функций из $\mathcal{D}(\tau)$ таких, что $\tau y \in \mathcal{L}^2[1,+\infty)$. В работе [1] (см. Appendix A, p. 133) установлено, что множество D_0' является всюду плотным в $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$, а формулой $L_0'y = \tau y$ на множестве D_0' выражение τy определяет симметрический (незамкнутый) оператор в $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$ с областью определения D_0'. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно.

Таким образом, в рассматриваемом случае выражение τy порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$. Поэтому выражение τy называется симметрическим (формально самосопряженным) квазидифференциальным выражением, порожденным матрицей F.

Пусть λ – комплексное число такое, что его мнимая часть отлична от нуля ($Im\lambda \neq 0$). Через R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ обозначим области значений операторов $L_0 - \lambda I$ и $L_0 - \overline{\lambda}I$ соответственно (I – единичный оператор), а через $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ их ортогональные дополнения в пространстве $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$. Пространства $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ называются дефектными подпространствами, соответствующими числам λ и $\overline{\lambda}$. Их размерности $dim\ \mathcal{N}_\lambda$ и $dim\ \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ одинаковы в верхней и нижней полуплоскостях. Обозначим $n_+ = dim\ \mathcal{N}_\lambda$ и $n_- = dim\ \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ при $Im\lambda > 0$. Пару (n_+, n_-) называют индексом дефекта оператора L_0. Известно, что числа n_+ и n_- совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения (3), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2[1,+\infty)$, когда параметр λ берется из верхней ($Im\lambda > 0$) или нижней ($Im\lambda < 0$) полуплоскости соответственно. Числа n_+ и n_- удовлетворяют при $m = 2n$ неравенствам

$$n \leq n_+, n_- \leq m,$$

а при $m = 2n+1$ – неравенствам

$$n \leq n_+ \leq m, \quad n+1 \leq n_- \leq m, \quad \text{или} \quad n+1 \leq n_+ \leq m, \quad n \leq n_- \leq m.$$

5.2. Пусть теперь элементы матрицы F (F_{2n} или F_{2n+1}) удовлетворяют условиям (A) – (C) и дополнительно условию 3). Тогда, согласно параграфу 3, для уравнения (3) справедливы теорема 1 и следствие 1, и, кроме того, согласно п.5.1, выражение τy порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве

$\mathcal{L}^2[1,+\infty)$. Таким образом, следствие 1 – это утверждение об индексе дефекта оператора L_0, т.е. справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть элементы матрицы F (F_{2n} или F_{2n+1}) удовлетворяют условиям (A) – (C) и условию 3). Тогда при $\nu > 0$ дефектные числа оператора L_0 равны между собой и равны числу корней полинома $\mathfrak{F}(z,\nu)$ (см. замечание 4), лежащих в области $Rez < 0$.*

Теорему, аналогичную теореме 2, можно сформулировать и доказать для случая, когда квазидифференциальное выражение τy является произведением двух квазидифференциальных выражений (см. параграф 4, в частности, замечание 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N., Marcus L. Boundary Value Problems and Sumpletic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators // Providence, RI: AMS, Mathematical Surveys and Monographs, 1999. 61. P.1-187.
2. W. N. Everitt Lecture notes for the Fourth International Symposium on Differential equations and Differential Geometry, Beijing, Peoples' Republic of China (Department of Mathematics, University of Peking), 1986. P. 1-28
3. Мирзоев К. А., Шкаликов А. А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки, 2016. 99, 5. с.788-793.
4. Everitt W. N., Zettl A. Products of differential expressions without smoothness assumptions// Quaestiones Mathematicae, 1978. 3. P.67-82.
5. Мирзоев К. А., Конечная Н. Н. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами // Математические заметки, 2016. 100, 2. с.312-317.
6. Мирзоев К. А. О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН, 2001. Т.380, №5. С.591-595.
7. Мирзоев К. А., Долгих И. Н. Индексы дефекта и спектр самосопряжённых расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Математический сборник, 2006. 197(4). с.53-74.
8. Dunkel O. Regular singular points of a system homogeneous linear differential equations of the first order // Pros. Amer. Acad. Arts Sci., 1902-03. 38. p. 341-370.
9. Faedo S. Proprieta asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei // Annali di Matematica pura ed applicata, 1947. 26, 4. p. 207-215.
10. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных операторов: Пер. с англ. // М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 475 с.
11. Coppel W. A. Stability and asymptotic behavior of differential equations // Heath mathematical monographs, 1965. 166 p.

Конечная Наталья Николаевна,
САФУ имени М.В. Ломоносова,
Набережная Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия
E-mail: n.konechnaya@narfu.ru

Карахан Агахан оглы Мирзоев,
МГУ имени М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru