ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 38-49.

УДК 517.9

О КОММУТАНТЕ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И СДВИГА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ, Ю.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. Описываются линейные непрерывные операторы, действующие в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций многих комплексных переменных и перестановочные в нем с системами операторов частного дифференцирования и сдвига. При сделанных предположениях коммутанты систем операторов дифференцирования и сдвига совпадают. Они состоят из операторов свертки, задаваемых произвольным линейным непрерывным функционалом на E. При этом не предполагается, что множество многочленов плотно в E. В топологическом сопряженном к E пространстве E' естественным образом вводится умножение. С ним алгебра E' изоморфна упомянутому коммутанту с обычным умножением – композицией операторов. Этот изоморфизм является и топологическим, если E' наделено слабой, а коммутант – слабо-операторной топологией. Отсюда следует, что множество многочленов от операторов дифференцирования плотно в коммутанте с топологией поточечной сходимости. Исследована также возможность представления операторов из коммутанта в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Доказана автоматическая непрерывность линейных операторов, перестановочных со всеми операторами дифференцирования в весовом (LF)-пространстве целых функций, изоморфном посредством преобразования Фурье-Лапласа пространству бесконечно дифференцируемых в многомерном вещественном пространстве функций с компактным носителем.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, оператор сдвига, коммутант, весовое пространство целых функций.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 47B38, 46E10

Введение

Операторам в пространствах аналитических функций, перестановочным с дифференцированием, посвящено большое число работ. Линейные непрерывные операторы, перестановочные с операторами дифференцирования и сдвига в пространствах функций, аналитических в областях из $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^N$, изучались в [1], [3], [10], [15] (см. библиографию в [5, § 2.8]). Коммутанты операторов дифференцирования в весовых пространствах E целых функций изучены в [6], [16]. В пространстве целых (в $\mathbb{C}^N$) функций экспоненциального типа, реализующем сопряженное к пространству функций, голоморфных в области в $\mathbb{C}^N$, такое описание получено в [11] (см. также [12, § 2, предложение 1]). Если соответствующая область выпуклая, то это пространство с естественной топологией является весовым (LB)-пространством. В [7, гл. 9, § 7] исследованы линейные и непрерывные (в некотором смысле) операторы, перестановочные с дифференцированием в специальном

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, Yu.N. Melikhov, On the commutant of differetiation and translation operators in weighted spaces of entire functions.

Поступила 30 июня 2017 г.

пространстве P^* целых в $\mathbb{C}$ функций. Во всех рассмотренных ситуациях перестановочными с операторами дифференцирования оказываются операторы свертки, в частности, дифференциальные операторы бесконечного порядка, играющие важную роль в приложениях.

В настоящей работе описаны коммутанты $\mathcal{K}(\partial)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ систем операторов частного дифференцирования, соответственно, операторов сдвига в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых в $\mathbb{C}^N$ функций. Такие пространства E интенсивно применяются. Они возникают при реализации различных пространств посредством преобразования Фурье-Лапласа и его аналогов. Во всех предыдущих исследованиях при описании $\mathcal{K}(\partial)$ существенно использовалась плотность многочленов в соответствующих пространствах. Здесь мы не требуем, чтобы это свойство выполнялось и E содержало многочлены. Возможность этого дает полнота (см. § 1) системы функционалов $\varphi_\alpha : f \mapsto \partial^\alpha f(0)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, в топологическом сопряженном к E пространстве E' с топологией, согласующейся с двойственностью между E' и E. В другой ситуации упомянутый подход использован в [2] при описании операторов, перестановочных с оператором Поммье. Как и во многих других случаях, $\mathcal{K}(\partial)$ при сделанных предположениях совпадает с множеством $\mathcal{K}(\tau)$. Самое ограничительное среди этих предположений – условие (V2), близкое к полуаддитивности весов, задающих пространство E. Описание общего вида операторов из $\mathcal{K}(\tau)$ просто вследствие возможности перемены местами аргумента и вектора сдвига в коммутационном равенстве. Операторами из $\mathcal{K}(\partial) = \mathcal{K}(\tau)$ являются те и только те, которые действуют по правилу $f \mapsto \varphi_t(f(t+z))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in E$, где φ – произвольный линейный непрерывный функционал на E (т. е. операторы свертки). Произвольность функционала $\varphi \in E'$, как выше, обеспечивает условие (V2). Некоторую существенность условия (V2) для этого показывает пример пространства E преобразований Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ всех функций из $\mathcal{D}$ – пространства бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций с компактным носителем. В этом случае множества $\mathcal{K}(\partial)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ также совпадают, их элементы являются операторами свертки, но φ может принадлежать только собственному подпространству $(\mathcal{F}')^{-1}(C^\infty(\mathbb{R}^N))$ пространства E' (здесь $\mathcal{F}' : E' \to \mathcal{D}'$ – оператор, сопряженный к $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to E$) (в этом случае условие (V1) выполняется, а (V2) места не имеет). При этом доказывается результат *об автоматической непрерывности* линейных операторов в $\mathcal{D}$, перестановочных со всеми операторами умножения на независимые переменные. Отсюда следует, вследствие свойств преобразования Фурье-Лапласа, автоматическая непрерывность линейных операторов в $E \simeq \mathcal{D}$, перестановочных со всеми частными дифференцированиями.

В топологическом сопряженном E' к E (если веса обладают свойством (V2)) естественным образом вводится умножение $\odot$. Алгебра $(E', \odot)$ изоморфна алгебре $\mathcal{K}(\partial)$ с обычным умножением — композицией операторов. Соответствующий изоморфизм является и топологическим, если E' наделено слабой, а $\mathcal{K}(\partial)$ – слабо-операторной топологией. Такая слабая топологическая изоморфность E' и $\mathcal{K}(\partial)$ позволяет показать, что множество многочленов от операторов частного дифференцирования плотно в пространстве $\mathcal{K}(\partial)$, наделенном топологией поточечной сходимости, и исследовать возможность представления операторов из $\mathcal{K}(\partial)$ в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

1. Описание коммутанта системы операторов частного дифференцирования и операторов, инвариантных относительно сдвигов

1.1. Основной результат. Пусть $N \in \mathbb{N}$; $v_{n,k} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, — двойная последовательность непрерывных функций такая, что в $\mathbb{C}^N$

$$v_{n,k+1} \leq v_{n,k} \leq v_{n+1,k}, \ \ n, k \in \mathbb{N}.$$

Для $n, k \in \mathbb{N}$ введем весовые банаховы пространства целых функций

$$E_{n,k} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \middle| \ \|f\|_{n,k} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(v_{n,k}(z))} < +\infty \right\}$$

и пространства Фреше $E_n := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$. Топология в E_n задается последовательностью норм $\| \cdot \|_{n,k}, \ k \in \mathbb{N}$. При этом символ $H(\mathbb{C}^N)$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}^N$) функций. Каждое пространство E_n непрерывно вложено в E_{n+1}.

Положим $E := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$. В E введем топологию индуктивного предела пространств Фреше E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений вложения E_n в E.

Пусть $|z| := \left(\sum\limits_{j=1}^N |z_j|^2 \right)^{1/2}$ для $z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$. Определим условия

$(V1)$ $\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s$:

$$\lim_{|z| \to \infty} \left(\inf_{|t-z| \leq 1} v_{m,k}(t) - \sup_{|t-z| \leq 1} v_{n,s}(t) \right) = +\infty$$

и

$(V2)$ $\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s \ \exists C < +\infty : \ \forall \, t, z \in \mathbb{C}^N$

$$v_{n,s}(t + z) \leq v_{m,k}(t) + v_{m,k}(z) + C.$$

Замечание 1. Для того чтобы следить за зависимостью выбираемых индексов, мы будем в условии (V1) последовательность кванторов "$\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s$" записывать также так: "$\forall n \ \exists m(n) \ \forall k \ \exists s(n, k)$".

Пусть $\partial_j f := \frac{\partial f}{\partial z_j}$, $1 \leq j \leq N$. Введем операторы сдвига

$$\tau_z(f)(t) := f(t + z), \ \ z, t \in \mathbb{C}^N, \ \ f \in E.$$

Замечание 2. Пусть выполняется условие (V1). Тогда E обладает следующими свойствами:
(i) Каждый оператор ∂_j линейно и непрерывно отображает E в E. При этом $\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s$ $\exists B < +\infty$:

$$\|\partial_j f\|_{m,k} \leq B \|f\|_{n,s}, \ \ f \in E_n, \ 1 \leq j \leq N. \tag{1}$$

При этом m и s можно выбрать такими, как в условии (V1).
(ii) Для любого $z \in \mathbb{C}^N$ оператор τ_z линейно и непрерывно отображает E в E.
(iii) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m. При этом m для каждого n можно выбрать таким, как в условии (V1).

Доказательство. Неравенство (1) вытекает из (одномерной) интегральной формулы Коши. Оно влечет, что для любого n каждый оператор ∂_j непрерывно отображает E_n в E_m, а значит, E в E.

Утверждение (iii) вытекает из теоремы Монтеля.

□

Роль условия (V2) проясняет лемма 3.

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в E. Оно является кольцом с обычными операциями сложения и умножения (композиции) операторов. Введем коммутант $\mathcal{K}(\tau)$ системы операторов сдвига в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\tau) := \{A \in \mathcal{L}(E) \,|\, \forall z \in \mathbb{C}^N \; A\tau_z = \tau_z A \text{ в } E\}$$

и коммутант $\mathcal{K}(\partial)$ системы $\{\partial_j \,|\, 1 \le j \le N\}$ в $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(\partial) := \{A \in \mathcal{L}(E) \,|\, A\partial_j = \partial_j A \text{ в } E, \; 1 \le j \le N\}.$$

Пусть E' – топологическое сопряженное к E. Определим множество функционалов из E', "оставляющих" в E сдвиги всех функций из E:

$$\mathcal{M}(\tau) := \{\varphi \in E' \,|\, \varphi(\tau_{\cdot}(f)) \in E \text{ для любого } f \in E\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* $(V1)$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $A \in \mathcal{K}(\tau)$.

(ii) *Существует* $\varphi \in \mathcal{M}(\tau)$ *такое, что* $A(f)(z) = \varphi(\tau_z(f))$, $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$: Пусть $A \in \mathcal{K}(\tau)$. Тогда

$$A\tau_z(f)(t) = \tau_z A(f)(t) = \tau_t A(f)(z)$$

для любых $f \in E$, $t, z \in \mathbb{C}^N$. Полагая в последнем равенстве $t = 0$, получим, что для линейного непрерывного на E функционала $\varphi := \delta_0 A$, для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$ выполняется равенство $A(f)(z) = \varphi(\tau_z(f))$. При этом $\varphi \in \mathcal{M}(\tau)$. (Такое φ единственно, поскольку $\varphi = \delta_0 A$.)

$(ii) \Rightarrow (i)$: Непрерывность линейного оператора $A : E \to E$ следует из теоремы о замкнутом графике [14, гл. 6, теорема 6.7.1]. Перестановочность оператора A со всеми сдвигами очевидна.

□

Положим

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\};\; \partial^\alpha(f) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}},\; \alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N;\; |\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j.$$

Введем функционалы

$$\varphi_\alpha(f) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_N^{\alpha_N}}(0),\; f \in E,\; \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Ясно, что $\varphi_\alpha \in E'$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Через $\tau(E', E)$ обозначим топологию Макки в E', заданную естественной двойственностью между E и E' (см. [14, гл. 8, 8.3.3]), $E'_\tau := (E, \tau(E', E))$.

Замечание 3. Система $\{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в E' с любой топологией ξ, согласующейся с двойственностью между E' и E, т. е. замыкание линейной оболочки этой системы в (E', ξ) совпадает с E'. В частности, она полна в E'_τ. Действительно, если $f \in E$ и $\varphi_\alpha(f) = 0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то $f = 0$.

Лемма 1. Пусть выполняется условие (V1). Справедливо следующее: $\forall n \; \exists l \; \forall k$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in \mathbb{C}^N} \frac{\sup_{|z-t| \le \varepsilon} |f(z) - f(t)|}{\exp(v_{l,k}(t))} = 0$$

для любой функции $f \in E_n$.

Доказательство. Для любой целой функции f, любых $z, t \in \mathbb{C}^N$

$$f(z) - f(t) = \sum_{j=1}^{N}(z_j - t_j)\int_0^1 \partial_j f(t + \xi(z-t))d\xi.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая замечание 2 (i) (см. также замечание 1), получим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C_1 < +\infty$ такая, что при $\varepsilon \in (0,1]$ для любой функции $f \in E_n$

$$\sup_{t\in\mathbb{C}^N}\left(\left(\sup_{|z-t|\le\varepsilon}|f(z)-f(t)|\right)\exp(-v_{m(m(n)),k}(t))\right) \le$$

$$\varepsilon\sqrt{N}\sup_{1\le j\le N}\sup_{t\in\mathbb{C}^N}\left(\left(\sup_{|z-t|\le\varepsilon}|\partial_j f(z)|\right)\exp(-v_{m(m(n)),k}(t))\right) \le$$

$$\varepsilon\sqrt{N}\sup_{1\le j\le N}\sup_{t\in\mathbb{C}^N}\left(\left(\|\partial_j f\|_{m(n),s(m(n),k)}\sup_{|w-t|\le 1}\exp(v_{m(n),s(m(n),k)}(w))\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp(-v_{m(m(n)),k}(t))\right) \le C_1\varepsilon\sqrt{N}\|f\|_{n,s_1},$$

где $s_1 := s(n, s(m(n),k))$. Следовательно, справедливо утверждение леммы для $l := m(m(n))$. □

Введем орты в $\mathbb{C}^N$: $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^N$, $1 \le j \le N$.

Лемма 2. *Пусть выполняется условие (V1). Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}^N$ в E*

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\tau_{\eta e_j}(f) - f}{\eta} = \partial_j(f),\ 1 \le j \le N.$$

Эта лемма вытекает из леммы 1, примененной к функции $\partial_j f$ (в роли f), с учетом равенства $f(t+\eta e_j) - f(t) = \eta\int\limits_0^1 \partial_j f(t + \xi\eta e_j)d\xi$.

Функционалы (дельта-функции) $\delta_z(f) := f(z)$, $z \in \mathbb{C}^N$, очевидно, линейны и непрерывны на E.

Для $p \in \mathbb{N}$, множества $W \subset E_p$ через $\overline{\operatorname{aconv}(W)}^{E_p}$ обозначим замкнутую абсолютно выпуклую оболочку W в E_p.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Для любой функции $f \in E$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$, для*

$$V_{m,k}(f) := \left\{\exp(-v_{m,k}(t))f(\cdot + t)\,|\,t \in \mathbb{C}^N\right\}$$

множество $\overline{\operatorname{aconv}(V_{m,k}(f))}^{E_p}$ компактно в E_p.

Доказательство. Из условия (V2) следует, что найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что множество $V_{m,k}(f)$ ограничено в E_m для любого $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. По замечанию 2 найдется $p \in \mathbb{N}$, для которого $\overline{\operatorname{aconv}(V_{m,k}(f))}^{E_p}$ компактно в E_p. □

Для $n, k \in \mathbb{N}$ определим дуальные к $\|\cdot\|_{n,k}$ "нормы": для $\varphi \in E_n'$

$$\|\varphi\|_{n,k}' := \sup_{f\in E_n, \|f\|_{n.k}\le 1}|\varphi(f)|.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (V1) и (V2). Следующие утверждения равносильны:*

(*i*) $A \in \mathcal{K}(\partial)$.
(*ii*) $A \in \mathcal{K}(\tau)$.
(iii) *Существует* $\varphi \in E'$ *такое, что*

$$A(f)(z) = \varphi(\tau_z(f)),\ f \in E,\ z \in \mathbb{C}^N.$$

Доказательство. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^N$ и $f \in E$. Выполняется равенство

$$\tau_z(f)(t) = \delta_z(\tau_t(f)),\ t \in \mathbb{C}^N. \tag{2}$$

Вследствие замечания 3 существует сеть $\Phi_\mu = \sum\limits_{\gamma\in\omega_\mu} b_{\gamma,\mu}\varphi_\gamma$, $\mu \in \triangle$, сходящаяся к δ_z в E'_τ (ω_μ – конечные подмножества $\mathbb{N}_0^N$).

Докажем, что в E

$$\lim_{\mu\in\triangle} \sum_{\gamma\in\omega_\mu} b_{\gamma,\mu}\partial^\gamma(f) = \tau_z(f).$$

По лемме 3 найдутся $m, p \in \mathbb{N}$, для которых $\overline{\operatorname{aconv}(V_{m,k}(f))}^{E_p}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ компактно в E_p, а значит, и в E. Тогда $\overline{\operatorname{aconv}(V_{m,k}(f)}^{E_p}$ также и $\sigma(E,E')$-компактно в E. Поскольку $\lim\limits_{\mu\in\Delta}\Phi_\mu = \delta_z$ в E'_τ, то, учитывая равенство (2), получим:

$$A_\mu := \sup_{t\in\mathbb{C}^N} |(\Phi_\mu - \delta_z)(\exp(-v_{m,k}(t))f(\cdot+t))| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{C}^N}\left(\exp(-v_{m,k}(t))\Big|\sum_{\gamma\in\omega_\mu} b_{\gamma,\mu}\varphi_\gamma(f(\cdot+t)) - \tau_z(f)(t)\Big|\right) =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{C}^N}\left\|\sum_{\gamma\in\omega_\mu} b_{\gamma,\mu}\partial^\gamma(f) - \tau_z(f)\right\|_{m,k},\ \mu\in\triangle.$$

Поскольку $A_\mu \to 0$, $\mu \in \triangle$, для любого $k \in \mathbb{N}$, то в E_m, а значит, и в E

$$\lim_{\mu\in\triangle} \sum_{\gamma\in\omega_\mu} b_{\gamma,\mu}\partial^\gamma(f) = \tau_z(f).$$

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Следует из леммы 2.

Импликация (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) справедлива по теореме 1.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*): Вследствие теоремы 1 достаточно показать, что $\mathcal{M}(\tau) = E'$. Зафиксируем $\varphi \in E'$. Из леммы 2 и теоремы Хартогса следует, что $\varphi(\tau_z(f))$ – целая функция по $z \in \mathbb{C}^N$. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и выберем m по n по условию (V2). Так как $\varphi \in E'$, то для некоторого k функционал φ непрерывен по норме $\|\cdot\|_{m,k}$. Определим s и C по условию (V2). Тогда для $f \in E_n$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\frac{|\varphi(\tau_z(f))|}{\exp(v_{m,k}(z))} \le \|\varphi\|'_{m,k}\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\frac{\|f(\cdot+z)\|_{m,k}}{\exp(v_{m,k}(z))} \le$$

$$\|\varphi\|'_{m,k}\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\sup_{t\in\mathbb{C}^N}\frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{m,k}(t)+v_{m,k}(z))} \le e^C\|\varphi\|'_{m,k}\sup_{t,z\in\mathbb{C}^N}\frac{|f(t+z)|}{\exp(v_{n,s}(z+t))} =$$

$$e^C\|\varphi\|'_{m,k}\|f\|_{n,s} < +\infty.$$

Следовательно, $\varphi(\tau_\cdot(f)) \in E$. Кроме того, последнее неравенство влечет непрерывность оператора A из E_n в E_m, а поэтому из E в E. (Непрерывность линейного оператора $A : E \to E$ следует также из теоремы о замкнутом графике [14, гл. 6, теорема 6.7.1].)

□

1.2. Пример. Автоматическая непрерывность линейных операторов, перестановочных с операторами дифференцирования. Приведем пример пространства E, для которого множества $\mathcal{K}(\partial)$ и $\mathcal{K}(\tau)$ совпадают, но утверждения (i) и (ii) теоремы 2 не равносильны (iii), т. е. $M(\tau)$ – собственное подпространство E'. При этом мы доказываем один результат об автоматической непрерывности линейных операторов, перестановочных с операторами ∂_j, $1 \le j \le N$. Пусть $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций с компактным носителем, наделенное естественной топологией (LF)-пространства. Положим

$$\langle t, z\rangle = \sum_{j=1}^{N} t_j z_j,\ t = (t_j)_{j=1}^N, z = (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N.$$

Как известно, преобразование Фурье-Лапласа

$$\mathcal{F}(h)(z) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(x) e^{-i\langle x,z\rangle} dx,\ \ z \in \mathbb{C}^N,$$

является топологическим изоморфизмом $\mathcal{D}$ на (LF)-пространство $E_{\mathcal{D}} := E$, заданное, как выше, функциями $v_{n,k}(z) := \exp(n|\mathrm{Im}\, z| - k\log(1+|z|))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n, k \in \mathbb{N}$. Эта последовательность удовлетворяет условию (V1), но не удовлетворяет условию (V2).

Положим $e_z(t) := e^{-i\langle z,t\rangle}$, $\ t, z \in \mathbb{C}^N$. Введем операторы умножения на независимые переменные x_j: $M_j(f)(x) := x_j f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Через I будем обозначать тождественный оператор в $\mathcal{D}$.

Предложение 1. *Для любого линейного оператора $A : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ равносильны следующие утверждения:*

(i) *A перестановочен с каждым оператором M_j, $1 \le j \le N$.*
(ii) *Существует функция $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что $A(f) = af$, $f \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ очевидна.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Пусть линейный оператор $A : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ таков, что $AM_j = M_j A$, $1 \le j \le N$, на $\mathcal{D}$.

Возьмем $f \in \mathcal{D}$ и какую-либо функцию $h \in D$ такую, что $h \equiv 1$ на $\mathrm{supp}\, f$. Тогда $f = fh$. Для $x = (x_j)_{j=1}^N, \lambda = (\lambda_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ положим

$$f_{j,\lambda}(x) := f(\lambda_1, ..., \lambda_{j-1}, x_j, ..., x_N) - f(\lambda_1, ..., \lambda_{j-1}, \lambda_j, x_{j+1}, ..., x_N),\ 2 \le j \le N;$$

$$f_{1,\lambda}(x) := f(x) - f(\lambda_1, x_2, ..., x_N).$$

Ясно, что

$$f = f(\lambda)h + \sum_{j=1}^{N} f_{j,\lambda} h. \tag{3}$$

По формуле Тейлора

$$f_{j,\lambda}(x) = (x_j - \lambda_j)\partial_j f(\lambda_1, ..., \lambda_j, x_{j+1}, ..., x_N) +$$

$$(x_j - \lambda_j)^2 \int\limits_0^1 (1-s)\partial_j^2 f(\lambda_1, ..., (1-s)\lambda_j + s x_j, x_{j+1}, ..., x_N) ds =$$

$$(x_j - \lambda_j)\widetilde{f}_{j,\lambda}(x),\ \ \lambda \in \mathbb{R}^N,\ 1 \le j \le N.$$

где функция

$$\widetilde{f}_{j,\lambda}(x) := \partial_j f(\lambda_1, ..., \lambda_j, x_{j+1}, ..., x_N) +$$

$$(x_j-\lambda_j)\int\limits_0^1(1-s)\partial_j^2 f(\lambda_1,...,(1-s)\lambda_j+sx_j,x_{j+1},...,x_N)ds$$

бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^N$.

Пусть $\delta_\lambda(f)=0$, т. е. $f(\lambda)=0$. Поскольку $f_{j,\lambda}h=(M_j-\lambda_jI)(\widetilde{f}_{j,\lambda}h)$, $1\le j\le N$, то, вследствие (3),

$$A(f)(\lambda)=\sum_{j=1}^N A(M_j-\lambda_jI)(\widetilde{f}_{j,\lambda}h)(\lambda)=$$

$$\sum_{j=1}^N(\lambda_jA(\widetilde{f}_{j,\lambda}h)(\lambda)-\lambda_jA(\widetilde{f}_{j,\lambda}h)(\lambda))=0.$$

Определим на $\mathcal{D}$ линейный функционал $\gamma_\lambda(f):=A(f)(\lambda)$, $f\in\mathcal{D}$. Тогда, как показано выше, $\operatorname{Ker}\delta_\lambda\subset\operatorname{Ker}\gamma_\lambda$. Поэтому для любого $\lambda\in\mathbb{R}^N$ существует $a(\lambda)\in\mathbb{C}$ такое, что $A(f)(\lambda)=a(\lambda)f(\lambda)$ для любой функции $f\in\mathcal{D}$. Очевидно, что $a\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. □

Следствие 1. *(i) Всякий линейный оператор $A:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$, перестановочный с каждым оператором M_j, $1\le j\le N$, непрерывен.*
(ii) Всякий линейный оператор $A:E_{\mathcal{D}}\to E_{\mathcal{D}}$, перестановочный с каждым оператором ∂_j, $1\le j\le N$, непрерывен.

Отметим, что в [9, лемма 1.7], [4] описаны линейные операторы, перестановочные с умножением на независимую переменную в пространствах голоморфных функций одной комплексной переменной, и доказана автоматическая непрерывность этих операторов.

Из предложения 1 и стандартных свойств преобразования Фурье-Лапласа следует, что принадлежность оператора A множеству $\mathcal{K}(\partial)$ равносильна тому, что найдется (единственная) функция $a\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что $A=\mathcal{F}M_a\mathcal{F}^{-1}$, где M_a – оператор умножения на функцию a. Для $a\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f\in E_{\mathcal{D}}$, $z\in\mathbb{C}^N$

$$\mathcal{F}M_a\mathcal{F}^{-1}(f)(z)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}e^{-i\langle x,z\rangle}a(x)\mathcal{F}^{-1}(f)(x)dx=a\left(\mathcal{F}^{-1}(f)e_z\right).$$

При этом a отождествляется с регулярной обобщенной функцией, задаваемой a. С другой стороны, если $\mathcal{F}':E'_{\mathcal{D}}\to\mathcal{D}'$ – отображение, сопряженное к $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to E_{\mathcal{D}}$, то

$$((\mathcal{F}')^{-1}(a))_t(f(t+z))=a\left(\mathcal{F}^{-1}(f)e_z\right).$$

Отсюда следует, что в данном случае $M(\tau)$ "значительно уже" E', а именно,

$$M(\tau)=\{\varphi\in E'\,|\,\mathcal{F}'(\varphi)\in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}.$$

2. Умножение $\odot$ в E' и свойства алгебры $(E',\odot)$

Далее предполагается, что последовательность $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (V1) и (V2). Определим в E' операцию умножения $\odot$. Для $\varphi,\psi\in E'$ положим

$$(\varphi\odot\psi)(f):=\varphi_t(\psi(\tau_t(f))),\ f\in E.$$

Вследствие теоремы 2 и того, что $\varphi=\delta_0\omega(\varphi)$, операция $\odot$ определена корректно, а отображение $\omega:E'\to\mathcal{K}(\partial)$,

$$\omega(\varphi)(f)(z):=\varphi(\tau_z(f)),\ \varphi\in E',\ f\in E,\ z\in\mathbb{C}^N,$$

биективно. Поскольку для любых $\varphi,\psi\in E'$, $f\in E$, $z\in\mathbb{C}^N$

$$\omega(\varphi\odot\psi)(f)(z)=(\varphi\odot\psi)(\tau_z(f))=\varphi_t(\psi(\tau_t(\tau_z(f))))=\varphi(\omega(\psi)(\tau_z(f)))=$$

$$\varphi(\tau_z(\omega(\psi))(f))=\omega(\varphi)(\omega(\psi)(f))(z)=\omega(\varphi)\omega(\psi)(f)(z),$$

то ω – изоморфизм алгебр $(E', \odot)$ и $\mathcal{K}(\partial)$ (в последней умножением является композиция операторов). Отсюда вытекает, что умножение $\odot$ в E' ассоциативно.

Следующая ниже лемма 4 влечет, что композиция операторов в $\mathcal{K}(\partial)$ коммутативна.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия (V1) и (V2).*

(i) *Если сеть $\Psi_\nu \in E'$, $\nu \in \Delta$, сходится к $\psi \in E'$ в E'_τ, то для любой функции $f \in E$ в E'_τ существует $\lim\limits_{\nu\in\Delta} (\Psi_\nu)_z\,(f(\cdot + z))$, равный $\psi_z(f(\cdot + z))$.*

(ii) *Алгебра $(E', \odot)$ коммутативна.*

Доказательство. (i): Зафиксируем $f \in E$. Вследствие леммы 3 найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$, для которых множество $\mathcal{V} := \overline{\operatorname{aconv}(V_{m,k}(f))}^{E_p}$ компактно в E_p, где $V_{m,k}(f) := \Big\{\exp(-v_{m,k}(t))\tau_t(f) \,|\, t \in \mathbb{C}^N\Big\}$. Так как E_p непрерывно вложено в $(E, \sigma(E, E'))$, то $\mathcal{V}$ также $\sigma(E, E')$-компактно. Следовательно, сеть $\{\Psi_\nu \,|\, \nu \in \Delta\}$ сходится к ψ равномерно на $\mathcal{V} \supseteq V_{m,k}(f)$. Поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{C}^N} |\exp(-v_{m,k}(t))\,(\Psi_\nu - \psi)_z\,(f(t+z))| \underset{\nu\in\Delta}{\longrightarrow} 0$$

и $p_{m,k}\left((\Psi_\nu - \psi)_z\,(f(\cdot + z))\right)| \underset{\nu\in\Delta}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, в E_m, а значит, и в E

$$\lim_{\nu\in\Delta} (\Psi_\nu)_z\,(f(\cdot + z)) = \psi_z(f(\cdot + z)).$$

(ii): Возьмем $\varphi, \psi \in E'$. Поскольку, по замечанию 3, множество функционалов $\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в E'_τ, то найдутся сети $\Phi_\mu \in \operatorname{span}\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\mu \in \Lambda$, и $\Psi_\nu \in \operatorname{span}\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, $\nu \in \Delta$, сходящиеся в E'_τ к φ и ψ, соответственно. Отметим, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, любой функции $g \in H(\mathbb{C}^N)$

$$(\varphi_\alpha)_z((\varphi_\beta)_t(g(t+z))) = (\varphi_\beta)_t((\varphi_\alpha)_z(g(t+z))).$$

Поэтому для любой функции $f \in E$, с учетом утверждения (i), получим:

$$(\varphi \odot \psi)(f) = \varphi_t(\psi_z(f(t+z))) = \varphi_t(\lim_{\nu\in\Delta}(\Psi_\nu)_z(f(t+z))) =$$

$$\lim_{\nu\in\Delta}\varphi_t((\Psi_\nu)_z(f(t+z))) = \lim_{\nu\in\Delta}(\lim_{\mu\in\Lambda}(\Phi_\mu)_t((\Psi_\nu)_z(f(t+z))) =$$

$$\lim_{\nu\in\Delta}(\lim_{\mu\in\Lambda}(\Psi_\nu)_z((\Phi_\mu)_t(f(t+z))) = \lim_{\nu\in\Delta}((\Psi_\nu)_z(\lim_{\mu\in\Lambda}(\Phi_\mu)_t(f(t+z))) =$$

$$\lim_{\nu\in\Delta}(\Psi_\nu)_z(\varphi_t(f(t+z))) = \psi_z(\varphi_t(f(t+z))) = (\psi \odot \varphi)(f).$$

□

Замечание 4. Ненулевыми мультипликативными линейными $\sigma(E', E)$-непрерывными функционалами, т. е. ненулевыми мультипликативными функционалами вида $\varphi \mapsto \varphi(g)$, $\varphi \in E'$, где g – фиксированный элемент E, на $(E', \odot)$ являются те и только те, которые задаются функцией $g(z) = e^{\langle \nu, z\rangle}$, $\nu \in \mathbb{C}^N$, если она принадлежит E. Поэтому для каждой такой функции g гиперподпространство $H_g := \{\varphi \in E' \,|\, \varphi(g) = 0\}$ является $\sigma(E', E)$-замкнутым максимальным идеалом в $(E', \odot)$.

Доказательство. Очевидно, что всякий функционал $G(\varphi) := \varphi_z(e^{\langle \nu, z\rangle})$, если $e^{\langle \nu, \cdot\rangle} \in E$, мультипликативен. Пусть $G(\varphi) = \varphi(g)$, $\varphi \in E'$, для некоторой функции $g \in E$. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^N$ выполняется равенство

$$g(\lambda)g(\mu) = G(\delta_\lambda)G(\delta_\mu) = G(\delta_\lambda \odot \delta_\mu) = g(\lambda + \mu).$$

Отсюда следует, что (ненулевая) функция g является функцией $e^{\langle \nu, z\rangle}$, $z \in \mathbb{C}^N$, для некоторого $\nu \in \mathbb{C}^N$. (Это, по сути, показано при доказательстве леммы 9.24 [8].) □

2.1. Топологический изоморфизм E' и $\mathcal{K}(\partial)$. Рассмотрим случай, когда рассматриваемые пространства снабжены слабыми и с ними связанными топологиями. Обозначим символом $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$ пространство $\mathcal{K}(\partial)$ со слабо-операторной топологией, т. е. топологией поточечной сходимости, когда в E введена слабая топология $\sigma(E, E')$ (см. [13, гл. III, § 3, пример 4 (a), с. 104]). Отметим, что вследствие бочечности E пространство всех линейных слабо непрерывных операторов в E алгебраически совпадает с $\mathcal{L}(E)$ [14, гл. 8, § 8.6, с. 703; теорема 8.6.1]. Далее $\sigma := \sigma(E', E)$.

Теорема 3. *Отображение ω является топологическим изоморфизмом (E', σ) на $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$.*

Доказательство. Для любого конечного множества $M \subset E$, любого $\varphi \in E'$

$$\sup_{f\in M} |\varphi(f)| = \sup_{f\in M} |\delta_0(\omega(\varphi)(f))|.$$

Следовательно, отображение $\omega^{-1} : \mathcal{K}_\sigma(\partial) \to (E', \sigma)$ непрерывно.

Непрерывность отображения $\omega : (E', \sigma) \to \mathcal{K}_\sigma(\partial)$ следует из того, что для любых конечных множеств $M \subset E$, $P \subset E'$, любого $\varphi \in E'$, с учетом леммы 4 (ii),

$$\sup_{f\in M, \psi\in P} |\psi(\omega(\varphi)(f))| = \sup_{f\in M, \psi\in P} |\psi_z(\varphi_t(f(t+z)))| = \sup_{f\in M, \psi\in P} |(\psi \odot \varphi)(f)| =$$

$$\sup_{f\in M, \psi\in P} |(\varphi \odot \psi)(f)| = \sup_{f\in M, \psi\in P} |\varphi_t(\psi_z(f(t+z)))| = \sup_{v\in \widetilde{M}} |\varphi(v)|,$$

где $\widetilde{M}$ – конечное подмножество E, состоящее из функций $\psi_z(f(t+z))$ переменной t, $f \in M$, $\psi \in P$. $\square$

Пусть $\mathcal{P}(\partial) := \operatorname{span}\{\partial^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$, т. е. $\mathcal{P}(\partial)$ — множество всех многочленов от операторов ∂_j, $1 \le j \le N$.

Следствие 2. *Множество $\mathcal{P}(\partial)$ плотно в $\mathcal{K}(\partial)$, наделенном топологией поточечной сходимости.*

Доказательство. Поскольку по замечанию 3 множество $\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в (E', σ), то в силу теоремы 3 множество $\{\partial^\alpha = \omega(\varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полно в $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$. Поэтому для любого $f \in E$ в пространстве E множество $\mathcal{P}(\partial)(f) := \{A(f) \,|\, A \in \mathcal{P}(\partial)\}$ слабо плотно в $\mathcal{K}(\partial)(f) := \{A(f) \,|\, A \in \mathcal{K}(\partial)\}$. Значит, для любого $f \in E$ множество $\mathcal{P}(\partial)(f)$ плотно в $\mathcal{K}(\partial)(f)$ и по топологии E. Таким образом, $\mathcal{P}(\partial)$ плотно в $\mathcal{K}(\partial)$, наделенном топологией поточечной сходимости. $\square$

Из теоремы 3 вытекает следующий результат, проясняющий природу пространств E, для которых всякий оператор из $\mathcal{K}(\partial)$ является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Следствие 3. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $\{\varphi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ *— базис в* $(E', \sigma(E', E))$.
(ii) $\{\partial^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ *— базис в* $\mathcal{K}_\sigma(\partial)$.

Пример 1. Пусть Q – выпуклое локально замкнутое множество в $\mathbb{C}^N$, содержащее 0; $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность компактных подмножеств Q (без ограничения общности все компакты Q_n выпуклы и $Q_n \subset Q_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$). Обозначим через H_{Q_n} опорную функцию Q_n, т. е. $H_{Q_n}(z) := \sup\limits_{t\in Q_n} \operatorname{Re}\langle t, z\rangle$, $z \in \mathbb{C}^N$. Последовательность $v_{n,k}(z) := H_{Q_n}(z) + |z|/k$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям (V1) и (V2). В этом случае E реализует (посредством преобразования Лапласа) сильное сопряженное к пространству $H(Q)$ ростков всех функций, голоморфных на Q [17, лемма 1.10].

Отметим, что Q может быть выпуклой областью или выпуклым замкнутым множеством в $\mathbb{C}^N$. Если $Q = \mathbb{R}^N$, то $H(Q) = \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ – пространство вещественно аналитических в $\mathbb{R}^N$ функций.

Пример 2. Положим $v_{n,k}(z) := n(|\operatorname{Im} z| + \log(1 + |z|))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $n, k \in \mathbb{N}$ (функции $v_{n,k}$ не зависят от k). Последовательность $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (V1) и (V2). Пространство E, заданное ею, реализует посредством преобразования Фурье-Лапласа сильное сопряженное к пространству Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. *Общий вид линейных операторов, перестановочных с операцией дифференцирования* // Математ. заметки. Т.12, вып. 2. 1972. С. 187–195.
2. Иванова О.А., Мелихов С.Н. *Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций* // Алгебра и анализ. Т.28, вып. 2. 2016. С. 114–137.
3. Коробейник Ю.Ф. *Об одном классе линейных операторов* // Годишник на ВТУЗ. Математика. Т.9, вып 3. 1973. С. 23–33.
4. Коробейник Ю.Ф. *О представлении линейных операторов, перестановочных с оператором умножения* // Analysis Math. V.32, вып. 2. 2006. С. 123–153.
5. Коробейник Ю.Ф. *О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений*, Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ. 2009. 252 с.
6. Коробейник Ю.Ф., Моржаков В.В. *Общий вид изоморфизмов, перестановочных с оператором дифференцирования, в пространствах целых функций медленного роста* // Матем. сб. Т.91 (133), вып. 4. 1973. С. 475–487.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*, М.: ГИТТЛ. 1956. 632 с.
8. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных*, М.: Мир. 1989. 350 с.
9. Мелихов С.Н. *О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций* // Алгебра и анализ. Т.14, вып. 1. 2002. С. 99–133.
10. Напалков В.В. *Об операторах, перестановочных с дифференцированием, в пространствах функций от нескольких переменных* // Матем. заметки. Т.24, вып. 6. 1978. С. 829–838.
11. Трутнев В.М. *Неоднородные уравнения свертки в некоторых пространствах целых функций экспоненциального типа* // Комплексный анализ и дифференциальные уравнения. Краснояр. гос. ун-т. Красноярск. 1996. С. 234–239.
12. Трутнев В.М. *Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. Т.108. 2006. С. 158–180.
13. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир. 1971. 360 с.
14. Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* М.: Мир. 1969. 1072 с.
15. G. Godefroy, J.H. Shapiro *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. of Funct. anal. V.98, 1991. P. 229–269.
16. A. Martineau *Equations differentielles d'ordre infini* // Bull. Soc. Math. France. V.95. 1967. P. 109-154.
17. S.N. Melikhov, S. Momm *Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary* // Math. Scand. V.86. 2000. P. 293–319.

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет, Институт математики,
механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: *ivolga@sfedu.ru*

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет, Институт математики,
механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: *melih@math.rsu.ru*

Юрий Николаевич Мелихов,
Военная академия ВКО им. Г.К. Жукова
ул. Жигарева, 50,
170022, г. Тверь, Россия
E-mail: *melikhow@mail.ru*