ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 50-62.

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ ФУНКЦИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $A^\infty(D)$

К.П. ИСАЕВ, К.В. ТРУНОВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ — выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности":

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

$\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=1}^\infty$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — последовательности, полученные из исходных удалением k первых членов. Далее, для каждой последовательности $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ мы рассматриваем Банахово пространство $H(\mathcal{M}_0, D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области D функций с нормой

$$\|f\|^2 = \sup_n \frac{1}{M_n^2} \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)|^2.$$

В работе изучаются локально выпуклые подпространства в пространстве аналитических функций в D, бесконечно дифференцируемых в $\overline{D}$, которые получаются как индуктивный предел пространств $H(\mathcal{M}_k, D)$. Доказано, что для любой выпуклой области существует система экспонент $e^{\lambda_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, такая что любая функция из индуктивного предела $f \in \lim ind\, H(\mathcal{M}_k, D) := \mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент, причем ряд сходится в топологии $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$. Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Характеристические функции L, имеющие более точные асимптотические оценки, позволяют представлять аналитические функции посредством ряда из экспонент в пространствах с более тонкой топологией. В работе построены целые функции с тонкими асимптотическими оценками. Дополнительно получены оценки снизу производных этих функций в нулях.

Ключевые слова: аналитические функции, целые функции, субгармонические функции, ряды экспонент.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D20, 30D60

1. Введение

В работе рассматриваются подпространства $A \subset A^\infty(D) = H(D) \bigcap C^\infty(\overline{D})$ для ограниченной выпуклой области D на плоскости на предмет представления функций $f \in A$ из этих подпространств рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty f_n e^{\lambda_n z},$$

сходящихся в топологии подпространства A. В классической теории рядов экспонент, подробно изложенной в монографии [1] А.Ф. Леонтьева, одной из основных теорем является

K.P. Isaev, K.V. Trounov, R.S. Yulmukhametov, Representation of functions in locally convex subspaces of $A^\infty(D)$ by series of exponentials.

Поступила 1 июня 2017 г.

теорема о представлении рядами экспонент в $H(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из D (Теорема 5.3.2., стр. 382 в [1]):

Теорема A. *Пусть D — ограниченная выпуклая область. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно в D разложить в ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},\ z \in D.$$

Основным инструментом в конструкции систем экспонент служат целые функции с заданным асимптотическим поведением. Например, в доказательстве теоремы A показатели $\{\lambda_n\}$ выбираются как простые нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста со свойством: при любом $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)+\varepsilon|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{C},\ |L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)-\varepsilon|\lambda_n|}, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

здесь $H_D(\lambda) = \max_{z\in\overline{D}} \operatorname{Re} \lambda\overline{z}$ — опорная функция области D. В связи с этим обстоятельством в теории представления рядами экспонент обособленное место занимали выпуклые многоугольники. Дело в том, что характеристическую целую функцию L в этом случае можно взять в виде квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_j a_j e^{\gamma_j \lambda},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

здесь γ_j — вершины многоугольника, и требуемое свойство (1) будет выполняться в существенно более точном виде

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},\ |L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)}, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

С помощью таких целых функций в [1] (стр. 328, Теорема 4.7.4.) доказано, что функция, аналитическая в многоугольнике D и непрерывная вместе со своей первой производной в $\overline{D}$, может быть представлена в виде ряда по системе $e^{\lambda_n z}$, причем этот ряд сходится всюду в $\overline{D}$ и равномерно сходится в $\overline{D} \setminus \bigcup B(\gamma_j, \varepsilon)$, здесь γ_j — вершины многоугольника и $\varepsilon > 0$ — произвольное. В работе [2] доказано, что эта система образует (безусловный) базис в пространстве Смирнова $E_2(D)$.

Теорема B. *Пусть функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n удовлетворяет условиям*

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},\ |L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)}, z \notin \bigcup_n B(\lambda_n, \delta),$$

причем круги $B(\lambda_n, \delta)$ попарно не пересекаются. Тогда любая функция $f \in E_2(D)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

и при этом выполняется соотношение

$$\|f\|^2 \asymp \sum_n |f_n|^2 e^{-2H_D(\lambda_n)}, f \in E_2(D).$$

Таким образом, характеристические функции L, имеющие более точные асимптотические оценки, позволяют представлять аналитические функции посредством ряда из экспонент в пространствах с более тонкой топологией.

Задача о существовании и конструировании целых функций с заданными асимптотическими свойствами возникла как внутренняя задача теории целых функций. В наиболее общем виде такая задача решена в работе [3]:

Теорема C. *Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| = o(|\lambda|^\rho), \lambda \notin E, |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Исключительное множество E является C_0-множеством, то есть оно может быть покрыто кругами $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k|\le R} r_k = o(R),\ R \longrightarrow \infty.$$

В работе [4] эта теорема уточнена в смысле оценок разности и размеров исключительного множества.

Теорема D. *Для любой субгармонической функции u на плоскости, имеющей конечный порядок роста, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| = O(\ln(|\lambda|+1)),\ \lambda \notin E, \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Для любого $\beta > 0$ исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$ так, что

$$\sum_{|w_k|\ge R} r_k = O(R^{-\beta}),\ R \longrightarrow \infty.$$

Теоремы C и D не могут быть непосредственно применены в вопросах разложения в ряды экспонент. Дополнительно нужно получить нижние оценки для $|L'(\lambda_k)|$, а для этого нужно иметь не только оценки размеров исключительного множества, но в большей степени нужна информация о структуре этого множества.

В данной работе будет доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный порядок роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a,\ \alpha > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \le a(|z|+1)^\alpha t,\ t \in (0; (|z|+1)^{-\alpha}), \tag{3}$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n такими, что при некоторых $\delta, \beta > 0$ круги $B_n = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B, C удовлетворяет соотношениям

$$\ln|f(\lambda)| \le u(\lambda) + A_1 \ln(|\lambda|+1),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\ln|f(\lambda)| \ge u(\lambda) - A_2 \ln(|\lambda|+1),\ \lambda \notin \bigcup_n B_n,$$

$$\ln|f'(\lambda_n)| \ge u(\lambda_n) - A_3 \ln(|\lambda_n|+1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Постоянные A_1, A_2, A_3 зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u.

Далее, для каждой последовательности $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ мы рассмотрим Банахово пространство $H(\mathcal{M}_0, D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области D функций с нормой

$$\|f\|^2 = \sup_n \frac{1}{M_n^2} \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)|^2.$$

Пусть

$$T_k(r) = \sup_n \frac{r^n}{M_{n+k}},\ k = 0, 1, 2, ...-$$

— функции следа "сдвинутых" последовательностей $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=1}^\infty$. Через $P_k(D)$ обозначим банаховы пространства целых функций F с нормой

$$\|F\|^2 = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|^2 e^{-2H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)},$$

а через $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ проективный предел пространств P_k, $k = 0, 1, 2, \dots$. В работе [5] показано (Теорема 1), что каждая функция $f \in H(\mathcal{M}_k, D)$, $k \in \mathbb{N}$, является преобразованием Фурье – Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, то есть

$$f(z) = S_\lambda(e^{\lambda z}), z \in D.$$

Используя этот факт и идею достаточных множеств мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^\infty$ — выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"*

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty.$$

Для любой выпуклой области существует система экспонент $e^{\lambda_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что любая функция из индуктивного предела

$$f \in \lim ind\, H(\mathcal{M}_k, D) := \mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$$

представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_n f_n e^{\lambda_n z},$$

причем ряд сходится в топологии $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

Такие системы в дальнейшем будем называть представляющими системами.

2. Целые функции с заданным асимптотическим поведением. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 представляет собой небольшую модификацию доказательства теоремы 4′ из работы [4].

Лемма 1. *Пусть u, $u(0) = 0$, субгармонична на всей плоскости и удовлетворяет условию*

$$u(\lambda) \le \sigma(|\lambda| + 1)^\rho,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Предположим, что ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (3). Тогда существует субгармоническая функция $v \in C^\infty(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условиям (3), (4) и

$$u(\lambda) \le v(\lambda) \le u(\lambda) + O(\ln(|\lambda| + 1),\ \lambda \longrightarrow \infty,$$
$$\Delta v(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}),\ \lambda \longrightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 1.

Из условия (4) по формуле Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi = \int_0^R \frac{\mu(t)}{t}dt$$

следует, что

$$\mu\left(\frac{R}{e}\right) \le \sigma(R+1)^\rho,\ R > 0,$$

или

$$\mu(R) \le \sigma e^\rho (R+1)^\rho,\ R > 0. \tag{5}$$

Разобьем отрезок $[2^{n-1}; 2^n]$ на $N_n = [\sigma e^\rho 2^{(n+1)(\rho+1)}] + 1$ ($[x]$ обозначает целую часть x) отрезков I_k равной длины. Тогда по принципу Дирихле найдется хотя бы одно кольцо $S_n := \{z = te^{i\varphi}, t \in I_{k_n}, \varphi \in [0; 2\pi]\}$, у которого μ — мера удовлетворяет оценке

$$\mu(S_n) \le \frac{\mu(2^n)}{N_n} < 2^{-n}. \tag{6}$$

Ширину этих колец обозначим через h_n:

$$S_n = \{z : R_n \leq |z| < R_n + h_n\},\ n \in \mathbb{N},$$

при этом

$$h_n \geq \frac{1}{8\sigma e^\rho} 2^{-(n+1)\rho}, R_n \in [2^n; 2^{n+1}]. \tag{7}$$

Пусть

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,|_{S_n}$$

— сумма сужений меры μ на кольцо S_n. Из (6) следует, что $\nu(\mathbb{C}) \leq 1$. Отсюда и из условия (3) обычными в этих вопросах выкладками доказывается оценка

$$\pi(\lambda) := \int_{\mathbb{C}} \ln \left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) = O(\ln(|\lambda| + 1)),\ \lambda \longrightarrow \infty.$$

Функция $u_0(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$

1) субгармонична на всей плоскости, гармонична в кольцах S_n;
2) ассоциированная мера μ_0 удовлетворяет условиям (3), (4);
3) удовлетворяет оценке

$$|u_0(\lambda) - u(\lambda)| = |\pi(\lambda)| = O(|\lambda| + 1),\ \lambda \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

Применим к функции u_0 процедуру регуляризации. Пусть $\alpha(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — неотрицательная, финитная функция с носителем в $[-1; 1]$, такая, что

$$\int_{\mathbb{C}} \alpha(|\lambda|) dm(\lambda) = 1,$$

где dm — плоская мера Лебега. Возьмем последовательность чисел

$$\delta_n = \min\left(\frac{h_n}{4}, 2^{-\alpha(n+2)}\right)$$

и положим

$$\alpha_n(\lambda) = \delta^{-2}\alpha(\delta^{-1}(\lambda - w)).$$

Тогда функции

$$u_n(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

обладают общими свойствами регуляризаций

1) субгармоничны, бесконечно дифференцируемы и

$$u_n(\lambda) \geq u_0(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

и свойством, вытекающим из свойств u_0,

2) в кольце $\widetilde{S} = \{\lambda : |\lambda| \in [R_n + \frac{h_n}{4}; R_n + \frac{3h_n}{4}]\}$ $u_n(\lambda) \equiv u_0(\lambda)$.

Определим функцию v следующим образом

$$v(\lambda) = u_n(\lambda),\ |\lambda| \in \left[R_n + \frac{h_n}{4}; R_{n+1} + \frac{3h_{n+1}}{4}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

В силу второго свойства функций u_n функция v "склеивается" в кольцах $\widetilde{S}_n$ в субгармоническую функцию, равную в кольцах $\widetilde{S}$ функции u_0. Очевидно, что функция $v \in C^\infty(\mathbb{C})$ и удовлетворяет условиям (3), (4). Если λ лежит между кольцами $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{S}_{n+1}$, то

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = u_n(\lambda) - u_0(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (u_0(w) - u_0(\lambda))\alpha_n(\lambda - w) dm(w).$$

Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой Иенсена получим

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = 2\pi \int_0^{\delta_n} \alpha_n(t) \left(\int_0^t \frac{\mu_0(\lambda, s)}{s} ds \right) tdt.$$

По определению $\delta_n \leq 2^{-\alpha(n+1)} \leq (|\lambda| + 1)^{-\alpha}$, и по свойству (3) имеем

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) \leq a \int_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda) dm(\lambda) = a.$$

Отсюда и из оценки (8) получим первое утверждение леммы 1. Оценим Δv. Если λ лежит между кольцами $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{S}_{n+1}$, то рассматривая u_0 как обобщенную функцию получим

$$\Delta v(\lambda) = \int \Delta_\lambda \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w) = \int \Delta_w \alpha_n(\lambda - w) u_0(w) dm(w) =$$

$$= \pi \int \alpha_n(\lambda - w) d\mu(w).$$

Если $\alpha = \max_t \alpha(t)$, то с учетом (4) имеем

$$\Delta v(\lambda) \leq \delta_n^{-2} 2\mu(|\lambda| + 1) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть u — гладкая субгармоническая функция, μ — ассоциированная мера этой функции, которая удовлетворяет условиям (3), (4), и для некоторого β имеет место оценка*

$$\Delta u(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^\beta), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Тогда существует субгармоническая функция $\widetilde{u}$ такая, что

$$|\widetilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O(|\lambda|), \ \lambda \longrightarrow \infty.$$

При этом ассоциированная мера $\widetilde{\mu}$ функции $\widetilde{u}$ удовлетворяет условиям (3), (4). Кроме того, существуют меры μ_n и прямоугольники P_n, $n \in \mathbb{N}$ такие, что

1) $\sum_n \mu_n = \mu$;

2) внутренности выпуклых оболочек носителей мер μ_n попарно не пересекаются;

3) носитель меры μ_n лежит в P_n, $n \in \mathbb{N}$;

4) отношение длин сторон прямоугольника P_n лежит в интервале $[3^{-1}; 3]$;

5) каждая точка плоскости попадает не более чем в 4 прямоугольника P_n;

6) если F_n — выпуклая оболочка носителя меры μ_n, то

$$diam \ F_n \leq 2\sqrt{2} \min_{\lambda \in F_n} |\lambda|.$$

7) Внутри носителей F_n функция $\widetilde{u}$ гладкая и выполняется оценка

$$\Delta \widetilde{u}(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^\beta), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 2.

Пусть Q_n, $n \in \mathbb{N}$, — квадрат с центром в начале координат с длиной стороны 3^n и сторонами, параллельными осям координат. Тогда

$$Q_{n+1} \setminus Q_n = \bigcup_1^8 Q_{nj}, \ n \in \mathbb{N},$$

где Q_{nj} — квадраты, полученные сдвигом квадрата Q_n на векторы $(\pm 3^n, 0)$, $(0, \pm 3^n)$, $(\pm 3^n, \pm 3^n)$. Положим

$$\mu(Q_{nj}) := m_{nj} + q_{nj}, \ j = 1, 2, ..., 8, \ n \in \mathbb{N},$$

где $q_{nj} = \{\mu(Q_{nj})\} \in [0;1)$ — дробная часть $\mu(Q_{nj})$. Положим $q_n^+ = \sum_j q_{nj} \in [0;8)$, $q_n^- = \sum_j (q_{nj}-1) \in [-8;0)$. Определим последовательность q_n следующим образом: положим $q_0 = \{\mu(Q_1)\}$, если q_j для $j \le k-1$ определены, то при $\sum_{j\le k-1} q_j \ge 0$, положим $q_k := q_k^-$, в противном случае $q_k := q_k^+$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} q_k \in (-8;8),\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Далее определим последовательность натуральных чисел $N_0, N_{nj},\ j = 1,...8,\ n \in \mathbb{N}$. Положим $N_0 = [\mu(Q_1)]$, если $q_n = q_n^-$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - (q_{nj}-1)$, а если $q_n = q_n^+$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - q_{nj}$. Таким образом, либо $N_{nj} = m_{nj}+1$, либо $N_{nj} = m_{nj}$. Сужение меры μ на квадрат Q_{nj} обозначим через μ_{nj}, $\mu_0 = \mu\,|_{Q_0}$ и положим $\widetilde{\mu}_0 = \frac{N_0}{\mu(Q_0)}\mu_0$,

$$\widetilde{\mu}_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj},\ j = 1,...,8,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $\mu(Q_{nj}) = 0$, то $\widetilde{\mu}_{nj} = 0$. Тогда $\widetilde{\mu}_{nj}(\mathbb{C}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа, и если положим $\nu_{nj} = \mu_{nj} - \widetilde{\mu}_{nj}$, то

$$\nu_{nj}(\mathbb{C}) \in (-1;1),\ \left(\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}\right)(\mathbb{C}) \in (-8;8).$$

Пусть $\nu = \nu_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}$,

$$\nu^+ = \nu_0 + \sum_{q_n = q_n^+}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},\ \nu^- = -\sum_{q_n = q_n^-}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},$$

тогда $\nu^\pm$ — неотрицательные меры и $\nu = \nu^+ - \nu^-$. При этом

$$\nu^\pm\left(\bigcup_j Q_{nj}\right) = q^\pm \in (-8;8).$$

Утверждение 1. *Верно соотношение*

$$\pi(\lambda) := \int \left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) = O(\ln(|\lambda|+1)),\quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство утверждения 1.

Докажем, что

$$|\nu(t)| = |\nu(B(0,t))| \le 17,\ t \ge 0, \tag{10.1}$$

и для $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$

$$|\nu|(t) = |\nu|(B(0,t)) \le 17\ln(t+e),\ t \ge 0. \tag{10.2}$$

Если $t < \frac{9}{\sqrt{2}}$, то $B(0,t) \subset Q_2$, поэтому

$$|\nu(t)| \le \nu_0(t) + \sum_{j=1}^{8} |\nu_{1j}(\mathbb{C})| \le 9.$$

Для $t \ge \frac{9}{\sqrt{2}}$ через n обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\frac{3^n}{\sqrt{2}} \le t$, тогда $Q_n \subset B(0,t)$ и $\frac{3^{n+2}}{2} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{2}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}t > t$, значит $Q_{n+2} \supset B(0,t)$. Таким образом, с учетом (8) получим

$$|\nu(t)| \le |\nu(Q_n)| + \sum_{i=n}^{n+1}\sum_{j=1}^{8} |\nu_{ij}(\mathbb{C})| \le 17.$$

Также можем оценить $\nu^{\pm}(t)$ и, сложив полученные оценки, доказать неравенство (10.2).

Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разобьем плоскость на множества $E_1 = \mathbb{C} \setminus B(0;2|\lambda|)$, $E_2 = B(0;1)$ $E_3 = B(0;\frac{|\lambda|}{2}) \setminus B(0;1)$, $E_4 = B(\lambda,(|\lambda|+1)^{-\alpha})$ и $E' = \mathbb{C} \setminus \bigcup_k E_k$. На множестве E_1 нужную оценку получим пользуясь (10.2) и неравенством: для некоторой постоянной C для всех $|z| \le \frac{1}{2}$

$$|\ln|1-z|| \le C|z|. \tag{$*$}$$

$$\left|\int_{E_1} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w)\right| = O(\ln|\lambda|),\ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Оценка интеграла по E_2 очевидна.

$$\left|\int_{E_2} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w)\right| = O(\ln|\lambda|),\ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Оценка первого интеграла в правой части неравенства

$$\left|\int_{E_3} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w)\right| \le \left|\int_{E_3} \ln\left|1-\frac{w}{\lambda}\right| d\nu(w)\right| + \left|\int_{E_3} \ln\left|\frac{w}{\lambda}\right| d\nu(w)\right|$$

следует из (10.2) и $(*)$. Второй интеграл интегрируем по частям

$$\left|\int_{E_3} \ln\left|\frac{w}{\lambda}\right| d\nu(w)\right| = \left|\int_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \ln\frac{|\lambda|}{t} d\nu(t)\right| \le \ln 2\left|\nu\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)\right| + \left|\int_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \frac{\nu(t)dt}{t}\right|.$$

Нужную оценку получим используя (10.1):

$$\left|\int_{E_3} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w)\right| = O(\ln|\lambda|),\ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Из свойства (3) имеем

$$\left|\int_{E_4} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w)\right| \le a,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $B(0,2|\lambda|) \subset Q_n$, то есть $\frac{3^{n-1}}{2} < 2|\lambda| \le \frac{3^n}{2}$. Тогда $E' \subset B(0,2|\lambda|) \setminus B(0,\frac{|\lambda|}{2}) \subset Q_n \setminus Q_{n-3}$, поэтому

$$|\nu|(E') \le 24.$$

С другой стороны,

$$max_{w\in E'}\left|\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\right| = O(\ln|\lambda|),\ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Из последних двух оценок следует оценка интеграла по множеству E'.

Утверждение 1 доказано.

Вернемся к доказательству леммы 2. Положим $\widetilde{u}(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$, где $\pi(\lambda)$ — потенциал меры ν, определенный в утверждение 1. Тогда $\widetilde{u}$ — субгармоническая функция с ассоциированной мерой $\widetilde{\mu}$. По построению условия (3) и (4) выполнены. А также во внутренности каждого квадрата Q_{nj}

$$\Delta\widetilde{u}(\lambda)dm(\lambda) = \pi\widetilde{\mu}(\lambda) = \pi\frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\Delta u(\lambda),$$

поэтому верна оценка

$$\Delta\widetilde{u}(\lambda) = O((|\lambda|+1)^{\beta}),\quad |\lambda| \longrightarrow \infty. \tag{11}$$

Из утверждения 1 следует соотношение

$$|\widetilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O((|\lambda|),\quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

По построению, $\widetilde{\mu}(Q_{nj}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа и к сужениям $\widetilde{\mu}_{nj}$ можно применить Теорему 1 (о разбиении мер) из работы 4: существует совокупность пар

(μ_{nj}^k, P_{nj}^k) прямоугольников P_{nj}^k и единичных мер μ_{nj}^k таких что выполняются условия 1-5 леммы 2. Дополнительно, прямоугольники P_{nj}^k лежат в квадратах Q_{nj}. Остается перенумеровать их одним индексом. Свойство 7 выполняется по оценке (11), свойство (6) — из соответствующего свойства квадратов Q_{nj}.

Лемма 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Центр тяжести единичных мер μ_n, построенных в лемме 2, обозначим через λ_n:

$$\int w d\mu(w) = \lambda_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Через $\widetilde{\mu}_n$ обозначим сужение меры $\widetilde{\mu}$ на множество $Q_n \setminus Q_0$ и через π_n потенциал этой меры

$$\pi_n(\lambda) = \int \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\widetilde{\mu}_n(\lambda).$$

Тогда мера $\widetilde{\mu}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3 в работе [4] и по этой теореме с учетом условия (3) получим существование полинома P такого, что вне множества кругов $B_n(\varepsilon) = B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k|+1)^{-\gamma})$, где λ_k — нули многочлена P, $\gamma \ge \alpha$, а $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, выполняется соотношение

$$|\pi(\lambda) - \ln|P(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda|+1).$$

При этом постоянная A не зависит от n. В силу независимости постоянной A от n обычным образом обосновывается предельный переход. В результате получим, что существует целая функция f с простыми нулями в точках λ_n, удовлетворяющая условию

$$|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda|+1),\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\varepsilon). \tag{12}$$

Необходимо показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ круги $B_n(\varepsilon)$ попарно не пересекаются. Оценим расстояние d_n от точки λ_n до границы выпуклой оболочки F_n носителя меры μ_n. Пусть w_n — одна из точек достижения этого расстояния:

$$|\lambda_n - w_n| = \inf\{|\lambda_n - w|,\ w \notin F_n\}.$$

Пусть $\lambda_n - w_n = e^{i\varphi_n}|\lambda_n - w_n|$ и $z = Tw = e^{-\varphi_n}(\lambda_n - w)$. При таком преобразовании образ F^* оболочки F_n расположится в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z \le d_n\}$, и для образа меры $d\mu^*(z) = d\mu_n(\lambda - e^{i\varphi_n}z)$ будут выполняться условия

$$\int d\mu^*(z) = 1, \quad \int z d\mu^*(z) = 0, \quad d\mu^*(z) = \frac{1}{\pi}\chi_n(z)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}z)dm(z),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция F^*. Пусть

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int \chi_n(x+iy)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}(x+iy))dy.$$

Тогда $\delta(x)$ — финитная функция с носителем на отрезке $[a; d_n]$ и по условиям 6-7 в лемме 2

$$0 \le \delta(x) \le C(|\lambda_n|+1)^{\beta+1} := M_n.$$

Кроме того, из свойств μ^* следует, что

$$\int_a^{d_n} \delta(x)dx = 1, \quad \int_a^{d_n} x\delta(x)dx = 0.$$

Утверждение 2. *Пусть $\delta(x)$ — неотрицательная, непрерывная и финитная функция, удовлетворяющая условиям*

$$1)\ \mathit{conv\ supp}\ \delta = [a; d], \quad 2)\ \sup_x \delta(x) \le M < \infty,$$

$$3) \int \delta(x)dx = 1, \quad 4) \int x\delta(x)dx = 0.$$

Тогда

$$d \geq \frac{1}{6M}.$$

Доказательство утверждения 2.

Определим число $c > 0$ из равенства

$$\int_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{1}{3}.$$

Из условия 2) следует, что $c \geq \frac{1}{6M}$. Допустим, что $d < c$. Тогда, учитывая 3), имеем

$$\int_{-\infty}^{-c} \delta(x)dx = 1 - \int_{-c}^{d} \delta(x)dx = 1 - \int_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)dx \geq \frac{2c}{3} + \int_{-c}^{0} |x|\delta(x)dx \geq \frac{2c}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int_{0}^{d} |x|\delta(x)dx = \int_{0}^{c} |x|\delta(x)dx \leq c\int_{-c}^{c} \delta(x)dx = \frac{c}{3}.$$

По условию 4)

$$\frac{2c}{3} \leq \int_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)dx = \int_{0}^{1} |x|\delta(x)dx =\leq \frac{c}{3}.$$

Из полученного противоречия имеем

$$d \geq c \geq \frac{1}{6M}.$$

Утверждение 2 доказано.

Из доказанного утверждения вытекает, что для $\gamma = 3(\rho + \alpha) + 1$ круг $B_n(\varepsilon) = B(\lambda_n, \varepsilon(|\lambda| + 1)^{-\gamma})$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ лежит в оболочке F_n и, тем самым, эти круги попарно не пересекаются. Обычными приемами с помощью формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{f(z)(z - \lambda_n)},$$

можем получить необходимые оценки для производной в точках λ_n.

Теорема 1 доказана.

3. Представляющие системы экспонент в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathcal{M}_0 = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая выпуклая последовательность положительных чисел. Выпуклость понимается в том смысле, что если

$$T_0(r) = \sup_{n} \frac{r^n}{T_n}, \; r > 0,$$

— функция следа данной последовательности, то

$$M_n = \sup_{r>0} \frac{r^n}{T(r)}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Во введении мы ввели обозначения: для $k \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}_k$ обозначили сдвиг последовательности $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=1}^{\infty}$ и ввели подпространства

$$H(\mathcal{M}_k, D) = \{f \in H(D): \ \|f\|_k = \sup_n \frac{\sup_{z\in D} |f^{(z)}|}{M_{n+k}}, \ k \in \mathbb{N},$$

и индуктивный предел этих пространств

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D) = \bigcup_k H(\mathcal{M}_k, D).$$

Через $P_k(d)$ обозначили банахово пространство целых функций с нормой

$$\|F\|_k = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)},$$

где T_k — функция следа последовательности $\mathcal{M}_k$, и проективный предел этих пространств обозначили через $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$. Преобразование Фурье – Лапласа линейного непрерывного функционала S на $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ определяется как

$$S \longrightarrow \widehat{S}(z) = S_\lambda(e^{\lambda z}).$$

В работе [5] доказано, что для последовательности $\mathcal{M}_0$, удовлетворяющей условию

$$\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty, \tag{13}$$

преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{P}^*(\mathcal{M}_0, D)$ и пространства $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.

С каждым подмножеством $S \subset \mathbb{C}$ свяжем полунорму в $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$

$$\|F\|_{k,S} = \sup_{\lambda\in S} \frac{|F(\lambda)|e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)}.$$

Если топология, определяемая системой этих полунорм, совпадает с исходной топологией пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, то подмножество S называется достаточным для пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$ (см. [6], [7]).

Теорема 3. *Пусть целая функция $L(\lambda)$ с нулями λ_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям 1) для некоторого $A > 0$*

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|)(|\lambda|+1)^A, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

2) для некоторого $B > 0$ и некоторой последовательности $R_k \longrightarrow \infty$

$$|L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|)(|\lambda|+1)^{-B}, \ |\lambda| = R_k, \ k \in \mathbb{N},$$

3) для некоторого $C > 0$

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)} T_0(|\lambda_n|)(|\lambda_n|+1)^{-C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда множество $S = \{\lambda_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ является достаточным для пространства $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$.

Доказательство теоремы 3.

Мы в ходе оценок будем пользоваться следующим соотношением между функциями следа, доказанным в работе [5] (Лемма 1.2.): для любых натуральных $k, m, \ m \leq k$, найдется $r_{k,m}$ так, что при $r \geq r_{k,m}$

$$T_k(r) = r^{m-k} T_m(r). \tag{14}$$

Итак, возьмем и зафиксируем натуральное число k, возьмем число $N \geq A + k$ и число $m \geq N + C + B + 2$, здесь постоянные A, C из условия теоремы. Пусть $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, тогда

$$|F(\lambda)| \leq \|F\|_m e^{H_D(\lambda)} T_m(|\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

и по соотношению (14)

$$|\lambda^N F(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)} T_0(|\lambda|)(|\lambda| + 1)^{-B-2}.$$

Отсюда и по второму условию на функцию L получим, что на окружностях $|\lambda| = R_n$ имеет место оценка

$$\frac{|\lambda^N F(\lambda)|}{|L(\lambda)|} \prec (|\lambda| + 1)^{-2}.$$

Следовательно, равномерно на плоскости сходится ряд Лагранжа

$$\lambda^N F(\lambda) = \sum_n \frac{\lambda_n^N F(\lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)} L(\lambda).$$

В силу выбора m и по соотношению (15) для $|\lambda - \lambda_n| \geq 1$ имеем оценку

$$\frac{|\lambda_n^N F(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \leq \|F\|_{m,S} |\lambda_n|^{-B-2}.$$

Поэтому для $|\lambda - \lambda_n| \geq 1$

$$|F(\lambda)| \prec \|F\|_{m,S} |L(\lambda)| |\lambda|^{-N}.$$

Отсюда, учитывая условие 1) теоремы, получим

$$\frac{|F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda)}}{T_k(|\lambda|)} \prec \|F\|_{m,S} \frac{T_0(|\lambda|)(|\lambda| + 1)^A}{T_k(|\lambda|)} \prec \|F\|_{m,S},$$

или

$$\|F\|_k \prec \|F\|_{m,S},\ f \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 2 следует из теоремы 3 на основе хорошо известной связи между достаточными множествами и представляющими системами. Существование целых функции L с требуемыми свойствами вытекает из теоремы 1.

Очевидно, что если система $e^{\lambda_n z}$ является представляющей для пространства $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$, то после удаления конечного числа элементов оставшаяся часть системы будет тоже представляющей. Но при удалении бесконечного набора элементов система вообще говоря перестает быть представляющей.

Утверждение 3. *Пусть $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, — нули функции целой функции L, удовлетворяющей условиям теоремы 3 и $\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$, — некоторое бесконечное подмножество нулей. Система $E = \{e^{\lambda_n z},\ n \in \mathbb{N}\} \setminus \{e^{\mu_n z},\ n \in \mathbb{N}\}$ не является представляющей в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$.*

Доказательство утверждения 3. Переходя при необходимости к подмножеству, будем считать, что множество $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условию: в каждый отрезок $[2^n; 2^{n+1}],\ n \in \mathbb{N}$, попадает не более одного $r_k = |\mu_k|$ и $r_k > 1$. Через $m(t)$ обозначим считающую функцию этого множества. Тогда функция

$$g(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией. Пусть $\lambda \in [2^n; 2^{n+1}]$. Тогда

$$\left| \sum_{|\mu_k| \geq 2^{n+2}} \ln \left|1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right| \right| \leq |\lambda| \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 1,\ \left| \sum_{|\mu_k| \leq 2^{n-1}} \ln \left|1 - \frac{\mu_k}{\lambda}\right| \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Так как для $|\lambda - \mu_k| \geq 1$

$$\left| \sum_{2^{n-1}<|\mu_k|<2^{n+2}} \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| \right| = O(\ln|\lambda|), \ |\lambda| \to \infty,$$

то

$$|\ln|g(\lambda)|| = \sum_{|\mu_k|\leq 2^{n-1}} \ln\left|\frac{\lambda}{\mu_k}\right| + O(\ln|\lambda|) = \int_1^{|\lambda|} \frac{m(t)dt}{t} + O(\ln|\lambda|), \ \lambda \to \infty, \ |\lambda - \mu_n| \geq 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

И, поскольку $m(t) \to \infty, \ t \to \infty$, то $\ln|\lambda| = o(\ln|g(\lambda)|), \ |\lambda - \mu_k| \geq 1, \ k \in \mathbb{N}, \ |\lambda| \to \infty$.

Таким образом, функция $L_1(\lambda) = L(\lambda)/g(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0, D)$, и система E не будет представляющей в $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0, D)$. Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
2. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат., 39:3 (1975). С. 657–702.
3. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Математический сборник, 79(121):4(8) (1969). С. 464–476.
4. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica, 11:3 (1985). С. 257—282.
5. Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях* // Математический сборник, 130(172):4(8) (1986). С. 500–519.
6. Shneider D.M. *Sufficient sets for some spaces entire functions*// Trans. Amer. Math. Soc., 197 (1974). P. 161–180.
7. Напалков В.В. *О дискретных слабодостаточных множествах в некоторых пространствах целых функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 45:5 (1981). С. 1088–1099.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Кирилл Владимирович Трунов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `trounovkv@mail.ru`

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`