ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 18-26.

УДК 517.272+517.518.244+517.547.22

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РОСТА ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. Представлено расширенное изложение доклада автора, подготовленного для международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл. корр. АН СССР А. Ф. Леорнтьева. Предлагается новый метод получения равномерных двусторонних оценок отношения производных двух функций вещественного переменного на основе информации о двусторонних оценках самих функций. При этом одна из функций, обладая определенными свойствами, служит эталонным измерителем роста, задающим некоторую шкалу. Вторая функция, рост которой сравнивается с ростом эталона, является выпуклой, неограниченно возрастает или убывает к нулю на заданном интервале. Метод применим и к некоторому классу вогнутых на интервале функций. Рассмотрены примеры применения полученных результатов к исследованию поведения целых функций.

Ключевые слова: монотонная функция, выпуклая функция, относительный рост двух функций, равномерные двусторонние оценки, целая функция.

Mathematics Subject Classification: 26D10, 30D15

Тематика работы примыкает к общим теоремам абелева и тауберова типов для функций вещественного переменного (правило Лопиталя и его обращение). В отличие от классической постановки вопроса о сравнительном асимптотическом поведении двух функций, здесь речь идет о равномерных оценках. Точнее говоря, в статье устанавливаются новые двусторонние оценки, связывающие относительный рост производных двух функций с относительным ростом самих функций. Вначале мы приводим простое утверждение „абелева“ типа, в котоом заключение о поведении отношения функций делается в зависимости от поведения отношения их производных (теорема A и следствие). Затем доказываются более трудные результаты, носящие обратный, „тауберов“ характер (теоремы 1 и 2). Общие факты проиллюстрированы серией конкретных примеров. Отмечены некоторые приложения к вопросам роста целых функций.

Принимаем естественное предположение, что рассматриваемые функции сохраняют постоянные и при этом совпадающие знаки на рассматриваемых множествах.

Начнем с малоизвестной непредельной «монотонной» версии правила Лопиталя, в которой устанавливается связь между монотонностью отношения функций и монотонностью отношения их производных (см., например, [1]–[3]).

Теорема A. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, дифференцируемы на (конечном или бесконечном) интервале (a, b) и удовлетворяют условиям*
1) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b),
2) $g(b-) = f(b-) = 0$ *или* $g(a+) = f(a+) = 0$.
Тогда, если отношение производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *монотонно на* (a, b), *то и отношение функций* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *монотонно в том же смысле на* (a, b).

G.G. Braichev, Two-sided estimates of the relative growth of functions and their derivatives.

Поступила 3 июня 2017 г.

Отсюда с учетом классического правила Лопиталя немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда*

$$\sup_{x\in(a,b)} \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_{x\in(a,b)} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{или} \quad \inf_{x\in(a,b)} \frac{f(x)}{g(x)} = \inf_{x\in(a,b)} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

в зависимости от характера монотонности отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Перейдем к изложению основных результатов работы. Рассмотрим случай возрастающих бесконечно больших функций. Всюду далее под $f'(x)$ понимаем правую производную функции f в точке x.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $g(x)$ дифференцируема на этом интервале, причем $g'(x) > 0$, и, кроме того, $g(a+) = 0$, $g(b-) = +\infty$. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m \leqslant M$, выполнено условие*

$$m \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant M, \qquad x \in (a,b). \tag{1}$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\,c_1(\theta) \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant M\,c_2(\theta), \qquad x \in (a,b), \tag{2}$$

где $\theta = \dfrac{m}{M}$, *а величины $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ определяются правилами*

$$c_1(\theta) = \inf_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \tag{3}$$

$$c_2(\theta) = \sup_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку $f(x)$ — выпуклая функция, то для произвольного $x \in (a,b)$ можем записать

$$f'(x) = \inf_{b>t>x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \inf_{b>t>x} \frac{Mg(t)-mg(x)}{t-x} = M \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}.$$

Таким образом,

$$f'(x) \leqslant M \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \tag{5}$$

Разделив обе части на $g'(x)$, для всех $x \in (a,b)$ получаем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant M \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \leqslant M\,c_2(\theta).$$

Оценка сверху в (2) доказана. Доказательство оценки снизу опирается на те же соображения. Именно, для $x \in (a,b)$ запишем

$$f'(x) \geq f'_-(x) = \sup_{a<t<x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq$$

$$\geq \sup_{a<t<x} \frac{Mg(t)-mg(x)}{t-x} = M \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x},$$

или

$$f'(x) \geq M \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \tag{6}$$

Разделив обе части на $g'(x)$, для всех $x \in (a,b)$ получаем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq M \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \geq M\,c_1(\theta).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 не использовались условия $g(a+) = 0$, $g(b-) = +\infty$. Однако, можно показать, что при нарушении этих условий формулы (3), (4), определяющие величины $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$, дают $c_1(\theta) = -\infty$, $c_2(\theta) = +\infty$. В этом нетрудно убедиться и геометрически, рассмотрев в случае конечности точек a, b функцию $f(x)$, график которой касается граничных прямых $x = a$, $x = b$. В условиях теоремы 1 рассматриваемые величины $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant c_1(\theta) \leqslant \theta, \qquad 1 \leqslant c_2(\theta) \leqslant \beta'_g := \sup_{x\in(a,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{t>x} \frac{g(t)}{t-x}. \tag{7}$$

Действительно, положительность $c_1(\theta)$ следует из неравенства

$$\sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \geq \frac{-\theta g(x)}{a-x} \geq 0.$$

Замечая, что $\theta(g(t) - g(x)) \leqslant g(t) - g(x) \leqslant g(t) - \theta g(x) \leqslant g(t)$, убеждаемся в выполнении остальных свойств (7).

Покажем, что если $g(x)$ — выпуклая на (a, b) функция, то оценка (2) точна. Построим функцию $f(x)$, подчиненную условию (1), для которой равенства в обеих частях (2) достигаются в некоторых точках промежутка $J = (a, b)$. Для удобства считаем, что $0 < \theta = m < M = 1$. Пусть положительная дифференцируемая функция $g(x)$ выпукла и возрастает на промежутке J, и $\theta \in (0, 1)$ — фиксированное число. Пусть далее $x_0 \in J$. Если проводить вправо из точки $(x_0, \theta g(x_0))$ лучи, пересекающие график Γ_g функции $g(x)$, то луч с минимальным угловым коэффициентом k_0, равным

$$k_0 = \frac{g(t_{x_0}) - \theta g(x_0)}{t_{x_0} - x_0} = \min_{t>x_0} \frac{g(t)-\theta g(x_0)}{t-x_0},$$

будет касаться Γ_g в некоторой точке $(t_{x_0}, g(t_{x_0}))$. Выберем именно этот луч и продолжим его до пересечения с графиком $\Gamma_{\theta g}$ функции $\theta g(x)$ в точке $(x_1, \theta g(x_1))$. Отрезок выбранного луча с минимальным угловым коэффициентом k_0 обозначим через l. Если из точки $(x_1, \theta g(x_1))$ провести влево луч, пересекающий график Γ_g, то угловой коэффициент такого луча будет максимальным, когда он коснется Γ_g (в той же точке $(t_{x_0}, g(t_{x_0}))$), т. е. будет содержать отрезок l и иметь тот же угловой коэффициент:

$$k_0 = \frac{g(t_{x_0}) - \theta g(x_1)}{t_{x_0} - x_1} = \max_{x_0<t<x_1} \frac{g(t)-\theta g(x_1)}{t-x_1}.$$

Считая, что интервал $(x_0, x_1) \subset J$, определим на (x_0, x_1) функцию $f(x)$ уравнением луча l, т. е. положим

$$f(x) = \theta g(x_0) + k_0(x - x_0), \qquad x \in (x_0, x_1).$$

На остальной части J положим $f(x) = \theta g(x)$. Тогда такая функция будет удовлетворять требуемым условиям:

$$\theta \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 1, \qquad x \in J,$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \theta, \quad x \in J \setminus (x_0, x_1),$$

$$\frac{k_0}{g'(x_1)} \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \frac{k_0}{g'(x_0)}, \quad x \in (x_0, x_1).$$

Отметим, что знаки равенств в последней строке достигаются: справа — при $x = x_0$, слева — при $x = x_1 - 0$.

Итак, для выпуклых на (a, b) функций $g(x)$ оценка теоремы 1 точна.

Содержательный прямой перенос утверждения теоремы 1 на случай вогнутых (выпуклых вверх) функций $f(x)$ невозможен. В самом деле, если в теореме 1 положительную функцию $f(x)$ предполагать вогнутой на интервале $(a,\, b)$, то, переходя к функциям с противоположным знаком, можно свести доказательство такого утверждения к ситуации, когда $g(x) < 0$, $g'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$. Формально рассуждение пройдет и в этом случае. Действительно, при умножении (1) на $g(x)$ получим неравенство, противоположное (5), разделив которое на $g'(x)$, опять изменим знак неравенства на противоположный. Таким образом, в процессе доказательства знак неравества дважды изменится на противоположный и вернется к исходному значению. Однако теперь теряется смысл оценок (2), поскольку в формулах (3), (4) для коэффициентов $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ будем иметь

$$\sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} = \lim_{t\to x-} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} = +\infty,$$

$$\inf_{x<t<b} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} = \lim_{t\to x+} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} = -\infty.$$

Проблема может быть решена, если функция $f(x)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Например, если $f(x)$ вогнута и $xf'(x)$ возрастает на $(a,\, b)$, $a \ge 0$, то функция $f_1(t) = f(e^t)$ будет выпуклой на $(\ln a,\, \ln b)$, поскольку ее производная $f_1'(t) = e^t f'(e^t)$ возрастает. Кроме того, в соответствующих точках будут выполняться равенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(e^t)}{g(e^t)} = \frac{f_1(t)}{g_1(t)}, \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^t f'(e^t)}{e^t g'(e^t)} = \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}.$$

Аналогичные рассуждения применимы и в случае, когда вогнутая функция $f(x)$ удовлетворяет несколько более сильному условию: $x^\gamma f'(x)$ возрастает при некотором значении $\gamma \in (0,\, 1)$ (см. примеры 3 и 4 ниже).

Приведем несколько простых илюстраций к теореме 1.

Пример 1. Пусть $g(x) = x^p$, $x \in (0, +\infty)$, с показателем $p > 1$. Зафиксируем $\theta \in [0,\, 1]$ и воспользуемся формулами (3), (4) для вычисления констант $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$. Стандартные методы исследования на экстремум функции

$$\psi_{\theta,\, x}(t) \;=\; \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \;=\; \frac{t^p - \theta x^p}{t-x}$$

приводят к уравнению

$$(1-p)\left(\frac{t}{x}\right)^p + p\left(\frac{t}{x}\right)^{p-1} = \theta,$$

которое после замены $t = x\,\xi^{\frac{1}{p-1}}$ принимает вид

$$(1-p)\,\xi^{\frac{p}{p-1}} + p\,\xi = \theta. \tag{8}$$

Функция $\psi_{\theta,\, x}(t)$ имеет максимум на интервале $(0,\, x)$ в точке $t_1 = x\,\xi_1^{\frac{1}{p-1}}$ и минимум на интервале $(x, +\infty)$ в точке $t_2 = x\,\xi_2^{\frac{1}{p-1}}$, где ξ_1, ξ_2 суть корни уравнения (8), причем $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1 \leqslant \xi_2$. Соответствующие экстремальные значения равны

$$\psi_{\theta,\, x}(t_k) = \frac{t_k^p - \theta x^p}{t_k - x} = \frac{x^p \xi_k^{\frac{p}{p-1}} - \theta x^p}{x\xi_k^{\frac{1}{p-1}} - x} =$$

$$= x^{p-1}\, \frac{\xi_k^{\frac{p}{p-1}} - (1-p)\xi_k^{\frac{p}{p-1}} + p\xi_k}{\xi_k^{\frac{1}{p-1}} - 1} = p\, x^{p-1}\xi_k, \quad k = 1,\, 2.$$

Согласно формулам (3), (4) имеем

$$c_1(\theta) \;=\; \xi_1, \qquad c_2(\theta) \;=\; \xi_2,$$

где ξ_1, ξ_2 являются корнями уравнения (8). В частности, при $p = 2$ получим

$$c_1(\theta) = 1 - \sqrt{1-\theta}, \qquad c_2(\theta) = 1 + \sqrt{1-\theta}.$$

В этом случае теорема 1 утверждает, что для производной $f'(x)$ всякой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m\,x^2 \leqslant f(x) \leqslant M\,x^2, \qquad x\in(0,\,+\infty),$$

выполняется двусторонняя оценка

$$2\,M\left(1-\sqrt{1-m/M}\right)x \leqslant f'(x) \leqslant 2\,M\left(1+\sqrt{1-m/M}\right)x, \qquad x\in(0,\,+\infty),$$

где $0\leqslant m\leqslant M$.

Пример 2. Пусть $g(x)=e^{\rho x}$, $\quad x\in(-\infty,\,+\infty)$, $\quad \rho>0$. Вычислим величину $c_1(\theta)$ из формулы (3). При фиксированных x и $\theta\in[0,\,1]$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<x}\frac{e^{\rho t}-\theta e^{\rho x}}{t-x}=e^{\rho x}\max_{-\infty<t<x}\frac{e^{\rho(t-x)}-\theta}{t-x}=:K_{x,\theta}.$$

Стандартные методы анализа для определения точки максимума $t=t_0<x$ приводят к уравнению

$$e^{\rho(t-x)}\,(1-\rho(t-x))=\theta.$$

После замены $\xi=e^{\rho(t-x)}$ возникает уравнение

$$\xi\ln\frac{e}{\xi}=\theta, \tag{9}$$

и искомая точка максимума находится по формуле $t_0=x+\frac{1}{\rho}\ln\xi_1$. Здесь $\xi_1=\xi_1(\theta)$ обозначает меньший корень уравнения (9). Отсюда

$$K_{x,\theta}=\frac{e^{\rho x}(\xi_1-\theta)}{\frac{1}{\rho}\ln\xi_1}=e^{\rho x}\frac{\xi_1-\xi_1\ln\frac{e}{\xi_1}}{\frac{1}{\rho}\ln\xi_1}=\rho e^{\rho x}\xi_1,$$

$$c_1(\theta)=\inf_{x\in(-\infty,\,+\infty)}\frac{1}{\rho e^{\rho x}}K_{x,\theta}=\xi_1.$$

Аналогичным образом находим, что

$$c_2(\theta)=\xi_2,$$

где $\xi_2=\xi_2(\theta)$ — больший корень уравнения (9).

Таким образом, теорема 1 утверждает, что для производной всякой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m\,e^{\rho x}\leqslant f(x)\leqslant M\,e^{\rho x}, \qquad x\in(-\infty,\,+\infty), \qquad \rho>0,$$

выполняется двусторонняя оценка

$$\xi_1\,\rho\,M\,e^{\rho x}\leqslant f'(x)\leqslant \xi_2\,\rho\,M\,e^{\rho x}, \qquad x\in(-\infty,\,+\infty),$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения (9), $\xi_1\leqslant 1\leqslant\xi_2$.

Как уже было отмечено, для вогнутых функций $f(x)$ теорема 1 напрямую не работает. Однако, если при некотором $\gamma\in(0,\,1]$ функция $x^\gamma f'(x)$ возрастает, то ситуация меняется.

Пример 3. Пусть $f(x)$ – вогнутая функция на интервале $(0,\,+\infty)$, удовлетворяющая на нем условиям

$$m\,x^\rho\leqslant\ f(x)\ \leqslant M\,x^\rho, \qquad \rho\in(0,\,1),$$

и $xf'(x)$ возрастает. Тогда, применяя теорему 1 к выпуклой на всей прямой $(-\infty,\,+\infty)$ функции $f_1(t)=f(e^t)$, получаем (см. пример 2), что выполняются двусторонние оценки

$$\xi_1\,\rho\,M\,x^{\rho-1}\leqslant f'(x)\ \leqslant\ \xi_2\,\rho\,M\,x^{\rho-1},$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения (9):

$$\xi\ln\frac{e}{\xi}=\frac{m}{M}.$$

Пример 4. Пусть $f(x)$ — вогнутая на интервале $(0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая на нем условиям
$$m\,x^{\rho} \leqslant f(x) \leqslant M\,x^{\rho}, \qquad \rho \in (0,1),$$
и $x^{\gamma} f'(x)$ возрастает при некотором $\gamma \in (1-\rho, 1)$. Тогда, применяя теорему 1 к выпуклой на интервале $(0, +\infty)$ функции $f_1(t) = f(t^{\delta})$ с показателем $\delta = \dfrac{1}{1-\gamma} > \dfrac{1}{\rho}$, получаем, что из условия
$$m \leqslant \frac{f(x)}{x^{\rho}} = \frac{f(t^{\delta})}{t^{\delta\rho}} = \frac{f_1(t)}{t^{\delta\rho}} \leqslant M$$
следует двусторонняя оценка
$$M\zeta_1 \leqslant \frac{f_1'(t)}{\delta\rho\, t^{\delta\rho-1}} \leqslant M\zeta_2.$$
Но поскольку
$$\frac{f_1'(t)}{\delta\rho\, t^{\delta\rho-1}} = \frac{\delta t^{\delta-1} f'(t^{\delta})}{\delta\rho\, t^{\delta\rho-1}} = \frac{f'(t^{\delta})}{\rho\, t^{\delta(\rho-1)}} = \frac{f'(x)}{\rho\, x^{\rho-1}},$$
то выполняются неравенства
$$\zeta_1\,\rho\, M\, x^{\rho-1} \leqslant f(x) \leqslant \zeta_2\,\rho\, M\, x^{\rho-1}.$$
Здесь ζ_1, ζ_2 — корни уравнения (8) из примера 1 с параметром $p = \delta\rho > 1$. Ввиду соотношения
$$(1-p)\,\xi^{\frac{p}{p-1}} + p\,\xi \leqslant \xi \ln\frac{e}{\xi}, \quad \xi \in (0, e),$$
выполнено включение $(\zeta_1, \zeta_2) \subset (\xi_1, \xi_2)$, и оценки отношений производных в примере 4 точнее оценок из примера 3.

Теперь рассмотрим вопрос о сравнении убывающих бесконечно малых функций.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $g(x)$ дифференцируема на этом интервале, причем $g'(x) < 0$, и, кроме того, $g(a+) = +\infty$, $g(b-) = 0$. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m \leqslant M$, выполнено условие* (1), *т. е.*
$$m \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant M, \qquad x \in (a,b).$$
Тогда справедлива двусторонняя оценка
$$M\,d_1(\theta) \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant M\,d_2(\theta), \qquad x \in (a,b), \tag{10}$$
где $\theta = \dfrac{m}{M}$, *а величины $d_1(\theta)$, $d_2(\theta)$ определяются правилами*
$$d_1(\theta) = \inf_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}, \tag{11}$$
$$d_2(\theta) = \sup_{x\in(a,\,b)} \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x}. \tag{12}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Укажем на небольшие отличия. Разделив (5) на $g'(x)$, для всех $x \in (a,b)$ получаем
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \geq M \frac{1}{g'(x)} \inf_{b>t>x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \geq M\,d_1(\theta),$$
что доказывает левую оценку в (10). Разделив (6) на $g'(x)$, для всех $x \in (a,b)$ получаем
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant M \frac{1}{g'(x)} \sup_{a<t<x} \frac{g(t)-\theta g(x)}{t-x} \leqslant M\,d_2(\theta).$$
Теорема доказана.

Отметим, что доказательство можно провести иначе, применив теорему 1 к функциям $f(-x)$ и $g(-x)$. По поводу случая, когда $g(x) < 0$, $g'(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, см. комментарий после теоремы 1.

Пример 5. Пусть $g(x) = x^{-q}$, $x \in (0, +\infty)$, $q > 0$. Найдем величины $d_1(\theta)$, $d_2(\theta)$ из формул (11), (12). Поскольку в нашем случае

$$\inf_{t>x} \frac{t^{-q} - \theta x^{-q}}{t-x} = x^{-q-1} \inf_{t>x} \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{-q} - \theta}{\frac{t}{x} - 1} = x^{-q-1} \inf_{\xi<1} \frac{\xi - \theta}{\xi^{-\frac{1}{q}} - 1},$$

$$\left(\frac{\xi - \theta}{\xi^{-\frac{1}{q}} - 1}\right)' = q^{-1} \left(\xi^{-\frac{1}{q}} - 1\right)^{-2} \xi^{-\frac{q+1}{q}} \left[\xi(q+1) - q\xi^{\frac{q+1}{q}} - \theta\right],$$

то

$$d_j(\theta) = \xi_j^{\frac{q+1}{q}}, \qquad j = 1,\, 2,$$

где ξ_j — корни уравнения (8) с $p = q+1$. В частности, для $q = 1$ имеем

$$d_1(\theta) = \left(1 - \sqrt{1-\theta}\right)^2, \qquad d_2(\theta) = \left(1 + \sqrt{1-\theta}\right)^2,$$

и теорема 2 гарантирует, что производная любой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leqslant xf(x) \leqslant M, \qquad x \in (0, +\infty),$$

подчинена оценке

$$\left(\sqrt{M} - \sqrt{M-m}\right)^2 \leqslant \left(-x^2\right) f'(x) \leqslant \left(\sqrt{M} + \sqrt{M-m}\right)^2, \qquad x \in (0, +\infty).$$

Здесь по-прежнему, $0 \leqslant m \leqslant M < +\infty$.

Пример 6. Пусть $g(x) = e^{-\rho x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $\rho > 0$. Как и в предыдущем примере находим

$$\inf_{t>x} \frac{e^{-\rho t} - \theta e^{-\rho x}}{t-x} = e^{-\rho x} \inf_{t>x} \frac{e^{-\rho(t-x)} - \theta}{t-x} = \rho e^{-\rho x} \inf_{\xi<1} \frac{\xi - \theta}{\ln \frac{1}{\xi}},$$

$$\left(\frac{\xi - \theta}{\ln \frac{1}{\xi}}\right)' = \frac{\xi \ln \frac{e}{\xi} - \theta}{\xi \ln^2 \xi}, \qquad d_j(\xi) = -\frac{\xi_j - \theta}{\ln \frac{1}{\xi_j}} = -\frac{\xi_j - \xi_j \ln \frac{e}{\xi_j}}{\ln \frac{1}{\xi_j}} = \xi_j.$$

Таким образом,

$$d_1(\theta) = \xi_1, \quad d_2(\theta) = \xi_2, \quad \xi_1 \leqslant 1 \leqslant \xi_2,$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения (9).

Согласно теореме 2 можем утверждать, что для производной всякой выпуклой функции $f(x)$ с условием

$$m \leqslant e^{\rho x} f(x) \leqslant M, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

выполняется двусторонняя оценка

$$\xi_1 \rho M \leqslant (-e^{\rho x})\, f'(x) \leqslant \xi_2 \rho M, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения (9), $\xi_1 \leqslant 1 \leqslant \xi_2$.

Рассмотрим некоторые приложения.

Пусть $f(z)$ — целая функция, $M_f(r)$ — ее максимум модуля в круге радиуса r с центром в начале, и $0 \leqslant \sigma_0 < \sigma < +\infty$, $\rho > 0$. Предположим, что выполняются неравенства

$$e^{\sigma_0 r^\rho} \leqslant M_f(r) \leqslant e^{\sigma r^\rho}, \qquad r > 0.$$

Тогда

$$\xi_1 \sigma\rho\, r^{\rho-1} M_f(r) \leqslant M_f'(r) \leqslant \xi_2 \sigma\rho\, r^{\rho-1} M_f(r), \qquad r > 0,$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения $\xi \ln \dfrac{e}{\xi} = \dfrac{\sigma_0}{\sigma}$ (см. (9)).

В самом деле, перепишем исходные неравенства в виде

$$\sigma_0 \leqslant \frac{\ln M_f(e^t)}{e^{\rho t}} \leqslant \sigma, \qquad t = \ln r \in \mathbb{R}.$$

Учитывая выпуклость на $\mathbb{R}$ функции $\ln M_f(e^t)$, из теоремы 1 получаем

$$\xi_1\,\sigma \leqslant \frac{\bigl(\ln M_f(e^t)\bigr)'}{(e^{\rho t})'} = \frac{e^t M_f'(e^t)}{M_f(e^t)\rho\, e^{\rho t}} \leqslant \xi_2\,\sigma.$$

Возврат к первоначальному аргументу приводит к требуемому результату.

Отсюда, в частности, заключаем, что если целая функция $f(z)$ с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами и $f(0)=1$ удовлетворяет при некотором $\sigma>0$ неравенству

$$f(x) \leqslant e^{\sigma x}, \quad x>0,$$

то ее производная подчинена оценке

$$f'(x) \leqslant \sigma e f(x), \quad x>0.$$

Действительно, при $\sigma_0=0$ корнями уравнения (9), т. е. уравнения

$$\xi \ln\frac{e}{\xi} = \frac{\sigma_0}{\sigma} = 0,$$

служат числа $\xi_1=0$, $\xi_2=e$.

Уместно сравнить полученный факт с широко известной теоремой Бернштейна, утверждающей, что для целой функции экспоненциального типа σ, ограниченной на вещественной оси, т. е. удовлетворяющей условию

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad x\in\mathbb{R},$$

справедлива оценка

$$|f'(x)| \leqslant \sigma M, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

В то же время, замена условия ограниченности функции на вещественной оси условием $|f(x)| \leqslant e^{\sigma x}$ на полуоси вкупе с требованием положительности тейлоровских коэффициентов приводит, как показано выше, к оценке

$$f'(x) \leqslant \sigma e f(x), \quad x>0.$$

Аналогичные оценки можно дать и для функций нулевого порядка. Рассмотрим, например, целые функции логарифмического роста. Пусть $0\leqslant\sigma_0<\sigma<+\infty$, и $\gamma>1$. Пусть, далее, целая функция удовлетворяет условиям

$$e^{\sigma_0(\ln r)^\gamma} \leqslant M_f(r) \leqslant e^{\sigma(\ln r)^\gamma}, \qquad r>0.$$

Тогда

$$\xi_1\,\sigma\gamma\,(\ln r)^{\gamma-1} M_f(r) \leqslant r\,M_f'(r) \leqslant \xi_2\,\sigma\gamma\,(\ln r)^{\gamma-1} M_f(r), \qquad r>0,$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения

$$(1-\gamma)\,\xi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \gamma\,\xi = \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

вида (8) с параметрами $p=\gamma$ и $\theta=\sigma_0/\sigma$.

Действительно, как и прежде, можем записать

$$\sigma_0 \leqslant \frac{\ln M_f(e^t)}{t^\gamma} \leqslant \sigma, \qquad t=\ln r\in\mathbb{R}.$$

В этом случае теорема 1 гарантирует оценку

$$\xi_1\,\sigma \leqslant \frac{\bigl(\ln M_f(e^t)\bigr)'}{(t^\gamma)'} = \frac{e^t M_f'(e^t)}{M_f(e^t)\,\gamma\,t^{\gamma-1}} \leqslant \xi_2\,\sigma,$$

которая при $t=\ln r$ дает заявленное утверждение.

В заключение отметим, что некоторые результаты асимптотического характера, связанные с правилом Лопиталя и его обращением, изложены в [4]–[6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.
2. M.K. Kwong *On Hospital-style rules for monotonicity and oscillation* // arXiv:1502.07805v1 [math.CA] 27 Feb 2015.
3. I. Pinelis *L'Hospital type rules for monotonicity, with application* // Journal in Pure and Applide Mathematics. V. 3, issue 1, article 5, 2002.
4. Братищев А.В. *Обращение правила Лопиталя* // Сб. «Механика сплошной среды». Ростов-на-Дону, РГУ, 1985. С. 28–43.
5. Брайчев Г.Г. *On comparative increase of relations of convex functions and their derivatives* // National Academy of Sciences of Azerbaijan. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics. 2002. V. XVII (XXV). Bacu. P. 38–50.
6. Брайчев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.* М.: Прометей, 2005.

Георгий Генрихович Брайчев,
Московский педагогический государственный университет,
ул. М. Пироговская, 1,
199296, Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru