ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 8-17.

УДК 517.5; 517.956.225

ОЦЕНКИ КОНСТАНТ ХАРДИ-РЕЛЛИХА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ОБОБЩЕНИЙ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

Аннотация. Доказаны оценки снизу для функционалов, определяемых как максимальные константы в неравенствах типа Харди и Реллиха для полигармонических операторов порядка m в областях евклидова пространства. В доказательствах существенно используются известное интегральное тождество О.А. Ладыженской и его обобщения. Для выпуклых областей установлены обобщения двух известных результатов, полученных в статье M.P. Owen, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1999 и в книге A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis, The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality, Springer, 2015. В частности, нами получено новое доказательство теоремы М.П. Оуэна для полигармонических операторов в выпуклых областях. Для случая произвольных областей мы доказываем универсальные оценки снизу констант в неравенствах для полигармонических операторов порядка m с использованием произведения m различных констант в неравенствах типа Харди. Это позволяет получить явные оценки снизу констант в неравенствах типа Реллиха в областях размерности два и три. В последнем разделе статьи приведены две открытых проблемы. Одна из них аналогична проблеме Е.Б. Дэвиса об оценках констант Харди сверху. Вторая проблема связана с сравнением констант в неравенствах типа Харди и типа Реллиха для операторов, определенных в трехмерных областях.

Ключевые слова: полигармонический оператор, неравенство Харди, неравенство Реллиха, выпуклая область.

Mathematics Subject Classification: 26D15, 26D10

1. Введение

Пусть Ω — область евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). Предполагаем, что $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, тогда корректно определено расстояние $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ от точки $x \in \Omega$ до границы области. Будем рассматривать вещественнозначные функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е. гладкие функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$, такие, что $\mathrm{supp}\,(f) \subset \Omega$. Хорошо изучен функционал $c_2(s, \Omega)$, определяемый как точная константа в следующем неравенстве типа Харди

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^2}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^{s-2}} dx \geq c_2(s, \Omega) \int_\Omega \frac{f^2(x)}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^s} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

где $s \in (1, \infty)$ — фиксированный параметр. В частности, ряд авторов независимо друг от друга доказали, что $c_2(2, \Omega) = 1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ (см. [1]–[7]). Если $s \in (1, d]$, то существуют невыпуклые области $\Omega' \subset \mathbb{R}^d$, для которых $c_2(s, \Omega') = 0$, т.е. рассматриваемое неравенство не является содержательным. Известны различные условия

F.G. Avkhadiev, Estimates of Hardy-Rellich constants for polyharmonic operators and their generalizations.

Работа поддержана РФФИ (грант № 17-01-00282-а).

Поступила 14 июня 2017 г.

положительности константы $c_2(2,\Omega)$ (см., например, [3], [8]). В частности, хорошо известно, что $c_2(2,\Omega)>0$ для любой ограниченной области с локально липшицевой границей.

Пусть m — фиксированное натуральное число. Для гладких вещественнозначных функций f рассмотрим линейные комбинации ее частных производных порядка m, определяемые формулами:

$$\Delta^{m/2} f(x) := \begin{cases} \Delta^j f(x), & \text{если } m=2j \text{ — четное число;} \\ \nabla \Delta^j f(x), & \text{если } m=2j+1 \text{ — нечетное число.} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь Δ означает, как обычно, оператор Лапласа, и ∇f — градиент функции f. Очевидно, $\Delta^{m/2}$ является полигармоническим оператором для четных m.

Нам потребуется также стандартное выражение

$$|D^m f(x)|^2 := \sum_{k_1=1}^{d}\sum_{k_2=1}^{d}\cdots\sum_{k_m=1}^{d}\left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\cdots\partial x_{k_m}}\right)^2, \tag{3}$$

содержащее лишь квадраты частных производных порядка m.

Следует отметить, что имеется большое число работ по неравенствам Реллиха для гармонических и полигармонических операторов, когда $m\ge 2$, $\Omega=\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ и весовые функции являются степенями $|x|$ (см. [7]—[11] и библиографию в них). Мы будем рассматривать аналоги таких неравенств, когда $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная или неограниченная область, весовые функции являются степенями $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$.

Целью настоящей статьи является изучение следующего неравенства, распространяющего (1) на случай полигармонических операторов:

$$\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \ge A_m(\Omega)\int_\Omega \frac{f^2(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{2m}} \quad \forall f\in C_0^\infty(\Omega), \tag{4}$$

где функция $\Delta^{m/2} f$ определена формулой (2), константа $A_m(\Omega)\in[0,\infty)$ выбрана наибольшей из возможных, т.е.

$$A_m(\Omega)=\inf_{f\in C_0^\infty(\Omega), f\not\equiv 0}\frac{\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx}{\int_\Omega f^2(x)(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{-2m}dx}.$$

Кроме того, мы рассмотрим следующее обобщение (1):

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{\sigma}} \ge C_m(\sigma,\Omega)\int_\Omega \frac{f^2(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{2m+\sigma}} \quad \forall f\in C_0^\infty(\Omega), \tag{5}$$

где $\sigma\in(-1,\infty)$ — фиксированное число, функция $|D^m f|^2$ определена формулой (3), и константа $C_m(\sigma,\Omega)\in[0,\infty)$ максимальна, т.е.

$$C_m(\sigma,\Omega)=\inf_{f\in C_0^\infty(\Omega), f\not\equiv 0}\frac{\int_\Omega |D^m f(x)|^2(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{-\sigma}dx}{\int_\Omega f^2(x)(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{-2m-\sigma}dx}.$$

Отметим, что для случая $m\ge 2$ неравенство (4) изучалось лишь в нескольких статьях, а неравенство (5), насколько известно автору, ранее не исследовалось для случая, когда $m\ge 2$ и $\sigma\ne 0$.

Неравенство (4) впервые рассмотрел М.П. Оуэн [12]. Он доказал, что для любого $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$, и любой выпуклой области $\Omega\ne\mathbb{R}^d$ имеет место оценка $A_m(\Omega)\ge((2m-1)!!)^2/4^m$, и эта оценка оптимальна, так как для полупространства $x_1>0$ имеет место равенство.

Некоторые обобщения и усиления результата М.П. Оуэна получены в статьях [13]—[18]. В частности, нами доказано (см. [17] и [18]), что $A_2(\Omega)=9/16$ для любой выпуклой области $\Omega\ne\mathbb{R}^d$.

2. Простейшие свойства констант и некоторые известные факты

Очевидно, при $m = 1$ неравенства (4), (5) сводятся к неравенству вида (1), так как

$$|\Delta^{1/2} f(x)|^2 \equiv |D^1 f(x)|^2 \equiv |\nabla f(x)|^2,$$

и имеют место равенства $A_1(\Omega) = c_2(2, \Omega)$ и $C_1(\sigma, \Omega) = c_2(\sigma + 2, \Omega)$. Поэтому в утверждениях относительно неравенств (4), (5) и констант $A_m(\Omega)$, $C_m(\sigma, \Omega)$ будет появляться естественное условие $m \geq 2$.

Нетрудно проверить, что константы $A_m(\Omega)$, $C_m(\sigma, \Omega)$ и $c_2(s, \Omega)$ *инвариантны по отношению к линейным конформным отображениям области*, т.е. для любых $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ имеют место равенства

$$A_m(\Omega) = A_m(a\,\Omega + b), \qquad C_m(\sigma, \Omega) = C_m(\sigma, a\,\Omega + b)$$

и $c_2(s, \Omega) = c_2(s, a\,\Omega + b)$, где $a\,\Omega + b = \{ax + b : x \in \Omega\}$.

Приведем формулировки трех теорем, которые нам потребуются в доказательствах. Рассматриваем функции $u : \Omega \to \mathbb{R} \in C_0^\infty(\Omega)$. Речь идет о неравенствах Харди вида (1).

Теорема A (см. [1], [2] для $s = 2$ и [19] для $s \neq 2$). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклая область, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Если $s \in (1, \infty)$, то*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2\, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^{s-2}} \geq \frac{(s-1)^2}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)\, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^s} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6}$$

Теорема B (см. [19]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная область, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Если $s \in (d, \infty)$, то*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2\, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^{s-2}} \geq \frac{(s-d)^2}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)\, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^s} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7}$$

Ряд неравенств типа Харди и Реллиха с точными константами характеризуется тем, что отсутствуют экстремальные функции, принадлежащие к соответствующим пространствам Соболева и реализующие равенства в неравенствах вида (1) и (4). Поэтому появляется возможность усиления таких неравенств путем увеличения правой части дополнительным положительным слагаемым. Так, например, как мы отметили выше, $c_2(2, \Omega) = 1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема C (см. [4]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклая область, и пусть*

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{dist}(x, \partial\Omega).$$

Если $\delta_0(\Omega) < \infty$, то для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2(x)\, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^2} + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega u^2(x)\, dx, \tag{8}$$

где $\lambda_0 \approx 0,940$ — первый положительный корень уравнения Лямба $J_0(\lambda) + 2\lambda J_0'(\lambda) = 0$ для функции Бесселя нулевого порядка.

3. Неравенства типа Реллиха в выпуклых областях

Нашей основной целью является обобщение теоремы C на случай полигармонических операторов. Предварительно приведем некоторые полезные формулы для интегралов $\int_\Omega \left|\Delta^{m/2} f(x)\right|^2 dx$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная вещественнозначная функция, тогда для функций $\Delta^{1/2} f := \nabla f$ и $\Delta^1 f := \Delta f$ имеют место следующие интегральные тождества:

$$\int_\Omega |\nabla f(x)|^2\, dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^d \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right)^2 dx, \tag{9}$$

$$\int_{\Omega} (\Delta f(x))^2 \, dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 \, dx. \tag{10}$$

Очевидно, равенство (9) является простым следствием определения градиента функции. По-видимому, равенство (10) получено впервые О. А. Ладыженской (см., например, [21], гл. 2, формула (6.26)), и оно является нетривиальным тождеством, так как

$$(\Delta f(x))^2 = \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k^2} \, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} \not\equiv \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 .$$

Нам потребуется аналог формул (9) и (10) для полигармонических операторов. Справедливо следующее утверждение.

Предположим, что $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— область. Тогда для произвольной вещественнозначной функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int_{\Omega} \left| \Delta^{m/2} f(x) \right|^2 \, dx = \int_{\Omega} \sum_{k_1=1}^{d} \sum_{k_2=1}^{d} \cdots \sum_{k_m=1}^{d} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} \right)^2 \, dx, \tag{11}$$

или, что то же самое, равенство

$$\int_{\Omega} \left| \Delta^{m/2} f(x) \right|^2 \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 \, dx, \tag{12}$$

где $\partial x^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1} \, \partial x_2^{\alpha_2} \, \cdots \partial x_d^{\alpha_d}$, $\partial x_k^0 := 1$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ *— мультииндекс,* α_k *— неотрицательные целые числа, не превосходящие* m; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$, $\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \, \cdots \alpha_d!$.

Очевидно, равенство (12) получается из (11), так как применение простых формул комбинаторики приводит к следующему тождеству

$$\sum_{k_1=1}^{d} \sum_{k_2=1}^{d} \cdots \sum_{k_m=1}^{d} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_m}} \right)^2 \equiv \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 . \tag{13}$$

Отметим, что формула (11) известна, она приведена, например, в монографии [22] (гл. 2, формула (2.12)).

Как мы убедимся в дальнейшем, формула (11) оказывается весьма полезной при изучении неравенств вида (4) для полигармонических операторов, так как она позволяет представить $\int_\Omega \left| \Delta^{m/2} f(x) \right|^2 \, dx$ в виде суммы интегралов от квадратов частных производных порядка m.

Наш основной результат приведен ниже в теореме 2. Получим сначала аналог теоремы A для неравенства вида (5), рассматриваемого в выпуклых областях. Отметим, что теорема 1 существенно используется в доказательстве теоремы 2.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— выпуклая область,* $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. *Предположим, что* $\sigma \in (-1, \infty)$ *— фиксированное число,* m *— натуральное число,* $m \geq 2$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} \frac{|D^m f(x)|^2 \, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \frac{\Gamma^2(m + \sigma/2 + 1/2)}{\Gamma^2(\sigma/2 + 1/2)} \int_{\Omega} \frac{f^2(x) \, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2m+\sigma}}, \tag{14}$$

где Γ *— гамма функция Эйлера. Следовательно, для любой выпуклой области* $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ *имеет место неравенство*

$$C_m(\sigma, \Omega) \geq \frac{\Gamma^2(m + \sigma/2 + 1/2)}{\Gamma^2(\sigma/2 + 1/2)}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть f — вещественнозначная функция, принадлежащая семейству $C_0^\infty(\Omega)$. В силу определения $|D^m f|^2$ и формулы (13) справедливо тождество

$$|D^m f(x)|^2 \equiv \sum_{k_1=1}^{d} \sum_{k_2=1}^{d} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{d} \left|\nabla u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)\right|^2, \tag{15}$$

где

$$u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_{m-1}}}. \tag{16}$$

Применяя к функции $u = u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}} \in C_0^\infty(\Omega)$ неравенство (6) при $s = \sigma + 2$, суммируя по индексам $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$ и учитывая формулу (15), будем иметь

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2}{4} \int_\Omega \sum_{k_1=1}^{d} \sum_{k_2=1}^{d} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{d} \frac{u^2_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2+\sigma}},$$

и, что то же самое,

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2}{4} \int_\Omega \frac{|D^{m-1} f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2+\sigma}}. \tag{17}$$

Поскольку $|D^1 f|^2 = |\nabla f|^2$, то при $m = 2$ неравенство (17) равносильно следующему

$$\int_\Omega \frac{|D^2 f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2}{4} \int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2+\sigma}}.$$

Оценивая снизу интеграл из правой части этого неравенства с применением (6) к функции $u = f$ при $s = \sigma + 4$, получаем

$$\int_\Omega \frac{|D^2 f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \frac{(1+\sigma)^2 (3+\sigma)^2}{4^2} \int_\Omega \frac{f^2(x)\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{4+\sigma}},$$

что равносильно доказываемому неравенству (14) при $m = 2$ с учетом равенства $(1+\sigma)(3+\sigma)/4 = \Gamma(\sigma/2 + 5/2)/\Gamma(\sigma/2 + 1/2)$.

Если $m \geq 3$, то к неравенству (14) приходим с помощью итераций на основании неравенства (17) и соглашения $(D^0 f, D^0 f) = f^2$. А именно, применяя (17) с заменой чисел m и σ на числа $m - j$ и $\sigma + 2j$ при $j = 1, \cdots, m-1$, будем иметь неравенства

$$\int_\Omega \frac{|D^{m-j} f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{\sigma+2j}} \geq \frac{(2j+1+\sigma)^2}{4} \int_\Omega \frac{|D^{m-j-1} f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2j+2+\sigma}},$$

где $|D^0 f|^2 := f^2$. Применяя эти неравенства последовательно при $j = 1, \cdots, m-1$ для оценки снизу интеграла из правой части (17), получаем

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq \left(\prod_{j=0}^{m-1} \frac{2j+1+\sigma}{2} \right)^2 \int_\Omega \frac{f^2(x)\, dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2m+\sigma}},$$

что равносильно неравенству (14) с учетом равенства

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{2j+1+\sigma}{2} = \frac{\Gamma(m + \sigma/2 + 1/2)}{\Gamma(\sigma/2 + 1/2)}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Равенство (12) и определения констант $A_m(\Omega)$ и $C_m(\sigma, \Omega)$ показывают, что $A_m(\Omega) = C_m(0, \Omega)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$.

Применяя теорему 1 при $\sigma = 0$ с учетом этого замечания и равенства $\Gamma(m + 1/2)/\Gamma(1/2) = (2m-1)!!/2^m$, мы получаем как следствие результат М.П. Оуэна [12].

Следствие 1. *(см. [12]). Для любого натурального числа $m \geq 2$ и любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \neq \mathbb{R}^d$) имеет место неравенство*

$$\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \geq \frac{((2m-1)!!)^2}{4^m} \int_\Omega \frac{f^2(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2m}} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отметим, что оригинальное доказательство М.П. Оуэна основано на использовании функции расстояния Е.Б. Дэвиса (см. [3]) и существенно отличается от нашего.

Следующее утверждение при $m = 2$ доказано в [7] (с. 217). Оно усиливает результат М.П. Оуэна в том случае, когда область Ω выпукла и имеет конечный внутренний радиус $\delta_0(\Omega)$. Отметим попутно, что существуют неограниченные выпуклые области, удовлетворяющие условию $\delta_0(\Omega) < \infty$. Например, $\delta_0(\Omega') = 1/2$ для области $\Omega' = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 < x_1 < 1\}$.

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, Тогда для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \geq \Phi_m(f) + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega |\Delta^{(m-1)/2} f(x)|^2 dx, \tag{18}$$

$$\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_0^{2(j-1)} \Phi_{m-j+1}(f)}{\delta_0^{2(j-1)}(\Omega)} + \frac{\lambda_0^{2m}}{\delta_0^{2m}(\Omega)} \int_\Omega f^2(x)\,dx, \tag{19}$$

где $\lambda_0 \approx 0,940$ — первый положительный корень уравнения Лямба $J_0(\lambda) + 2\lambda J_0'(\lambda) = 0$ для функции Бесселя нулевого порядка и

$$\Phi_k(f) = \frac{((2k-1)!!)^2}{4^k} \int_\Omega \frac{f^2(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2k}} \ \ (k = 1, 2, \cdots, m).$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольная вещественнозначная функция. Для этой функции справедлива формула (15). Очевидно, функция $u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}$, определенная равенством (16), также принадлежит семейству $C_0^\infty(\Omega)$. Применяя к функциям $u = u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}$ неравенство (8) теоремы C, будем иметь

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{u^2_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2} +$$
$$+ \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega u^2_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)\,dx.$$

Суммируя эти неравенства по индексам k_1, $k_2, \cdots$, k_{m-1} и учитывая равенства (11)—(13), (15), получаем

$$\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx = \int_\Omega |D^m f(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|D^{m-1} f(x)|^2\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2} +$$
$$+ \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega |D^{m-1} f(x)|^2\,dx.$$

По теореме 1, примененной для показателей $m-1$ и $\sigma = 2$, будем иметь

$$\int_\Omega \frac{|D^{m-1} f(x)|^2\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^2} \geq \frac{((2m-1)!!)^2}{4^{m-1}} \int_\Omega \frac{f^2(x)\,dx}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{2m}} = \Phi_m(f).$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\int_\Omega |D^m f(x)|^2\,dx \geq \Phi_m(f) + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega |D^{m-1} f(x)|^2\,dx, \tag{20}$$

равносильное (18).

Докажем теперь основное неравенство (19). Очевидно, неравенство (20) при $m = 1$ совпадает с неравенством (8) теоремы C. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega |D^k f(x)|^2 \, dx \geq \Phi_k(f) + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega |D^{k-1} f(x)|^2 \, dx. \tag{21}$$

Очевидно, мы можем оценить снизу второе слагаемое в правой части неравенства (20), применяя неравенство (21) с показателем $k = m-1$. В результате будем иметь

$$\int_\Omega |D^m f(x)|^2 \, dx \geq \Phi_m(f) + \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)} \Phi_{m-1}(f) + \frac{\lambda_0^4}{\delta_0^4(\Omega)} \int_\Omega |D^{m-2} f(x)|^2 \, dx.$$

Если $m = 2$, то доказательство неравенства (19) будет завершено с учетом равенства $|D^0 f|^2 = f^2$.

Если $m \geq 3$, то продолжаем процесс, привлекая неравенство (21) с показателем $k = m-2$ для оценки снизу интеграла $\int_\Omega |D^{m-2} f(x)|^2 \, dx$. Очевидно, за m шагов приходим к неравенству (19).

Этим и завершается доказательство теоремы 2.

4. Оценки констант для произвольных областей.

Пусть $c_2(s, \Omega)$ — постоянная Харди, определенная во введении. Напомним, что $c_2(s, \Omega) = C_1(s-2, \Omega)$.

Получим оценки снизу для константы $C_m(\sigma, \Omega)$ для произвольной d-мерной области, удовлетворяющей единственному условию $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Это условие гарантирует корректность определения расстояния $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ и, следовательно, является естественным для неравенства вида (5).

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная область, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Если $\sigma \in (-1, \infty)$, то*

$$C_m(\sigma, \Omega) \geq \prod_{j=1}^m c_2(2j + \sigma, \Omega), \tag{22}$$

в частности,

$$A_m(\Omega) \geq \prod_{j=1}^m c_2(2j, \Omega). \tag{23}$$

Если $\sigma \in (d-2, \infty)$, то

$$C_m(\sigma, \Omega) \geq \frac{\prod_{j=1}^m (2j + \sigma - d)^2}{4^m}. \tag{24}$$

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 1 с необходимыми изменениями.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$ — фиксированная вещественнозначная функция. Запишем для нее равенство (15). На первом шаге применяем общее неравенство типа Харди (1) к функции $u = u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}} \in C_0(\Omega)$ из формулы (15). Полагая $s - 2 = \sigma$ в неравенстве (1), получаем

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)|^2}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} dx \geq c_2(2 + \sigma, \Omega) \int_\Omega \frac{u^2_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1}}(x)}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^{2+\sigma}} dx.$$

Суммируя эти неравенства по индексам $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$ с учетом формулы (15), будем иметь

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2 \, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma} \geq c_2(2 + \sigma, \Omega) \int_\Omega \frac{|D^{m-1} f(x)|^2 \, dx}{(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^{2+\sigma}}.$$

Повторяем те же рассуждения для оценки снизу интеграла в правой части этого неравенства для индексов $m-1, m-2, \cdots, 1$ и соответствующих показателей $\sigma+2, \sigma+4, \cdots, \sigma+2m-2$. Нетрудно видеть, что через m шагов приходим к неравенству

$$\int_\Omega \frac{|D^m f(x)|^2\, dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^\sigma} \geq \left(\prod_{j=1}^{m} c_2(2j+\sigma,\Omega)\right) \int_\Omega \frac{f^2(x)\, dx}{(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{2m+\sigma}}.$$

Последнее неравенство и влечет оценку (22), так как $C_m(\sigma,\Omega)$ определена как максимальная постоянная в неравенстве (5).

Если $\sigma \in (d-2,\infty)$ и $j = 1,2,\cdots,m$, то $2j+\sigma > d$. Следовательно, $c_2(2j+\sigma,\Omega) \geq (2j+\sigma-d)^2/4$ по теореме B. Поэтому оценка (24) следует из теоремы B и неравенства (22).

С учетом равенства $A_m(\Omega) = C_m(0,\Omega)$ из неравенства (24) получаем (23). Таким образом, теорема 3 доказана.

Следствие 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная область, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $d=2$, то $A_m(\Omega) \geq ((m-1)!)^2\ c_2(2,\Omega)$;

2) если $d=3$, то $A_m(\Omega) \geq ((2m-3)!!)^2 c_2(2,\Omega)/4^{m-1}$.

Доказательство следствия 2. Очевидно, из оценки (23) следует, что имеет место неравенство $A_m(\Omega) \geq X_m c_2(2,\Omega)$, где $X_m = \prod_{j=2}^m c_2(2j,\Omega)$.

Пусть $d=2$, тогда $c_2(2j,\Omega) \geq (j-1)^2$ для $j=2,\cdots,m$ по теореме B. Следовательно, $X_m \geq ((m-1)!)^2$ в случае двумерных областей, что и требовалось доказать.

Если $d=3$, то снова применяем теорему B для оценки снизу константы $c_2(2j,\Omega)$ при $j \geq 2$. Имеем: $c_2(2j,\Omega) \geq (2j-3)^2/4$ для $j=2,\cdots,m$. Отсюда и следует требуемая оценка снизу для $A_m(\Omega)$ в случае трехмерных областей.

Константа $c_2(2,\Omega)$ хорошо изучена и для нее известен ряд оценок, зависящих от геометрических характеристик области Ω (см., например, [3], [7], [8], [17]–[20], [25]). Поэтому следствие 2 позволяет получить ряд эффективных оценок снизу для константы $A_m(\Omega)$ в случае двумерных и трехмерных областей.

5. О некоторых нерешенных проблемах.

Теория многомерных неравенств типа Харди и Реллиха интенсивно развивается. Интерес к этим неравенствам обусловлен разнообразными приложениями в математической физике и гармоническом анализе (см, например, [7]–[9], [23]). Мы приведем лишь две нерешенных задачи, относящиеся к основаниям теории и допускающие простые формулировки.

1. О верхней границе для константы $A_m(\Omega)$.

Из определения $A_m(\Omega)$ следует, что

$$A_m(\Omega) \leqslant \frac{\int_\Omega |\Delta^{m/2} f(x)|^2 dx}{\int_\Omega f^2(x)(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega))^{-2m} dx}$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega), f \not\equiv 0$. Поэтому $A_m(\Omega) < \infty$ для любой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ при любом $m \in \mathbb{N}$.

Гипотеза 1. *Пусть $d=2$ или $d=3$.*

Тогда для любого натурального числа m и для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \neq \mathbb{R}^d$) справедлива точная оценка

$$A_m(\Omega) \leqslant \frac{((2m-1)!!)^2}{4^m}.$$

Отметим, что при $m = 1$, т.е. для $A_1(\Omega) = c_2(2, \Omega)$, такая гипотеза была выдвинута Е.Б. Дэвисом в 1995 году (см. [24]), но не доказана к настоящему времени.

2. О критериях положительности $c_2(2, \Omega)$.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^2)$. Через $M_0(\Omega)$ обозначим евклидов максимальный модуль, определяемый равенством

$$M_0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \sup_K \ln \frac{R(K)}{r(K)},$$

где супремум берется по всем концентрическим кольцам $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : r(K) < |x - x_K| < R(K)\}$, таким, что $K \subset \Omega$, $0 < r(K) < R(K) < \infty$, $x_K \in \partial\Omega$. Если область $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ не содержит таких колец, то полагаем по определению, что евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega') = 0$.

Очевидно, условие $M_0(\Omega) < \infty$ представляет собой геометрическое требование на область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Известно (см. [17]-[20], [25]), что для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^2)$

$$A_1(\Omega) = c_2(2, \Omega) > 0 \Longleftrightarrow A_2(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty. \qquad (25)$$

В частности, $c_2(2, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0$ и $M_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \infty$.

Понятно, что можно определить $M_0(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ по аналогии с двумерным случаем, заменяя кольца K шаровыми слоями вида $\{x \in \mathbb{R}^3 : r(K) < |x - x_K| < R(K)\}$.

Поскольку $c_2(2, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = 1/4 > 0$, $A_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = 9/16 > 0$ и $M_0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \infty$, то утверждение (25) не является справедливым для трехмерных областей. К сожалению, неясно, чем заменить условие $M_0(\Omega) < \infty$ в случае многомерных областей. Поэтому мы можем предложить лишь усеченный вариант (25) для трехмерных областей.

Имеем: $c_2(4, \Omega) > 0$ для трехмерных областей в силу теоремы C и $A_2(\Omega) \geq c_2(2, \Omega)\, c_2(4, \Omega)$ для произвольных областей в силу оценки (23). Следовательно, $c_2(2, \Omega) > 0 \Longrightarrow A_2(\Omega) > 0$ для трехмерных областей.Эти факты и аналогия с двумерным случаем позволяют нам сформулировать следующее утверждение.

Гипотеза 2. *Для любой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $(\Omega \neq \mathbb{R}^3)$

$$A_1(\Omega) = c_2(2, \Omega) > 0 \Longleftrightarrow A_2(\Omega) > 0.$$

Трудности, связанные с исследованием гипотез 1 и 2, стандартны для теории неравенств типа Харди и Реллиха. Во первых, невозможно применить методы классического вариационного исчисления из-за отсутствия экстремальных функций, реализующих знаки равенства, и, во-вторых, невозможно использовать методы симметризации из теории изопериметрических неравенств из-за присутствия весовых функций, являющихся степенями функции расстояния $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Matskewich, P.E. Sobolevskii *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in* $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Anal. V. 28. 1997. P. 1601–1610.
2. M. Marcus, V.J. Mitzel, Y. Pinchover *On the best constant for Hardy's inequality in* $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. V. 350. 1998. P. 3237–3250.
3. E.B. Davies *A Review of Hardy inequalities* // The Maz'ya anniversary Collection. 2, Oper. Theory Adv. Appl. V. 110. 1999. P. 55–67.
4. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM). V. 87, №8–9. 2007. P. 632–642.
5. F.G. Avkhadiev, A. Laptev *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains* // International Mathem. Series "Around Research of Vladimir Maz'ya, I". Function Spaces, Springer, 2010. V. 11. P. 1–12.

6. Авхадиев Ф.Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4 // Известия РАН. Сер. матем. Т. 78, № 5. 2014. С. 3–26.
7. A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer. 2015. 263 p.
8. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* Ленинград: изд. Ленинградского университета. 1985. 416 с.
9. F. Rellich *Perturbation theory of eigenvalue problems.* New York-London-Paris: Gordon and Breach. 1969. 128 p.
10. P. Caldiroli, R. Musina *Rellich inequalities with weights* // Calc. Var. V. 45. 2012. P. 147–164.
11. F. Gesztesy, L. Littlejohn *Factorizations and Hardy-Rellich-type inequalities* // arXiv: 1701.08929v1 [math.AP] 31 Jan 2017. P. 1–13.
12. M.P. Owen *The Hardy-Rellich inequality for polyharmonic operators* // Proc. Royal Soc. Edinburgh, V. 129A. 1999. P. 825–839.
13. M.G. Barbatis *Improved Rellich inequalities for the polyharmonic operator* // Indiana University Math. J. V. 55, №4. 2006. P. 1401–1422.
14. M.G. Barbatis and A. Tertikas *On a class of Rellich inequalities* // J. Comp. Appl. Math. V. 194. 2006. P. 156–172.
15. W.D. Evans and R.T. Lewis *Hardy and Rellich inequalities with remainders* // Journal of Mathematical Inequalities. V. 1, №4. 2007. P. 473–490.
16. E. Berchio, D. Cassani and F. Gazzola *Hardy-Rellich inequalities with boundary remainder terms and applications* // Manuscript. Math. V. 131. 2010. P. 427–458.
17. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства типа Реллиха в областях евклидова пространства* // Известия вузов. Матем. №1. 2016. С. 69–73.
18. F.G. Avkhadiev *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. V. 442. 2016. P. 469–484.
19. F.G. Avkhadiev *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. V. 21. 2006. P. 3–31.
20. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. матем. инст. им. В.А. Стеклова. Т. 255. 2006. С. 8–18.
21. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973, 408 с.
22. F. Gazzola, H-Ch. Grunau, G. Sweers *Polyharmonic boundary values problems*, Lect. Notes in Math., Springer, 1991, 415 p.
23. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность.* М.: Мир. 1978. 394 с.
24. E.B. Davies *The Hardy constant* // Quart. J. Math.Oxford Ser.(2). V. 46, №. 2. 1995. P. 417–431.
25. Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Матем. сборник. Т. 206, №12. 2015. С. 3–28.

Фарит Габидинович Авхадиев,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, 38,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `avkhadiev47@mail.ru`